

УДК 539.3

И.Н. КУБИШЕВ

Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку

ПРЕДЕЛЬНАЯ НАГРУЗКА ДЛЯ КОМПОЗИТНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ С РАЗНЫМИ УСЛОВИЯМИ ЗАКРЕПЛЕНИЯ

В статье решена задача определения предельной нагрузки для идеально жесткопластической кольцевой композитной пластинки, свободно опертой по внутренней кромке и защемленной по внешней кромке. Пластинка находится под воздействием равномерно распределенной поперечной нагрузки. Показано, что поверхность пластинки разбивается на пять кольцевых зон, в каждой из которых реализуются различные пластические состояния. Определены статические поля моментов и кинематические поля скоростей прогибов, найдены уравнения для неизвестных радиусов, разделяющих различные пластические зоны, а также уравнения для определения опорной реакции и предельной нагрузки

Ключевые слова: предельная нагрузка, композит, пластина, пластический, пределы текучести, опорная реакция, условия пластического течения

Введение

Учет пластических деформаций тел необходим для определения более реального поведения конструкций при различных условиях и их запаса прочности. В теории идеальной пластичности решение задач о несущей способности тел и конструкций существенно изменяет представление о максимально возможной нагрузке в рамках теории упругости. При решении вопросов о предельном равновесии рассматриваются только мгновенное распределение скоростей в момент исчерпания несущей способности, тогда как деформации считаются бесконечно малыми. Полным решением задачи теории идеальной пластичности называется такое решение, которое удовлетворяет условиям равновесия, условию пластичности в пластических областях, где напряжения и скорости деформирования связаны с ассоциированным законом, и граничным условиям, статическим и кинематическим.

Предельное состояние пластин при изгибе изучено в многочисленных работах [1–3, 5]. Пластическое поведение композитных материалов и элементов конструкций из них изучено сравнительно мало. Отметим здесь работы [3–7], где исследована несущая способность круглых и кольцевых пластинок из волокнистого композитного материала при различных условиях крепления, находящихся под воздействием поперечных равномерных и неравномерных нагрузок.

Постановка задачи

Рассмотрим изгиб кольцевой композитной пластины под воздействием осесимметричной нагрузки интенсивностью $q = q(R)$, занимающей область

$A \leq R \leq B$, $-\frac{H}{2} \leq z \leq \frac{H}{2}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ в цилиндрической системе координат R, φ, z , где ось z направлена вниз, а плоскость $R\varphi$ совпадает со срединной поверхностью пластинки. Композит состоит из идеально пластической матрицы с разными пределами текучести при сжатии σ_0^- и растяжении $k\sigma_0^+$, где $0 \leq k \leq 1$, армированный более прочными волокнами, обладающими свойством идеальной пластичности. Пусть S_{0i}^+ и $S_{0i}^- = \mu_i S_{0i}^+$ — предельные усилия для волокон при растяжении и сжатии соответственно; $S_{0i}^+ = F_i^+ \sigma_{0i}^+$, $S_{0i}^- = F_i^- \sigma_{0i}^-$, F_i^+ , F_i^- — площади поперечного сечения волокон; σ_{0i}^+ , σ_{0i}^- — пределы текучести для волокон при растяжении и сжатии; $i=1, 2$ — ортогональные направления, совпадающие с осями главных изгибающих моментов. Матрица армируется волокнами в двух ортогональных направлениях, совпадающих с осями главных изгибающих моментов. Волокна укладываются в каждом направлении в двух слоях, не симметричных относительно срединной плоскости. Их количество различно в каждом направлении. Приближенное условие текучести в плоскости главных изгибающих моментов имеет вид неправильного шестиугольника в зависимости от механических свойств матрицы и волокон.

Оставаясь в рамках технической теории изгиба пластинок, предполагаем выполнение гипотез Кирхгофа. Обозначим отнесенные к единице длины главные изгибающие моменты в радиальном и окружном направлениях, как M_1 и M_2 . Тогда уравнение равновесия будет иметь вид:

$$(RM_1)' - M_2 = - \int_A^R q(R) R dR + TA, \quad (1)$$

где штрих означает производную по R , T — неизвестная опорная реакция на внутреннем контуре (которая определяется в ходе решения), отнесенная к единице длины, A — радиус внутренней окружности, $q(R)$ — осесимметричная поперечная нагрузка. Первый член в правой части равенства выражает перерезывающую силу, приходящуюся на единицу длины цилиндрического сечения радиуса R .

