УДК 539.3

С.С. ЩЕРБАКОВ, канд. физ.-мат. наук
Белорусский государственный университет, Минск

ОБОБЩЕННАЯ ТРИБОФАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Предложена постановка задачи определения механического состояния системы n движущихся сплошных сред, обладающих различными свойствами. Данная постановка включает в себя как уравнения движения сред, так и набор граничных условий для каждой из сред, определяемый характером их взаимодействия. Применительно к системе твердых тел предложена система разрешающих интегральных уравнений. Данная система позволяет определить нормальные и касательные усилия на поверхности каждого из тел, а также напряженно-деформированное состояние его внутренности

Ключевые слова: *контактная и внеконтактная нагрузки, прямой и обратный трибофатический эффект, тензоры напряжений, моделирование повреждений*

Термомеханическая постановка задачи для *n* сред

В качестве трибофатической системы обычно рассматривается пара (элементов ролик/вал, ролик/кольцо, труба/поток жидкости), в которой, по крайней мере, один из элементов подвержен действию как контактной, так и неконтактной нагрузки [1]. Для исследования более сложных проявлений прямого и обратного трибофатических эффектов рассмотрим систему из более чем двух элементов.

Примерами таких систем являются:
- уравнения движения n сред как абсолютно твердых (без учета внутреннего состояния сред):

$$\mathbf{r}^k = \mathbf{r}^k(\mathbf{x},t),\ k = 1...n, \tag{1}$$

где $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$ — базисный вектор некоторой системы координат, t — время.

Взаимодействие двух из n сред с учетом их механических и геометрических свойств описывается условиями контакта:

$$\bar{u}_i^k(\mathbf{r}^k)\Big|_S - \bar{u}_i^l(\mathbf{r}^l)\Big|_S = \gamma_i^{k,l}(\mathbf{r}^k,\mathbf{r}^l),\quad i = 1,2,3;\ l = 1...m; \tag{2}$$

$$\sigma_{nn}^k(\mathbf{r}^k)\Big|_S - \sigma_{nn}^l(\mathbf{r}^l)\Big|_S = 0, \tag{3}$$

$$\left|\sigma_{n\tau}^k(\mathbf{r}^k)\Big|_S\right| = \left|-\sigma_{n\tau}^l(\mathbf{r}^l)\Big|_S\right| = f^{k,l}\left|\sigma_{nn}^k(\mathbf{r}^k)\Big|_S\right| = f^{k,l}\left|\sigma_{nn}^l(\mathbf{r}^l)\Big|_S\right|, \tag{4}$$

где m — количество сред, контактирующих с k-й, $f^{k,l}$ — коэффициент трения между k и l средами.

Кроме условий (1)—(4), учитывающих движение сред и их взаимодействие сред, к отдельной среде могут быть приложены независимые от ее свойств граничные условия первого типа, если заданы перемещения $\bar{u}_i^{k*}(\mathbf{r}^k)$ на поверхности упругого тела:

$$\bar{u}_i^k(\mathbf{r}^k) = \bar{u}_i^{k*}(\mathbf{r}^k) \tag{5}$$

и второго типа, если на поверхности тела задано распределение усилий R_i:

$$\sigma_{ij}^k(\mathbf{r}^k)\, l_j^k(\mathbf{r}^k) = R_i^k(\mathbf{r}^k), \tag{6}$$

где l_j^k — направляющий косинус.

Также могут быть приложены граничные условия третьего (смешанного) типа, если на поверхности заданы как перемещения, так и усилия.

Для некоторого положения k-й среды в пространстве и момента времени $(\mathbf{x},\ t)$ соотношения, определяющие термомеханическое состояние частицы (элементарного объема) среды, имеют вид:
- уравнение неразрывности:

$$\dot{\rho}^k + \left(\rho^k \dot{u}_i^k\right)\Big|_i = 0,\ i = 1,2,3; \tag{7}$$

- уравнения движения частиц сплошной среды:

$$\sigma_{ij,j}^k + \rho^k f_i^k = \rho^k \ddot{u}_i^k,\ i,\ j,\ k\ =\ 1,\ 2,\ 3; \tag{8}$$

- уравнение энергии:

$$\dot{e}_i^k = \frac{1}{\rho^k}\sigma_{ij}^k \dot{\varepsilon}_{ij}^k - \frac{1}{\rho^k} c_{i,i}^k + \zeta^k. \tag{9}$$

В формулах (8)—(9) ρ^k — плотность, f_i^k — объемные силы, c_i^k — поток тепла через единицу площади в единицу времени за счет теплопроводности, ξ^k — постоянная теплового излучения на единицу массы в единицу времени.

