МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 621.039.54+539.376

И.С. КУЛИКОВ, д-р физ.-мат. наук, С.А. КЛУС
Объединенный институт энергетических и ядерных исследований — Сосны НАН Беларуси, Минск

МЕТОД РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТЕЛ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ НАГРЕВЕ И ОБЛУЧЕНИИ

Рассмотрены основные типы деформаций, возникающих в телах цилиндрической геометрии под действием терморадиационных нагрузок. Выведены основные соотношения для оценки напряженно-деформированного состояния полого короткого цилиндра при неравномерном нагреве и облучении с учетом деформаций ползучести и пластичности. Предложена математическая модель для численного решения такого типа задач

Ключевые слова: *типы деформаций, неравномерный нагрев, пластичность, ползучесть, облучение, напряженно-деформированное состояние, математическая модель*

В работе предлагается исследование напряженно-деформированного состояния тел цилиндрической геометрии на примере полого короткого цилиндра при неравномерном нагреве, ползучести и облучении с учетом пластических деформаций.

Задачи такого рода рассматривали Лихачев Ю.И., Попов В.В., Тутнов А.А., Ткачев В.В., однако, большинство этих работ связаны с определением НДС для более частных случаев — бесконечно длинных тел. При этом зачастую не рассматривались такие важные компоненты, как необратимые механические деформации (ползучесть и пластичность), которые возникают в конструкции при воздействии на нее поля высоких температур и нейтронного облучения. Авторами предлагается, используя численные методы, сделать расчеты такого типа задач, но в плоскости двух координат — r, z, что к настоящему моменту еще не изучено.

Для этого был рассмотрен полый короткий цилиндр внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2, жестко закрепленный на концах, под действием внутренней P_1 и внешней P_2 распределенной нагрузки (рисунок 1), поля высоких температур, нейтронного облучения с учетом пластичности, тепловой и радиационной ползучести. Для описания пластичности и ползучести применим теорию течения — наиболее часто используемой в практике.

Воспользуемся следующими предположениями теории пластического течения для терморадиационной постановки задачи [1, 2].

1. Приращение полной деформации представляется в виде суммы:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{e} + d\varepsilon_{ij}^{p} + d\varepsilon_{ij}^{C} + d\varepsilon_{ij}^{T} + d\varepsilon_{ij}^{S}, \qquad (1)$$