Примем следующие безразмерные величины:

$$r = \frac{R}{H}, a = \frac{A}{H}, b = \frac{B}{H}, P = \frac{q}{4\sigma_0}, m_i = \frac{4M_i}{\sigma_0 H^2}. \quad (2)$$

Тогда (1) преобразуется к виду:

$$(rm_i)' - m_2 = -T^{or} + Ta, T^{or} = \int_a^r P(\eta)\eta d\eta. \quad (3)$$

Скорости изменения кривизны в радиальном и окружном направлениях χ_1 и χ_2 выражены через производные прогиба w :

$$\chi_1 = -w'', \chi_2 = -(w'/r). \quad (4)$$

Уравнение (3) является обыкновенным дифференциальным уравнением с двумя неизвестными m_1 и m_2 . Задача существенно упрощается, если принять кусочно-постоянный шестиугольник пластического течения в плоскости моментов m_1, m_2 . Тогда пластинка разбивается на кольцевые зоны, в каждой из которых условия текучести линейные и интегрирование легко осуществляется.

Предположим, что пластинка подчиняется условию текучести, и в плоскости m_1, m_2 представляет собой неправильный шестиугольник $ABCDEF$ (рисунок 1). На окружности, разделяющей кольцевые области различных решений, должны быть непрерывны в силу условий равновесия изгибающий момент m_1 и срезающее усилие, изгибающий же момент m_2 может быть разрывным.

Для сторон AB и AF шестиугольника имеем [6]:

$$m_i = m_{0i}^+ = c_0 + c_{1i}^+ s_{0i}^+ + c_{2i}^+ (s_{0i}^+)^2, \quad (5)$$

для сторон CD и DE :

$$m_i = -m_{0i}^- = -[c_0 + c_{1i}^- s_{0i}^- + c_{2i}^- (s_{0i}^-)^2]. \quad (6)$$

Здесь m_{0i}^+ и m_{0i}^- — предельные значения положительных и отрицательных изгибающих моментов. Для сторон EF и BC имеем:

$$m_2 = \alpha m_1 + b_1, m_2 = \alpha m_1 + b_2 \quad (7)$$

соответственно. Здесь приняты следующие обозначения для коэффициентов, которые являются положительными величинами:

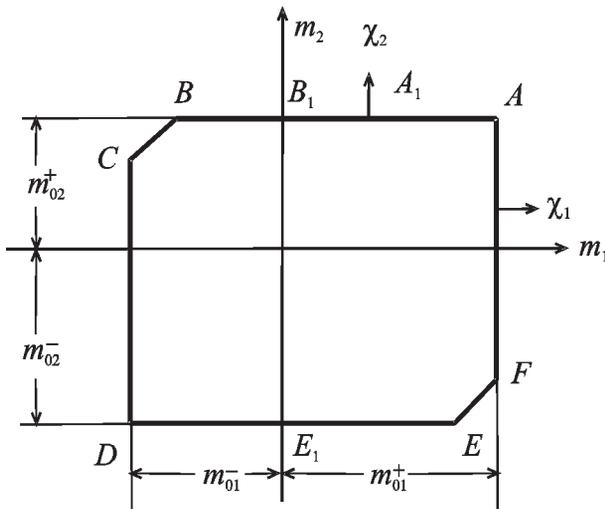


Рисунок 1 — Пластические течения. $ABCDEF$

$$c_0 = \frac{2k}{k+1}, c_{1i}^+ = 4 \left[d_i'' - \mu_i d_i'' + \frac{(1-k)(1-\mu_i)}{2(1+k)} \right],$$

$$c_{2i}^- = -\frac{2(1-\mu_i)^2}{1+k}, c_{1i}^- = 4 \left[d_i' - \mu_i d_i' - \frac{(1-k)(1-\mu_i)}{2(1+k)} \right],$$