Рассмотрим соотношения, которые могут быть добавлены к (2)—(9) для конкретизации механических свойств k-й среды к данным соотношениям.

В случае **твердого тела** такими соотношениями являются:

- зависимость между перемещениями и деформациями:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \qquad (10)$$

- уравнения совместности для линейных деформаций:

$$\begin{gathered}\varepsilon_{ii,jj} + \varepsilon_{jj,ii} - 2\varepsilon_{ij,ij} = 0,\\ \left(\varepsilon_{ij,k} - \varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j}\right)_{,i} - \varepsilon_{ii,jk} = 0,\\ i,\, j,\, k \ = \ 1,\ 2,\ 3;\end{gathered} \qquad (11)$$

- зависимости между напряжениями и деформациями:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}\left(\varepsilon_{pq}\right),\ p,q = 1,\ 2,\ 3; \qquad (12)$$

- в случае анизотропного упругого твердого тела принимающей вид:

$$\sigma_{ij} = E_{ijpq}\varepsilon_{pq}; \qquad (13)$$

- в случае изотропного упругого твердого тела:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\theta\delta_{ij}, \qquad (14)$$

где $\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$, $\delta_{ij} = \begin{cases}1, & i = j\\ 0, & i \ne j\end{cases}$ — метрический тензор (дельта Кронекера), μ и λ — постоянные Ламе, которые связаны с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν следующим образом:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)},\ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \qquad (15)$$

Отметим, что запятая в соотношениях (10)—(14) обозначает операцию дифференцирования по идущему следом индексу. В данных соотношениях и в дальнейшем, если иное специально не оговаривается, по повторяющимся индексам производится суммирование (в (11) суммирование по повторяющимся индексам не производится).

Решение задачи теории упругости может состоять в определении только перемещений u_i, либо напряжений σ_{ij}. Рассмотрим последний случай при отсутствии объемных сил. В этом случае уравнения (8) принимают вид:

$$\sigma_{ij,j} = 0. \qquad (16)$$

Данных трех уравнений недостаточно для определения шести независимых компонент σ_{ij}. Доопределить систему можно с помощью уравнений (11).

Если с помощью закона Гука (14) выразить в (16) деформации через напряжения, то получим шесть уравнений Бельтрами—Мичелла:

$$(1+\nu)\Delta\sigma_{ij} + 3\sigma_{,ij} = 0, \qquad (17)$$

где $\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$.

Система (11), (16), (17) является переопределенной (шесть переменных σ_{ij} удовлетворяют трем уравнениям (16) и девяти уравнениям (17)). Ряд примеров [2, 3] показывает, что для выделения из класса решений уравнений Бельтрами—Мичелла тех, которые приводят к физически оправданным напряженно-деформированным состояниям твердых тел, необходимо учитывать уравнения равновесия (16).

Конкретный вид решения задачи теории упругости в напряжениях определяется с помощью граничных условий типа (6).

Построение решения задачи теории упругости в общем случае является сложной задачей. Обычно решаются частные задачи, основываясь на существенных упрощениях.

Учет **тепловых эффектов** может быть произведен на основе представления о линейной термоупругости. Тогда компоненты тензора линейных деформаций можно представить суммой:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(S)} + \varepsilon_{ij}^{(T)} = \varepsilon_{ij}^{(S)} + \alpha\Delta T, \qquad (18)$$

в которой $\varepsilon_{ij}^{(S)}$ — деформации, вызванные полем напряжений, $\varepsilon_{ij}^{(T)}$ — полем температур. Компоненты деформации элементарного объема изотропного тела, α — коэффициент линейного теплового расширения k-й среды, ΔT^k — изменение температуры в некоторой точке k-й среды.