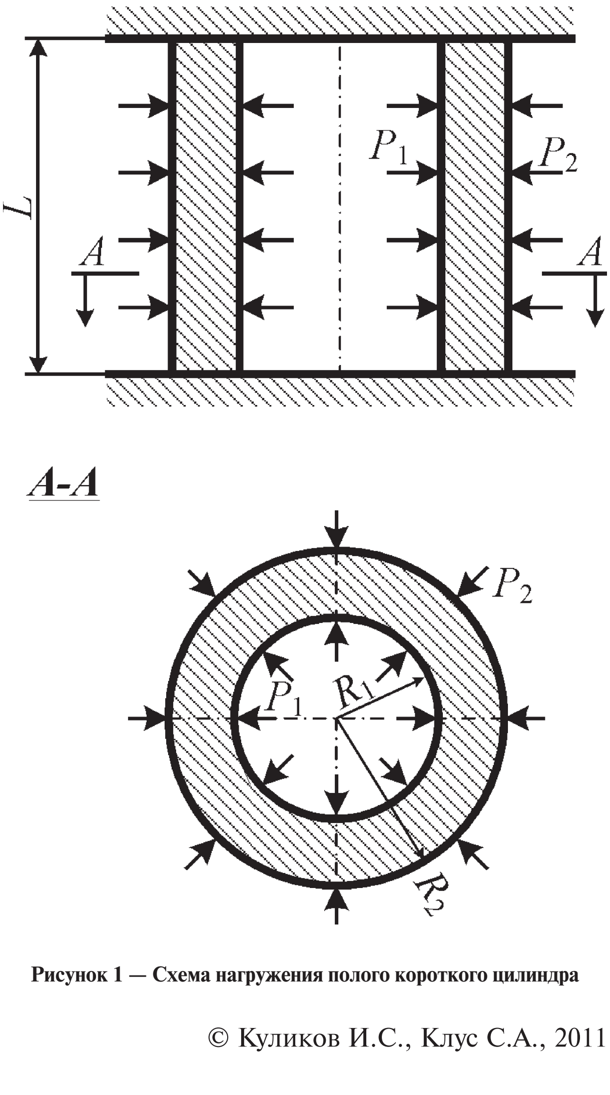

Рисунок 1 — Схема нагружения полого короткого цилиндра

где ε_{ij} — полная деформация, ε_{ij}^e — упругая деформация, ε_{ij}^p — мгновенная пластическая деформация, ε_{ij}^C — суммарная деформация тепловой и радиационной ползучести, ε_{ij}^T — деформации, вызванные термическим расширением, ε_{ij}^S — деформации, вызванные радиационным распуханием, i, j=1, 2, 3.

Деформации, вызванные объемными изменениями, можно представить в следующем виде:

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha T(r;z),\ \varepsilon_{ij}^S = 1/3 \cdot S(T(r;z),\Phi), \tag{2}$$

где $T(r; z)$ и $S(T(r; z), \Phi)$ — заданные функции термического расширения и радиационного распухания соответственно, $\Phi=\phi t$ — интегральный нейтронный поток, ф — плотность нейтронного потока, t — время облучения, α — коэффициент линейного расширения, который в общем случае может зависеть от T.

Если температура T_j на внутренней поверхности распределена равномерно, а температура на внешней поверхности равна нулю, то температурное поле $T(r; z)$ в произвольной точке, записывается следующим соотношением [3]:

$$T(r;z) = \frac{T_j}{\ln(R_2/R_1)}\big(\ln(R_2) - \ln(r)\big). \tag{3}$$

Для данного прочностного расчета весьма существенен учет зависимости неравномерно распределенного радиационного распухания от температуры. Рядом авторов [4, 5] на основе обработки экспериментальных результатов предложены эмпирические зависимости для определения радиационного распухания конструкционных сталей:

$$S(T(r;z),\Phi) = A_0 \cdot (\Phi t)^m \cdot 10^{\left(\frac{a}{T(r;z)} - \frac{b}{T(r;z)^2}\right)}, \tag{4}$$

где A_0, m, a, b — некоторые константы, определяемые экспериментально.

2. Приращения пластической деформации пропорциональны составляющим девиатора напряжений:

$$d\varepsilon_{ij}^p = S_{ij} d\psi, \tag{5}$$

где скалярная величина $d\psi$, характеризующая пластическое деформирование, одинакова для всех направлений, $S_{ij}=\sigma_{ij}-\sigma$ — компоненты девиатора напряжений.

3. Приращение деформаций ползучести определяются, как и в теории течения, с той лишь разницей, что используется зависимость $\dot{\varepsilon}_u^C = f\left(\sigma_u, T, \varepsilon_u^C, \Phi t\right)$ для скорости ползучести:

$$d\varepsilon_{ij}^C = \dot{\varepsilon}_{ij}^C dt = \frac{3}{2}\frac{S_{ij}}{\sigma_u} f\left(\sigma_u, T, \varepsilon_u^C, \Phi t\right) dt. \tag{6}$$

Таким образом, можно заключить, что получены все необходимые компоненты, входящие в уравнение (1), и можно записать необходимые уравнения для определения напряженно-деформированного состояния полого короткого цилиндра.

Уравнение равновесия (уравнение Навье) для полого короткого цилиндра в цилиндрической системе координат запишем следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial \rho} + \dfrac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\rho} + \dfrac{\partial \sigma_{13}}{\partial \xi} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho}(\rho \sigma_{13}) + \rho \dfrac{\partial \sigma_{33}}{\partial \xi} = 0, \end{cases} \tag{7}$$

здесь индекс 1 соответствует направлению r, 2 — φ, 3 — z.

Следует отметить, что в цилиндрической системе координат (r, φ, z) поле напряжений и деформаций имеет отличные от нуля компоненты σ_{11}, σ_{22}, σ_{33}, $\sigma_{13}=\sigma_{31}$, ε_{11}, ε_{22}, ε_{33}, $\varepsilon_{13}=\varepsilon_{31}$. Кроме этого, были введены относительные координаты $\xi=z/R_1$ и $\rho=r/R_1$, изменяющихся в пределах $0\le\xi\le L/R_1$ и $1\le\rho\le R_2/R_1$.