$$\alpha = \frac{(1-k)(1-\mu_1)s_{01}^+ + k}{(1-k)(1-\mu_2)s_{02}^+ + k}, i = 1, 2;$$

$$b_1 = a_2 - \alpha a_1, b_2 = a_4 - \alpha a_3, s_{0i}^+ = \frac{S_{0i}^+}{\sigma_0 H^2},$$

$$a_1 = \frac{1}{1-k^2} \{k(1-k) + (1+k^2)(1-\mu_1)s_{01}^+ - 2k(1-\mu_2)s_{02}^+\} + 4(d_1'' - \mu_1 d_1'')s_{01}^+,$$

$$a_2 = \frac{1}{1-k^2} \{k(k-1) - (1+k^2)(1-\mu_2)s_{02}^+ + 2k(1-\mu_1)s_{01}^+\} + 4(d_2' - \mu_2 d_2')s_{02}^+,$$

$$a_3 = -a_1 + 4(1-\mu_1)(d_1' + d_1'')s_{01}^+,$$

$$a_4 = -a_2 + 4(1-\mu_2)(d_2' + d_2'')s_{02}^+,$$

где d_i' и d_i'' — безразмерные расстояния (отнесенные к толщине H) от срединной плоскости до верхних и нижних слоев, армированных волокнами.

Определение поля статических моментов

Пусть пластинка свободно оперта по внутренней кромке и закреплена по внешней кромке.

Пластическое состояние пластинки определяется стороной E_1E шестиугольника текучести около внутренней кромки, на которой $m_2 = -m_{20}^-$. Для граничных условий $m_1=0$ при $r=a$ и $m_1 = -m_{01}^-$, при $r=b$, решение задачи можно искать для состояний E_1E - EF - FA - AB - BC , так как в этом случае возможно определение статического поля, удовлетворяющего соответствующим условиям непрерывности. Пусть $p=const$. Тогда из (3) получим:

$$(rm_1)' - m_2 = Ta - 2p(r^2 - a^2), a \leq r \leq b. \quad (8)$$

Граничные условия для уравнения (8) следующие: вдоль свободно опертого края $m_1=0, w=0$; вдоль заделанного края $w=0, dw/dr=0$ или $m_1 = -m_{01}^-$.

Уравнение (8) является обыкновенным дифференциальным уравнением с двумя неизвестными m_1 и m_2 . Второе уравнение, необходимое для определения этих неизвестных, находится из условия пластичности. На участке $a \leq r \leq r_1$ приемлемым пластическим режимом будет режим E_1E , согласно которому $m_2 = -m_{20}^-$. Подставляя это в (8) и интегрируя полученное уравнение, находим:

$$rm_1 = -m_{20}^- r + Tar - \frac{p}{6}(r^3 - 3a^2 r) + C,$$

где C — постоянная интегрирования. Определяя ее из условия $m_1(a)=0$, находим:

$$rm_1 = (m_{10}^+ - m_{20}^+ - m_{20}^-)(r-a) + \frac{p}{6}(3\rho_3^2 r - 3\rho_3^2 a - r^3 + a^3), \quad (9)$$

$$m_2 = -m_{20}^-, a \leq r \leq \rho_1.$$

Определяя $m_1(\rho_1)$ из (9) и подставляя в формулу $m_2 = \alpha m_1 + b_1$, получим:

$$m_{20}^- \left(\alpha - 1 - \alpha \frac{a}{\rho_1} \right) = b_1 + Ta\alpha \frac{\rho_1 - a}{\rho_1} - \frac{\alpha p}{6\rho_1} (\rho_1^3 - 3a^2\rho_1 + 2a^3). \quad (10)$$