Тогда (14) примет вид:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\theta\delta_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha\delta_{ij}\Delta T. \qquad (19)$$

Теплопроводность изотропного упругого тела определяется законом теплопроводности Фурье:

$$c_i = -kT_{,i}, \qquad (20)$$

где скаляр k — коэффициент теплопроводности среды, который должен быть положительным, чтобы обеспечить положительную скорость производства энтропии. Если ввести удельную теплоемкость при постоянной деформации $c^{(u)}$ равенством:

$$-c_{i.,i} = \rho c^{(u)}\dot{T} \qquad (21)$$

и предположить, что внутренняя энергия является функцией компонент деформации $\dot{\varepsilon}_{ij}$ и температуры T, то (16) примет вид уравнения притока тепла связанной термоупругости:

$$kT,e = \rho c^{(u)}\dot{T} + (3\lambda + 2\mu)\alpha T\dot{\varepsilon}_{ii}. \qquad (22)$$

Для задач, в которых эффектами инерции и взаимосвязи тепловых и механических процессов можно пренебречь, общая задача термоупругости распадается на две отдельные задачи, которые решаются последовательно, но независимо. Так, для квазистатической задачи несвязанной термоупругости (без учета теплообразования при деформации) основные уравнения будут следующие:

- уравнение теплопроводности:

$$kT_{,ii} = \rho c^{(u)}\dot{T}; \qquad (23)$$

- уравнение равновесия:

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i \ = 0,\ i,j,k = 1,2,3; \qquad (24)$$

- а также (11) и (19).

Рассмотрим соотношения, определяющие k-ю среду как **жидкость (газ)**.

Напряженное состояние жидкости обычно представляют [4] в виде суммы нормальных и касательных напряжений:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \qquad (25)$$

где τ_{ij} — тензор вязких напряжений, p — давление жидкости.

В случае покоящейся жидкости тензор напряжений определяется гидростатическим давлением p_0, а касательные напряжения, как и в невязкой жидкости, равны нулю:

$$\sigma_{ij} = -p_0\delta_{ij}. \qquad (26)$$

Для стоксовой (неньютоновой) жидкости связь между вязкими напряжениями τ_{ij} и скоростью деформации $\dot{\varepsilon}_{ij}$ нелинейна:

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}\left(\dot{\varepsilon}_{pq}\right), \qquad (27)$$

а для ньютоновой линейна:

$$\tau_{ij} = K_{ijpq}\dot{\varepsilon}_{pq}. \qquad (28)$$

Тогда для изотропной однородной ньютоновой жидкости определяющие уравнения можно получить по аналогии с (14):

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda^* \delta_{ij}\dot{\theta} + 2\mu^* \dot{\varepsilon}_{ij}, \tag{29}$$

где λ^* и μ^* — коэффициенты вязкости жидкости.

В сжимаемых жидкостях ($u_{i,i} \neq 0$) давление p, плотность ρ и абсолютная температура T связаны уравнением состояния:

$$p = p(\rho, T), \tag{30}$$

которое для совершенного газа принимает вид:

$$p = c\rho T, \tag{31}$$

где c — газовая постоянная.

Если уравнение состояния не содержит температуры, то процессы в жидкости называются баротропными.

Система разрешающих уравнений для нескольких сред

Рассмотрим общую схему решения обобщенной задачи трибофатики, основанную на совместном анализе систем интегральных уравнений описывающих взаимодействие упругих твердотельных элементов трибофатической системы и их механические состояния. Для этого воспользуемся подходами к построению систем интегральных уравнений, описанными в [2, 5].

Пусть к сплошной среде D, ограниченной кусочно-гладкой замкнутой поверхностью S, приложены смешанные граничные условия, которые не зависят от других элементов системы. К частям поверхности s_u приложены граничные условия в перемещениях, а к частям s_σ — в напряжениях:

$$\bar{u}_i^p\Big|_{S_i^p} = \bar{u}_i^*(S_u),\ \sigma_{ij} l_j\Big|_{S_\sigma} = R_i(S_\sigma) \tag{32}$$

или:

$$\sigma_{nn}\Big|_{S_\sigma} = p^{(S)}(S_\sigma),\ \sigma_{n\tau}\Big|_{S_\sigma} = q^{(S)}(S_\sigma). \tag{33}$$