Соотношения между составляющими тензора деформаций и вектора перемещений имеют следующий вид (соотношения Коши):

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{11} = \frac{1}{R_1}\frac{\partial u}{\partial \rho};\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{R_1}\frac{u}{\rho}; \\ &\varepsilon_{33} = \frac{1}{R_1}\frac{\partial w}{\partial \xi};\ \varepsilon_{13} = \frac{1}{R_1}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \rho}\right), \end{aligned} \tag{8}$$

где u и w — компоненты вектора перемещений в радиальном и осевом направлении соответственно.

Физические уравнения (формулы обобщенного закона Гука) в предположении изотропности материала и принципа аддитивности деформаций с учетом предположения (1) примут следующий вид:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{1}{E}\cdot\big(\sigma_{11} - \nu\cdot(\sigma_{22}+\sigma_{33})\big) + \alpha\varepsilon^T + \varepsilon^S + \varepsilon_{11}^C + \varepsilon_{11}^P, \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{1}{E}\cdot\big(\sigma_{22} - \nu\cdot(\sigma_{11}+\sigma_{33})\big) + \alpha\varepsilon^T + \varepsilon^S + \varepsilon_{22}^C + \varepsilon_{22}^P, \\ \varepsilon_{33} = \dfrac{1}{E}\cdot\big(\sigma_{33} - \nu\cdot(\sigma_{11}+\sigma_{22})\big) + \alpha\varepsilon^T + \varepsilon^S + \varepsilon_{33}^C + \varepsilon_{33}^P, \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \dfrac{1}{G}\cdot\sigma_{13} + \varepsilon_{13}^C + \varepsilon_{13}^P, \end{cases} \tag{9}$$

где E — продольный модуль упругости; G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона.

Для данной модели нагружения примем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} &\sigma_{11} = -P_1,\ \sigma_{13} = \sigma_{31} = 0 \text{ при } \rho = 1, \\ &\sigma_{11} = -P_2,\ \sigma_{13} = \sigma_{31} = 0 \text{ при } \rho = R_2/R_1, \\ &u = w = 0 \text{ при } \xi = 0 \text{ и } \xi = L/R_1. \end{aligned} \tag{10}$$

Решение задачи будем искать в перемещениях, т.е. выразим все искомые величины через перемещения u и w, тогда, согласно (8, 9) и с учетом условия несжимаемости материала, перепишем соотношение (7) в следующем виде:

$$\begin{cases} (1-\nu)\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho} - \dfrac{u}{\rho}\right) + \dfrac{1-2\nu}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \\ + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \xi} = R_2 \cdot \left\{(1+\nu)\dfrac{\partial \varepsilon^{ST}}{\partial \rho} + \right. \\ \left. +(1-2\nu)\left(\dfrac{\partial \varepsilon_{11}^{CP}}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho}\left(\varepsilon_{11}^{CP} - \varepsilon_{22}^{CP}\right) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \varepsilon_{13}^{CP}}{\partial \xi}\right)\right\}, \\ \rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \xi} + \dfrac{\partial u}{\partial \xi} + (1-2\nu)\dfrac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \\ +2\rho(1-\nu)\dfrac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + (1-2\nu)\dfrac{\partial w}{\partial \rho} = \\ = R_2 \cdot \left\{2\rho(1+\nu)\dfrac{\partial \varepsilon^{ST}}{\partial \xi} + \right. \\ \left. +(1-2\nu)\left(2\rho\dfrac{\partial \varepsilon_{33}^{CP}}{\partial \xi} + \rho\dfrac{\partial \varepsilon_{13}^{CP}}{\partial \rho} + \varepsilon_{13}^{CP}\right)\right\}, \end{cases} \tag{11}$$

где $\varepsilon_{ij}^{CP} = \varepsilon_{ij}^C + \varepsilon_{ij}^P$, $\varepsilon_{13}^{CP} = \varepsilon_{13}^C + \varepsilon_{13}^P$, $\varepsilon^{TS} = \alpha\varepsilon^T + \varepsilon^S$.