В области $\rho_1 \leq r \leq \rho_2$ имеем состояние *EF*, при котором $m_2 = \alpha m_1 + b_1$; соответствующее уравнение равновесия имеет вид:

$$rm_1' + (1 - \alpha)m_1 = (Ta + b_1) - \frac{p}{2}(r^2 - a^2).$$

Решая это уравнение и определяя постоянную интегрирования из условия непрерывности $m_1(\rho_2) = m_{10}^+$, находим:

$$m_1 = m_{10}^+ \left(\frac{r}{\rho_2} \right)^{\alpha-1} + \left[\frac{p}{2}(\rho_2^2 - a^2) + m_{10}^+ - m_{20}^+ + b_1 \right] \frac{1}{1-\alpha} \left[1 - \left(\frac{r}{\rho_2} \right)^{\alpha-1} \right] + \frac{p}{2} \left[\frac{1}{3-\alpha} (\rho_2^{3-\alpha} r^{\alpha-1} - r^2) - \frac{a^2}{1-\alpha} \left(\left(\frac{r}{\rho_2} \right)^{\alpha-1} - 1 \right) \right], \quad (11)$$

$$m_2 = \alpha m_1 + b_1, \quad \rho_1 \leq r \leq \rho_2.$$

Пластическое состояние в области $\rho_2 \leq r \leq \rho_3$ пластинки соответствует стороне *FA*, для скоростей деформации, которой имеем:

$$\chi_1 = -w'' \geq 0, \quad \chi_2 = -\frac{1}{r}w' = 0.$$

Решением этих уравнений будет $w = w_0 = const$, т.е. кольцевая часть пластины $\rho_2 \leq r \leq \rho_3$ перемещается в этой области как абсолютно жесткое тело.

Окружности $r = \rho_2$ и $r = \rho_3$ являются шарнирными окружностями, на которых скорость прогиба непрерывен, но ее первая производная претерпевает разрыв, а радиальный изгибающий момент имеет максимальное значение. В области $\rho_2 \leq r \leq \rho_3$ статическое поле моментов будет:

$$m_1 = m_{10}^+, \quad m_2 = m_{20}^+ - \frac{p}{2}(\rho_3^2 - r^2), \quad \rho_2 \leq r \leq \rho_3.$$

Поскольку:

$$m_2(\rho_3) = m_{20}^+, \quad m_2(\rho_2) = m_{20}^+ - \frac{p}{2}(\rho_3^2 - \rho_2^2) < m_{20}^+,$$

то условие пластичности в жесткой области не превышает, наоборот, вдоль режима *FA* моментное состояние пластинки находится внутри шестиугольника текучести.

При $\rho_3 \leq r \leq \rho_4$ имеем состояние *AB*, при котором $m_2 = -m_{20}^-$, и из уравнений равновесия (9) получаем:

$$r m_1 = (m_{20}^+ + Ta)r - \frac{p}{6}(r^3 - 3a^2r + 2a^3) + C.$$

Здесь произвольную постоянную *C* определяем из условия $m_1(\rho_3) = m_{10}^+$, тогда:

$$r m_1 = m_{10}^+ r + \frac{p}{6}(3\rho_3^2 r - 2\rho_3^3 - r^3), \quad (12)$$

$$m_2 = m_{20}^+, \quad \rho_3 \leq r \leq \rho_4.$$

В области $\rho_4 \leq r \leq b$ имеем состояние *BC*, при котором $m_2 = \alpha m_1 + b_2$. При этом из уравнения (8) и из условия $m_1(b) = -m_{10}^-$ получаем:

$$m_{20}^+ = \alpha m_1(\rho_4) + b_2, \quad m_2(b) = -\alpha m_{10}^- + b_2,$$

$$m_1(r) = -m_{10}^- \left(\frac{r}{b} \right)^{\alpha-1} + (m_{10}^+ - m_{20}^+ + b_2) \frac{1}{1-\alpha} \left[1 - \left(\frac{r}{b} \right)^{\alpha-1} \right] + \frac{p}{2}(\rho_3^2 - a^2) \frac{1}{1-\alpha} \left[1 - \left(\frac{r}{b} \right)^{\alpha-1} \right] + \frac{p}{2} \left\{ \frac{b^{3-\alpha} r^{\alpha-1}}{3-\alpha} - \frac{r^2}{3-\alpha} + \frac{a^2}{1-\alpha} \left[1 - \left(\frac{r}{b} \right)^{\alpha-1} \right] \right\},$$

$$m_2 = \alpha m_1 + b_2, \quad \rho_4 \leq r \leq b.$$

Теперь исследуем возможность продолжения статического поля на область $\rho_2 \leq r \leq \rho_3$. Принимая, что тангенциальный момент m_2 и перерезывающая сила являются непрерывными функциями, из уравнения равновесия получаем, что производная dm_1/dr не может иметь скачков в области пластины, т.е.:

$$\frac{dm_1}{dr} = 0 \quad \text{при } r = \rho_2 \text{ и } r = \rho_3, \quad (13)$$