Если некоторая часть поверхности одного из взаимодействующих тел S_σ^i, к которой приложены граничные условия, стягивается в точку, то распределения $p^{(S)}$ и $q^{(S)}$ могут быть представлены сосредоточенными силами:

$$p^{(S)}\Big|_{S_\sigma \to 0} \to P \text{ и } q^{(S)}\Big|_{S_\sigma \to 0} \to Q. \tag{34}$$

Также имеются части поверхности, свободные от внешних нагрузок в виде напряжений и/или перемещений s_1, т.е. для них справедливы граничные условия:

$$\sigma_{nn}\Big|_{S_l} = 0,\ \sigma_{n\tau}\Big|_{S_l} = 0. \tag{35}$$

Рассмотрим теперь граничные условия, описывающие контактное взаимодействие между элементами системы (2) и (3) в следующей форме:

$$\begin{gathered} \bar{u}_n^{(l)}\Big|_{S_u^{(lm)}} + \bar{u}_n^{(m)}\Big|_{S_u^{(lm)}} = \\ = \delta^{(lm)}\Big|_{S_u^{(lm)}} - \left(x_n^{(l)}\Big|_{S_u^{(lm)}} + x_n^{(m)}\Big|_{S_u^{(lm)}} \right), \end{gathered} \tag{36}$$

$$\begin{gathered} L_{nn}(\bar{u}^{(l)}\Big|_{S_\sigma^{(lm)}}) - L_{nn}(\bar{u}^{(m)}\Big|_{S_\sigma^{(lm)}}) = \\ = \sigma_{nn}^{(l)}\Big|_{S_\sigma^{(lm)}} + \sigma_{nn}^{(m)}\Big|_{S_\sigma^{(lm)}} = \bar{\gamma}^{(lm)} = 0, \end{gathered} \tag{37}$$

где $L_{ij}(u)$ — оператор напряжений, имеющий в упругой постановке следующий вид:

$$L_{ij}(u) = \mu\left(u_{i,j} + u_{i,j}\right) + \lambda u_{q,q}\delta_{ij}, \tag{38}$$

где $S_\sigma^{(lm)} \subset S^{(lm)}$, $S_u^{(lm)} \subset S^{(lm)}$, $S^{(lm)}$ — поверхность контакта тел l и m.

Для определения нормальных $p^{(lm)}$ и касательных $q^{(lm)}$ контактных усилий необходимо выполнение следующих соотношений:

$$\begin{gathered} P^{(lm)} = L_P\left(p^{(lm)}\right) = \\ = \iint\limits_{S_\sigma^{(lm)}(\xi_1,\xi_2)} p^{(lm)}(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2, \end{gathered} \tag{39}$$

$$Q^{(lm)} \le f^{(lm)} P^{(lm)} \tag{40}$$

или:

$$\begin{gathered} \iint\limits_{S_\sigma^{(lm)}(\xi_1,\xi_2)} q^{(lm)}(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2 \le \\ \le \iint\limits_{S_\sigma^{(lm)}(\xi_1,\xi_2)} f^{(lm)} p^{(lm)}(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2, \end{gathered} \tag{41}$$

где:

$$p_{nn}^{(lm)}\Big|_{S_\sigma^{(lm)}} = \sigma_{nn}^{(l)}\Big|_{S_\sigma^{(lm)}} = -\sigma_{nn}^{(m)}\Big|_{S_\sigma^{(lm)}}, \tag{42}$$

$S_\sigma^{(lm)} \subset S^{(lm)}$, $S_u^{(lm)} \subset S^{(lm)}$, $S^{(lm)}$ — поверхность контакта тел l и m, $p^{(lm)}$ — сила контактного взаимодействия между телами l и m, $Q^{(lm)}$ — сила трения между телами l и m.

Величина силы контактного взаимодействия $p^{(lm)}$ и распределений неконтактных сил $p(S_\sigma)$ и $q(S_\sigma)$ определяется из уравнений движения системы (1)—(4).