Выражение (11) представляет систему нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных. Отметим, что в отличие от систем линейных дифференциальных уравнений для нелинейных систем неизвестны прямые методы решения. Лишь в отдельных случаях систему можно решить непосредственно. Авторами предлагается решение данной системы итерационными методами или методами конечных разностей, представив результат в виде n-го числа решений, расположенных в узлах сетки, построенной на сечении цилиндра в координатах ρ и ξ (рисунок 2).

Перепишем выражения (11), представив частные производные в виде разностных схем:

$$\left\{\begin{aligned}
&(1-\nu)\left(\frac{u_{i+1}^{j}-2u_{i}^{j}+u_{i-1}^{j}}{\Delta\rho^{2}}+\frac{1}{\rho_i}\frac{u_{i+1}^{j}-u_{i-1}^{j}}{2\Delta\rho}-\frac{u_i^j}{\rho_i}\right)+\\
&+\frac{1-2\nu}{2}\frac{u_i^{j+1}-2u_i^j+u_i^{j-1}}{\Delta\xi^2}+\\
&+\frac{1}{2}\frac{w_{i+1}^{j+1}-w_{i+1}^{j-1}-w_{i-1}^{j+1}+w_{i-1}^{j-1}}{4\Delta\rho\Delta\xi}=\\
&=R_2\cdot\left\{(1+\nu)\frac{\varepsilon_{i+1,j}^{ST}-\varepsilon_{i-1,j}^{ST}}{2\Delta\rho}+\right.\\
&+(1-2\nu)\left(\frac{\varepsilon_{11i+1,j}^{CP}-\varepsilon_{11i-1,j}^{CP}}{2\Delta\rho}+\right.\\
&\left.\left.+\frac{1}{\rho}\left(\varepsilon_{11i,j}^{CP}-\varepsilon_{22i,j}^{CP}\right)+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_{13i,j+1}^{CP}-\varepsilon_{13i,j-1}^{CP}}{2\Delta\varsigma}\right)\right\},\\
&\rho_i\frac{u_{i+1}^{j+1}-u_{i+1}^{j-1}-u_{i-1}^{j+1}+u_{i-1}^{j-1}}{4\Delta\rho\Delta\xi}+\frac{u_i^{j+1}-u_i^{j-1}}{2\Delta\xi}+\\
&+\rho_i(1-2\nu)\frac{w_{i+1}^j-2w_i^j+w_{i-1}^j}{\Delta\rho^2}+\\
&+2\rho_i(1-\nu)\frac{w_i^{j+1}-2w_i^j+w_i^{j-1}}{\Delta\xi^2}+\\
&+(1-2\nu)\frac{w_{i+1}^j-w_{i-1}^j}{2\Delta\rho}=\\
&=R_2\cdot\left\{2\rho_i(1+\nu)\frac{\varepsilon_{i,j+1}^{ST}-\varepsilon_{i,j-1}^{ST}}{2\Delta\xi}+(1-2\nu)\times\right.\\
&\left.\times\left(2\rho_i\frac{\varepsilon_{33i,j+1}^{CP}-\varepsilon_{33i,j-1}^{CP}}{2\Delta\varsigma}+\rho\frac{\varepsilon_{13i+1,j}^{CP}-\varepsilon_{13i-1,j}^{CP}}{2\Delta\rho}+\varepsilon_{13i,j}^{CP}\right)\right\}.
\end{aligned}\right. \tag{12}$$

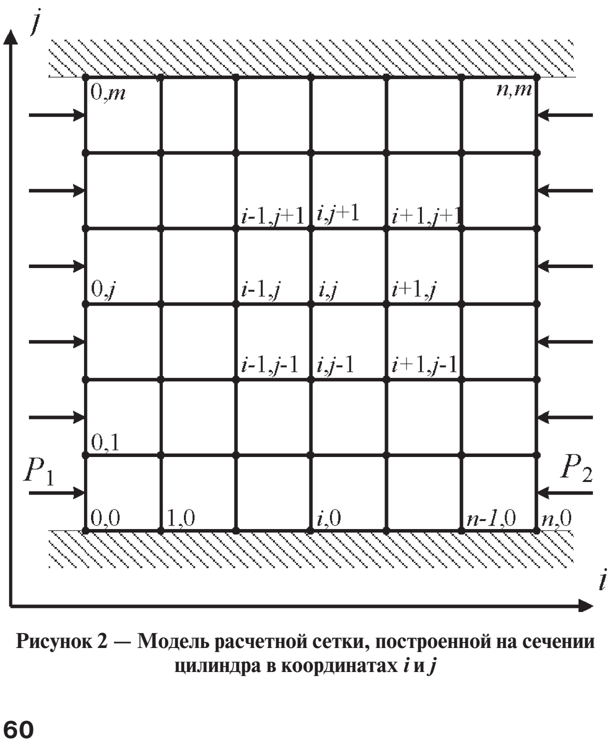

Рисунок 2 — Модель расчетной сетки, построенной на сечении цилиндра в координатах *i* и *j*