т.к. $m_1 = m_{10}^+$ на этих радиусах. Но когда мы допустим возможность скачкообразного изменения момента m_2 , то из уравнения равновесия (8) получаем:

$$r \left[\frac{dm_1}{dr} \right] = [m_2], \quad (14)$$

где:

$$\left[\frac{dm_1}{dr} \right] = \frac{dm_1^+}{dr} - \frac{dm_1^-}{dr}, \quad [m_2] = m_2^+ - m_2^-$$

означают скачки соответствующих величин в рассматриваемой точке.

Так как $[m_2]$ на окружностях $r = \rho_2$ и $r = \rho_3$ является положительным, а $[dm_1/dr]$ на них может быть только отрицательным, то выполнение условия (14) невозможно. Из этого заключаем, что поле моментов m_2 должно быть непрерывно в области пластинки, т.е. $[m_2] = [dm_1/dr] = 0$.

Из условия (13), с использованием производной формулы (11) при $r = \rho_2$ и производной формулы (13) при $r = \rho_3$, получим:

$$Ta = \frac{p}{2}(\rho_3^2 - a^2) + m_{10}^+ - m_{20}^+, \quad (15)$$

$$m_{20}^+ - (\alpha m_{10}^+ + b_1) = \frac{p}{2}(\rho_3^2 - \rho_2^2). \quad (16)$$

Формула (15) определяет неизвестную реакцию *Ta*, а (16) определяет предельную нагрузку. В работе [6] для предельной нагрузки получена формула:

$$\varphi = \frac{pb^2}{m_0} = \frac{2}{x_3^2 - x_2^2},$$

где $x_i = \rho_i/b$, $i=2, 3$. Как видно, армирующие волокна увеличивают предельную нагрузку пластины на $1 - \frac{\alpha m_{10}^+ + b_1}{m_{20}^+}$ раз, поскольку $\alpha m_{10}^+ + b_1 < 0$.

Графики зависимости предельной нагрузки pb^2 от s_0 при конкретных значениях k , μ и γ , где верхние три прямые относятся к случаю $\gamma=0,5$, а нижние три прямые $\gamma=0,25$, представлены на рисунках 2–4. На ри-

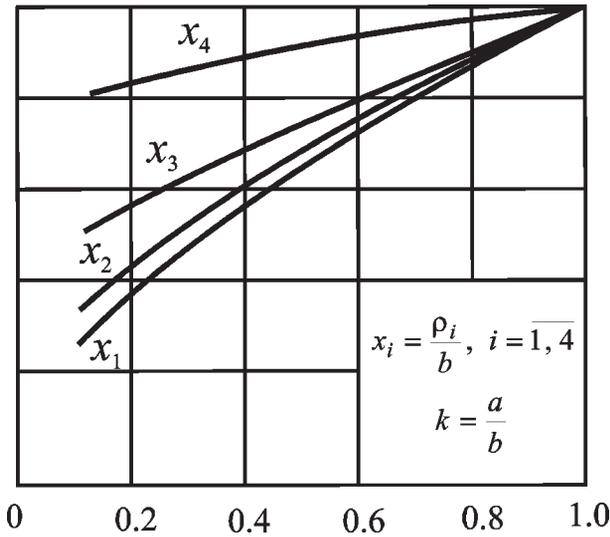


Рисунок 2 — Зависимость радиусов $x_i=r_i/b$, $i = \overline{1, 4}$ от отношения $k=a/b$