Пусть имеются фундаментальные решения для полупространства при действии на него нормальной (верхний индекс p) и касательной к поверхности сил (верхний индекс q) в перемещениях:

$$u_i^{(p)},\ u_i^{(q)} \tag{43}$$

и напряжениях:

$$\sigma_{ij}^{(p)},\ \sigma_{ij}^{(q)}, \tag{44}$$

для которых:

$$G_{ij}^{(\sigma,p)},\ G_{ij}^{(\sigma,q)},\ G_i^{(u,p)},\ G_i^{(u,q)} \tag{45}$$

представляют собой соответствующие функции влияния.

Решение задачи (32), (33), (35) основано на использовании фундаментальных решений (45) для действия на полупространство единичной силы. Суперпозиция этих решений позволяет решать задачу для любого распределения граничных условий типа (32), (33) по полупространству. В этом случае условия нулевых перемещений и напряжений на бесконечности выполняются автоматически, поскольку они выполняются для решений о действии сосредоточенной силы (43), (44).

Состояние в точке $M(x_1, x_2, x_3)$ полупространства может быть определено из следующих соотношений для поверхностных и объемных сил:

$$\begin{gathered} u_i = u_i^{(p)} + u_i^{(q)} = \\ = L_i^{(S,u)}(p) + L_i^{(S,u)}(q) + L_i^{(V,u)}(t), \end{gathered} \tag{46}$$

$$\sigma_{ij} = L_{ij}(u), \tag{47}$$

где оператор L_i^S и L_i^V имеют вид:

$$\begin{gathered} L_i^{(S,j)}(\varphi) = \iint\limits_{S(\xi_1,\xi_2)} \varphi(\xi_1,\xi_2) \times \\ \times G_i^{(j,\varphi)}(\xi_1 - x_1, \xi_2 - x_2, x_3)\,d\xi_1 d\xi_2 = \\ = \int\limits_{S(\mathbf{o})} \varphi(\mathbf{o}) G_i^{(j,\varphi)}(\mathbf{o},\mathbf{x})\,dS(\mathbf{o}), \end{gathered} \tag{48}$$

$$L_i^{(V,j)}(\varphi)=\iiint\limits_{V(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}\varphi(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\times$$
$$\times G_i^{(j,\varphi)}(\xi_1-x_1,\xi_2-x_2,\xi_3-x_3)d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3= \quad (49)$$
$$=\int\limits_{V(\mathbf{o})}\varphi(\mathbf{o})G_i^{(j,\varphi)}(\mathbf{o},\mathbf{x})dV(\mathbf{o}).$$

В случае если среда является однородным, изотропным упруго деформируемым твердым телом, то (47) на основе (45) можно записать следующим образом:

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^{(p)}+\sigma_{ij}^{(q)}=L_\sigma^S(p)+L_\sigma^S(q)+L_\sigma^V(t). \quad (50)$$

Рассмотрим теперь случаи, когда нагружаемый объект имеет форму, отличную от полупространства и к нему приложены граничные условия в перемещениях типа (32).

В этом случае, для того чтобы воспользоваться суперпозицией решений кроме приложенных внешних граничных условий (33), которые будем обозначать верхним индексом r:

$$\begin{aligned}\sigma_{nn}\big|_{S_\sigma}&=p^{(r)}(S_\sigma)=p^{(S)}(S_\sigma)+p^{(lm)}\left(S_\sigma^{(lm)}\right),\\ \sigma_{n\tau}\big|_{S_\sigma}&=q^{(r)}(S_\sigma)=q^{(S)}(S_\sigma)+q^{(lm)}\left(S_\sigma^{(lm)}\right),\end{aligned} \quad (51)$$

необходимо также приложить так называемые фиктивные граничные условия [5], которые будем обозначать верхним индексом f:

$$\sigma_{nn}\big|_{S_\sigma}=p^{(f)}(S_\sigma),\ \sigma_{n\tau}\big|_{S_\sigma}=q^{(f)}(S_\sigma) \quad (52)$$

таким образом, чтобы одновременно выполнялись граничные условия (32), (33), (35) на поверхности S среды D:

$$\begin{aligned}\bar{u}_i&=L_u(p^{(r)})+L_u(p^{(f)})+\\ &+L_u(q^{(r)})+L_u(q^{(f)})+L_u^V(t),\\ \bar{\sigma}_{ij}(dS)&=L_{ij}(\bar{u}).\end{aligned} \quad (53)$$

Уравнения (53) позволяют определить неизвестные фиктивные граничные условия $p^{(f)}$ и $q^{(f)}$.