В итоге получили систему линейных обыкновенных уравнений, в которой неизвестными выступают искомые величины u_i^j, w_i^j. Для удобства решения представим выражение (12) в следующем виде:

$$\left\{\begin{aligned}
&A_i u_i^j+A1_i u_{i+1}^j+A2_i u_{i-1}^j+A3u_i^{j+1}+A3u_i^{j-1}+\\
&+A4w_{i+1}^{j+1}+A4w_{i-1}^{j-1}+(-A4)w_{i+1}^{j-1}+(-A4)w_{i-1}^{j+1}=\\
&=R_2\cdot\left\{(1+\nu)\frac{\varepsilon_{i+1,j}^{ST}-\varepsilon_{i-1,j}^{ST}}{2\Delta\rho}+\right.\\
&+(1-2\nu)\left(\frac{\varepsilon_{11i+1,j}^{CP}-\varepsilon_{11i-1,j}^{CP}}{2\Delta\rho}+\frac{1}{\rho}\left(\varepsilon_{11i,j}^{CP}-\varepsilon_{22i,j}^{CP}\right)+\right.\\
&\left.\left.+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_{13i,j+1}^{CP}-\varepsilon_{13i,j-1}^{CP}}{2\Delta\varsigma}\right)\right\},\\
&Bu_i^{j+1}+(-B)u_i^{j+1}+B1_i u_{i+1}^{j+1}+B1_i u_{i-1}^{j-1}+\\
&+(-B1_i)u_{i+1}^{j-1}+(-B1_i)u_{i-1}^{j+1}+B2_i w_i^j+B3_i w_{i+1}^j+\\
&+B4_i w_{i-1}^j+B5_i w_i^{j+1}+B5_i w_i^{j-1}=\\
&=R_2\cdot\left\{2\rho_i(1+\nu)\frac{\varepsilon_{i,j+1}^{ST}-\varepsilon_{i,j-1}^{ST}}{2\Delta\xi}+(1-2\nu)\times\right.\\
&\left.\times\left(2\rho_i\frac{\varepsilon_{33i,j+1}^{CP}-\varepsilon_{33i,j-1}^{CP}}{2\Delta\varsigma}+\rho\frac{\varepsilon_{13i+1,j}^{CP}-\varepsilon_{13i-1,j}^{CP}}{2\Delta\rho}+\varepsilon_{13i,j}^{CP}\right)\right\},
\end{aligned}\right. \tag{13}$$

где:

$$\begin{gathered}
A_i=\left(-\frac{2(1-\nu)}{h^2}-\frac{1-\nu}{\rho_i^2}-\frac{1-2\nu}{h^2}\right);\\
A1_i=\frac{1-\nu}{h^2}+\frac{1-\nu}{2\rho_i h};\ A2_i=\frac{1-\nu}{h^2}-\frac{1-\nu}{2\rho_i h};\\
A3=\frac{1-2\nu}{2h^2};\ A4=\frac{1}{8h^2},\ B=\frac{1}{4h};\ B1_i=\frac{\rho_i}{8h^2};\\
B2_i=-\frac{2\rho_i(1-\nu)}{h^2}-\frac{\rho_i(1-2\nu)}{h^2};\\
B3_i=\frac{\rho_i(1-2\nu)}{2h^2}+\frac{1-2\nu}{4h};\\
B4_i=\frac{\rho_i(1-2\nu)}{2h^2}-\frac{1-2\nu}{4h};\ B5_i=\rho_i(1-\nu).
\end{gathered} \tag{14}$$

Для решения системы уравнений (13) воспользуемся методом Гаусса-Жордана, как наиболее известным методом решения таких систем. Представим выражение (13) в матричной форме типа $U{\cdot}A=P$, где матрица U — матрица неизвестных $U(u,w)$; A — матрица коэффициентов $A(A_i, A1_i, A2_i, A3_i, A4, B, B1_i, B2_i, B3_i, B4_i, B5_i)$, P — матрица свободных членов.