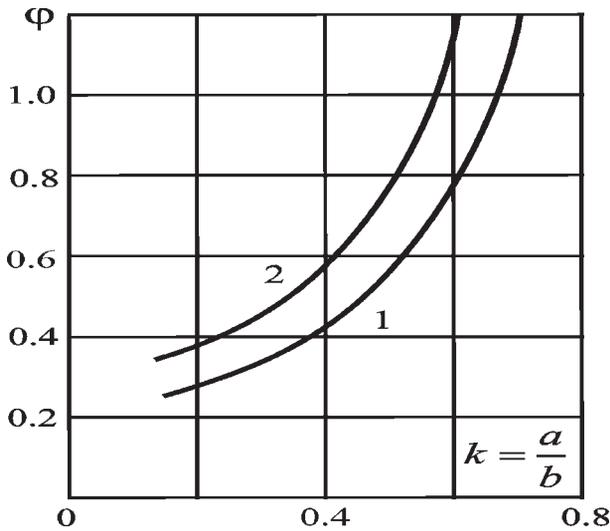


Рисунок 3 — Зависимости предельной нагрузки от отношения $k=a/b$ для композитной (2) и обычной пластинок

сунке 2 приведены графики зависимости безразмерных радиусов $x_i=r_i/b$, $i = \overline{1, 4}$ от отношения $k=a/b$. Рисунок 3 представляет зависимости предельной нагрузки от $k=a/b$ для композитной (кривая 2) и обычной (кривая 1) пластинок.

Определение кинематически возможных полей скоростей прогибов

Используя ассоциированный закон пластического течения в главных направлениях:

$$d\xi_i = \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial m_i} \quad (i = 1, 2; p = 1, 2, \dots, 6),$$

где в данном случае уравнение поверхности текучести $f_p=const$ ($p=1, 2, \dots, 6$) представляет рассмотренный выше шестиугольник пластического течения и выражения (4) для скоростей изменения кривизны, мы получаем обыкновенные линейные дифференциальные уравнения для скорости прогиба для пластических состояний, соответствующих различным сторонам шестиугольника.

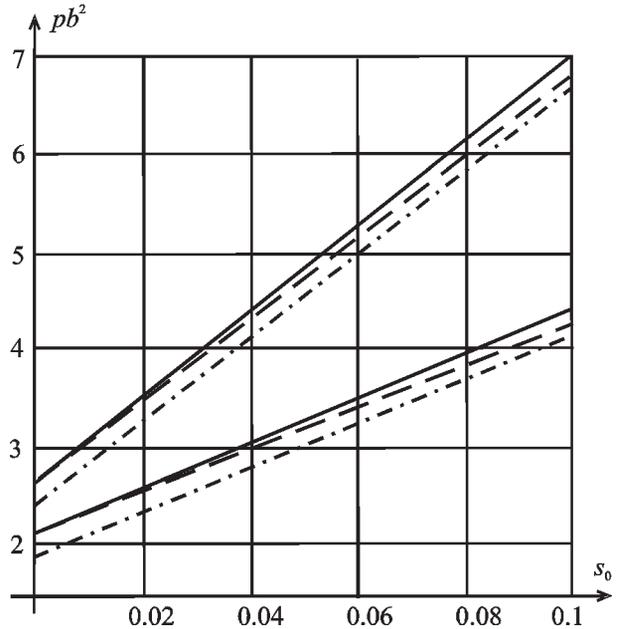


Рисунок 4 — Зависимость предельной нагрузки pb^2 от s_0 : — $k=1, \mu=1$; --- $k=0,8, \mu=1$; - · - · - $k=1, \mu=0,8$

Для пластического состояния E_1F имеем $\chi_1=-w''=0$. Решением этого уравнения, удовлетворяющего краевому условию $w(a)=0$, является:

$$w = C(r - a), \quad a \leq r \leq \rho_1, \quad (17)$$

где C — произвольная постоянная.

Для пластического состояния EF имеем $m_2=\alpha m_1+b_1$, вектор нормали этой прямой $\{\alpha, -1\}$ должен быть параллельным вектору скоростей пластического течения $\{\chi_1, \chi_2\}$, т.е. $\chi_1:\alpha=\chi_2:(-1)$, или:

$$w'' + \frac{\alpha}{r} w' = 0. \quad (18)$$

Для пластического состояния FA скорость кривизны $\chi_2 = -\frac{1}{r} w' = 0$, т.е. $w=w_0=const$ при $\rho_2 \leq r \leq \rho_3$.