Тогда состояние среды (напряжено-деформированное состояние твердого тела отличной от полупространства формы) в точке $M(x_1,x_2,x_3)\in D$ может быть определено для:

$$\begin{aligned}p&=p^{(r)}+p^{(f)}=p^{(S)}+p^{(lm)}+p^{(f)},\\ q&=q^{(r)}+q^{(f)}=q^{(S)}+q^{(lm)}+q^{(f)},\end{aligned} \quad (54)$$

так что соотношения (46) и (47) примут вид:

$$\begin{aligned}u_i^l&=L_u^{(S,i)}\left(p_l^{(S)}+\sum_m p^{(lm)}+p_l^{(f)}\right)+\\ &+L_u^{(S,i)}\left(q_l^{(S)}+\sum_m q^{(lm)}+q_l^{(f)}\right)+L_u^{(V,i)}(t_l),\end{aligned} \quad (55)$$

$$\sigma_{ij}^l=L_{ij}(u_i^l). \quad (56)$$

В силу линейности интегральных операторов L выражение (55) представимо в следующем виде:

$$\begin{aligned}u_i^l&=L_u^S\left(p_l^{(S)}\right)+L_u^S\left(\sum_m p^{(lm)}\right)+L_u^S\left(p_l^{(f)}\right)+\\ &+L_u^S\left(q_l^{(S)}\right)+L_u^S\left(\sum_m q^{(lm)}\right)+L_u^S\left(q_l^{(f)}\right)+L_u^V(t_l),\end{aligned} \quad (57)$$

или:

$$\begin{aligned}u_i^l&=\int\limits_{S(\mathbf{o})}p_l^{(S)}(\mathbf{o})G_{ij}^{(u,p)}(\mathbf{o},\mathbf{x})dS(\mathbf{o})+\\ &+\sum_m\int\limits_{S(\mathbf{o})}p^{(lm)}(\mathbf{o})G_{ij}^{(u,p)}(\mathbf{o},\mathbf{x})dS(\mathbf{o})+\\ &+\int\limits_{S(\mathbf{o})}p_l^{(f)}(\mathbf{o})G_{ij}^{(u,p)}(\mathbf{o},\mathbf{x})dS(\mathbf{o})+\\ &+\int\limits_{S(\mathbf{o})}q_l^{(S)}(\mathbf{o})G_{ij}^{(u,q)}(\mathbf{o},\mathbf{x})dS(\mathbf{o})+\\ &+\sum_m\int\limits_{S(\mathbf{o})}q^{(lm)}(\mathbf{o})G_{ij}^{(u,q)}(\mathbf{o},\mathbf{x})dS(\mathbf{o})+\\ &+\int\limits_{S(\mathbf{o})}q_l^{(f)}(\mathbf{o})G_{ij}^{(u,q)}(\mathbf{o},\mathbf{x})dS(\mathbf{o})+\\ &+\int\limits_{V(\mathbf{o})}t_l(\mathbf{o})G_{ij}^{(u,t)}(\mathbf{o},\mathbf{x})dV(\mathbf{o}).\end{aligned} \quad (58)$$

Запишем теперь систему разрешающих уравнений в символической форме для l-го тела:

$$\begin{Bmatrix}p_l^{(S)}\\ q_l^{(S)}\\ \bar{u}_l\\ p_{lm}^{(S)}\\ q_{lm}^{(S)}\\ \bar{u}_{lm}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}L_{nn}\left(L_u^{(S)}\right)\\ L_{n\tau}\left(L_u^{(S)}\right)\\ L_u^{(S)}\\ L_{nn}\left(L_u^{(S)}\right)\\ L_{n\tau}\left(L_u^{(S)}\right)\\ L_u^{(S)}\end{bmatrix}\cdot\{p_l\}+\begin{bmatrix}L_{nn}\left(L_u^{(V)}\right)\\ L_{n\tau}\left(L_u^{(V)}\right)\\ L_u^{(V)}\\ L_{nn}\left(L_u^{(V)}\right)\\ L_{n\tau}\left(L_u^{(V)}\right)\\ L_u^{(V)}\end{bmatrix}\cdot\{t\}. \quad (59)$$