В качестве конкретного примера рассмотрим распределение эквивалентных напряжений (рисунок 3) для j-ого слоя стального цилиндра внутренним R_1=0,003 м и внешним R_2=0,0033 м радиусом, где температура на внутренней поверхности T_j составляет 450° С, внутренней P_1=7,5 МПа и внешней P_2=0,1 МПа нагрузкой, со следующими физико-механическими данными: $E=2\cdot10^5$ МПа, ν=0,3, $\alpha=18{,}3\cdot10^{-6}$ град$^{-1}$.

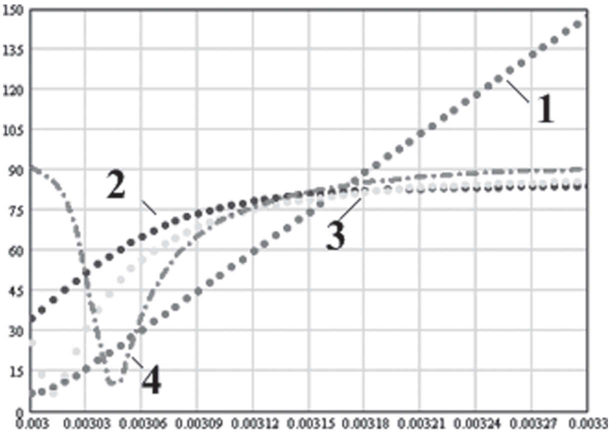

Рисунок 3 — Распределение эквивалентных напряжений с учетом деформаций ползучести: 1 — в начальный момент времени, 2 — по истечении 1000 часов, 3 — по истечении 4000 часов, 4 — по истечении 7000 часов

В итоге можно говорить, что выражение (14) позволяет достаточно точно определять напряженно-деформированное состояние полого короткого цилиндра, находящегося под действием поля высоких температур, нейтронного облучения с учетом деформаций ползучести, вызванных терморадиационным воздействием, и пластичности. Аналогичный метод решения был реализован в работе [6] для более частного случая — бесконечно длинного цилиндра, а более подробный метод решения задач с учетом деформаций ползучести, представлен в работе [7].

Список литературы

1. Куликов, И.С. Прочность элементов конструкций при облучении / И.С. Куликов, Б.Е. Тверковкин. — Минск, 1990. — 144 с.
2. Куликов, И.С. Прочность тепловыделяющих элементов быстрых газоохлождаемых реакторов / И.С. Куликов, Б.Е. Тверковкин. — Минск, 1984. — 104 с.
3. Тимошенко, С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. — М.: Наука, 1975. — 576 с.
4. Deformation of fuel element boxes in gas-cooled fast breeder reactors due to neutron irradiation induced swelling of steel / W. Helbling [et al.] // Nuclear Engineering and Design. — 1971. — Vol. 16; No 1. — pp. 59—66.
5. Исследование распухания конструкционных материалов / Быков В.Н. [и др.]. — М.: Атомиздат, 1974. — С. 414—423.
6. Клус, С.А. НДС неравномерно нагретого полого короткого цилиндра с учетом тепловой и радиационной ползучести / С.А. Клус, И.С. Куликов. — Минск: Машиностроение, 2008. — Т. 1; № 24. — С. 179—182.
7. Куликов, И.С. Влияние деформаций ползучести, вызванных тепловым и радиационным воздействием, на НДС тел цилиндрической геометрии / С.А. Клус, И.С. Куликов // Вестн. БНТУ. — 2010. — № 2. — С. 64—66.

Kulikov I.S., Klus S.A.

Method of calculation of the stress-strain state of bodies having cylindrical geometry of final length under acting of irregular heating, nuclear radiation

Features of the stress-strain state of bodies have cylindrical geometry under acting of irregular heating and nuclear radiations on an example of the short thick-walled cylinder are considered. The basic parities for the numerical decision of the given problem taking into account plasticity and creep deformations are received.

Поступила в редакцию 25.05.2010