Решением уравнения (18), удовлетворяющим условию непрерывности при $r=\rho_1$ и $r=\rho_2$, является:

$$w(r) = C(\rho_1 - a) + [w_0 - C(\rho_1 - a)] \frac{r^{1-\alpha} - \rho_1^{1-\alpha}}{\rho_2^{1-\alpha} - \rho_1^{1-\alpha}}, \quad \rho_1 \leq r \leq \rho_2.$$

Здесь C и w_0 неизвестные постоянные. Постоянная C определяется из условия непрерывности первой производной w' в точке $r=\rho_1$. Действуя таким же образом, находим:

$$w(r) = w_0 + C_1(r - \rho_3), \quad \rho_3 \leq r \leq \rho_4, \quad (19)$$

$$w(r) = [w_0 + c_1(\rho_4 - \rho_3)] \times \left(1 - \frac{r^{1-\alpha} - \rho_4^{1-\alpha}}{b^{1-\alpha} - \rho_4^{1-\alpha}} \right), \quad \rho_4 \leq r \leq b. \quad (20)$$

В точке $r=\rho_4$ должна быть непрерывна и производная функция w' , из которой определяем C_1 :

$$C_1 = \frac{w_0(1-\alpha)\rho_4^{1-\alpha}}{b^{1-\alpha} - \rho_4^{1-\alpha} + \rho_4^{-\alpha}(\rho_4 - \rho_3)(1-\alpha)}.$$

Тогда формулы (19) и (20) принимают окончательный вид:

$$w = w_0 - \frac{w_0(1-\alpha)\rho_4^{-\alpha}(r - \rho_3)}{b^{1-\alpha} - \rho_4^{1-\alpha} + \rho_4^{-\alpha}(\rho_4 - \rho_3)(1-\alpha)},$$

$$\rho_3 \leq r \leq \rho_4,$$

$$w = w_0 \frac{b^{1-\alpha} - r^{1-\alpha}}{b^{1-\alpha} - \rho_4^{1-\alpha} + \rho_4^{-\alpha}(\rho_4 - \rho_3)(1-\alpha)},$$

$$\rho_4 \leq r \leq b.$$

Список литературы

1. Гопкинс, Г. Динамика пластической круглой пластинки / Г. Гопкинс, В. Прагер // Механика. — 1955. — № 3. — С. 112—122.
2. Григорьев, А.С. О несущей способности кольцевых пластин / А.С. Григорьев // Инж. сб. — 1953. — Т. XVI.
3. Дурукаленко, В.В. К расчету предела пластичности композитных материалов / В.В. Дурукаленко, В.Л. Минаев // ПММ. — 1970. — 14, № 5.
4. Мовсумов, Э.А. Условие текучести для круглых цилиндрических оболочек из волокнистого композита / Э.А. Мовсумов, И.Н. Кубышев // Материалы XIII Междунар. конф., Баку, 2007. — 112 с.
5. Мовсумов, Э.А. Несущая способность пластинок из волокнистого композита / Э.А. Мовсумов, Ф.Г. Шамиев // Механика композитных материалов. — 2005. — Т. 41, № 2. — С. 177—192.
6. Mroz, Z. Simplified yield conditions for fibre-reinforced plates and shells / Z. Mroz, F.G. Shamiev // Arch. Inz. Lad. — 1979. — Vol. 25, № 3. — pp. 463—476.
7. Salmanov, O.Sh. The load-carrying capacity of statically indeterminate annular plates made of composite / O.Sh. Salmanov, I.N. Kubishev // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan. — 2005. — Vol. 23. — pp. 177—182.

Kubishev I.N.

Load limit for EB in composite ring plates with different conditions of consolidation

In article the problem of determining the carrying capacity for perfect ring composite blades, zestkoplasticesk self-supporting arm chewed up by internal and external edges and under the influence of lateral loads evenly distributed. It is shown that the surface of the disc is divided into five doughnut zones, each of which implements a variety of plastic. Sets a static field and kinematic Paul velocity deflections, found the equation for unknown radii between various plastic zone, as well as the equation to determine the basic reaction and load limits.

Поступила в редакцию 02.02.2010