С учетом контактного взаимодействия между l-м m-м телами, данная система примет вид:

$$\begin{Bmatrix}p_l^{(S)}\\ q_l^{(S)}\\ \bar{u}_l\\ 0\\ 0\\ f_{lm}^{(\delta)}\\ p_m^{(S)}\\ q_m^{(S)}\\ \bar{u}_m\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}L_{nn}\left(L_u^{(S)}\right)&0\\ L_{n\tau}\left(L_u^{(S)}\right)&0\\ L_u^{(S)}&0\\ L_{nn}\left(L_u^{(S)}\right)&-L_{nn}\left(L_u^{(S)}\right)\\ L_{n\tau}\left(L_u^{(S)}\right)&-L_{n\tau}\left(L_u^{(S)}\right)\\ L_u^{(S)}&-L_u^{(S)}\\ 0&L_{nn}\left(L_u^{(S)}\right)\\ 0&L_{n\tau}\left(L_u^{(S)}\right)\\ 0&L_u^{(S)}\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}p_l\\ p_m\end{Bmatrix}+$$
$$+\begin{bmatrix}L_{nn}\left(L_u^{(V)}\right)&0\\ L_{n\tau}\left(L_u^{(V)}\right)&0\\ L_u^{(S)}&0\\ L_{nn}\left(L_u^{(V)}\right)&-L_{nn}\left(L_u^{(V)}\right)\\ L_{n\tau}\left(L_u^{(v)}\right)&-L_{n\tau}\left(L_u^{(V)}\right)\\ L_u^{(V)}&-L_u^{(V)}\\ 0&L_{nn}\left(L_u^{(V)}\right)\\ 0&L_{n\tau}\left(L_u^{(V)}\right)\\ 0&L_u^{(V)}\end{bmatrix}\cdot\{t\}. \quad (60)$$

Аналогичным способом строится система для более чем двух взаимодействующих тел.

Заключение

Предложенная постановка задачи (1)—(31) для движущейся и взаимодействующей системы *n* сплошных сред, по сути, представляет собой постановку задачи для обобщенной трибофатической системы. Уравнения движения сред, как абсолютно твердых тел, определяют их взаимное положение и характер взаимодействия с учетом конкретных свойств каждой среды, что позволяет определить для нее граничные условия.

Построена система интегральных уравнений (32)—(60) для системы твердых тел, к которым приложены смешанные граничные условия. Граничные условия в напряжениях задаются как нормальными к поверхности тела, так и касательными усилиями. Решение предложенной системы уравнений для поверхностей взаимодействующих тел (т.е. определение граничных условий) соответствует моделированию обратного эффекта в трибофатике, а решение для внутренности тел — прямого эффекта.

Список литературы

1. Сосновский, Л.А. Механика износоусталостного повреждения / Л.А. Сосновский. — Минск: БелГУТ, 2007. — 434 с.
2. Журавков, М.А. Математическое моделирование деформационных процессов в твердых деформируемых средах (на примере задач механики горных пород и массивов): курс лекций / М.А. Журавков. — Минск: БГУ, 2002. — 456 с.
3. Журавков, М.А. Сингулярные решения и интегральные уравнения в механике деформируемых сред / М.А. Журавков, М.Д. Мартыненко. — Минск: БГУ, 1999. — 358 с.
4. Мейз, Дж. Теория и задачи механики сплошных сред / Дж. Мейз. — Минск: Мир, 1974. — 318 с.
5. Бенерджи, П. Метод граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. — Минск: Мир, 1984. — 494 с.

Sherbakov S.S.

Generalized tribo-fatigue problem

Statement of the problem of determining mechanical state of the system of n moving continuums of various properties is offered. This statement includes both the equations of continuums motion and the set of boundary conditions for each of the continuums defined by character of their interaction. The system of the resolving integrated equations is offered for the system of solids. Given system may be applied for determination of normal and tangential tractions on surface of each body, and also a stress-strain state of its interior that allows to investigation of direct and back effects for tribo-fatigue system consisting of more than two elements.

Поступила в редакцию 13.09.2010