УДК 621.937

Д.А. СТЕПАНЕНКО, В.Т. МИНЧЕНЯ, Н.Т. МИНЧЕНЯ, кандидаты техн. наук
Белорусский национальный технический университет, Минск

# ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ГИБКИХ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛНОВОДОВ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ПЕРЕДАТОЧНЫХ МАТРИЦ

*В статье рассмотрено применение метода передаточных матриц для расчета резонансных частот продольных колебаний гибких ультразвуковых волноводов. Корректность и эффективность предложенной методики подтверждены путем моделирования методом конечных элементов, а также результатами экспериментальных исследований*

***Ключевые слова:*** *ультразвук, волновод, передаточная матрица, метод конечных элементов*

## Введение

В ряде случаев при анализе сложных систем удобно представлять их в виде связанных между собой элементов, а свойства системы в целом описывать через свойства ее элементов. Такой подход широко используется, например, в теории автоматического управления, где сложные системы управления представляются в виде связанных между собой звеньев, а по известным передаточным функциям звеньев определяются свойства всей системы. В данной статье подобный метод рассматривается применительно к расчету резонансных частот продольных колебаний комбинированных гибких ультразвуковых волноводов, состоящих из нескольких участков постоянного сечения (ступеней), связанных между собой переходными участками переменного сечения. Схема конструкции такого волновода приведена на рисунке 1 *а*.

Разбиение волновода на элементы осуществляется в соответствии с законом изменения его поперечного сечения. В частности, для изображенного на рисунке 1 *а* волновода выделяется 6 участков: ступени 1—3, переходные участки 4 и 5 и головка 6.

## Методика расчета

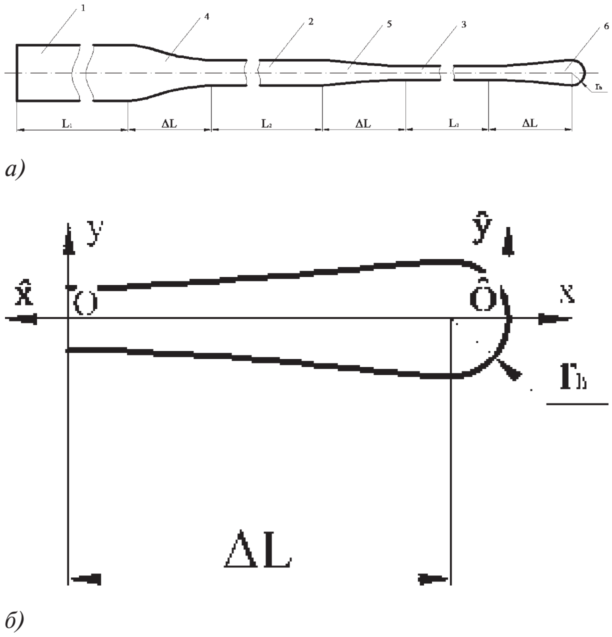
В качестве характеристики каждого из элементов (участков) волновода будем рассматривать его передаточную матрицу $\mathbf{T}(L)$, которую для продольных колебаний определим соотношением:

$$\begin{pmatrix} \xi(L) \\ \xi'(L) \end{pmatrix} = \mathbf{T}(L) \begin{pmatrix} \xi(0) \\ \xi'(0) \end{pmatrix},$$

где $L$ — длина рассматриваемого участка, $\xi(0)$ и $\xi'(0)$ — амплитуда колебательных смещений и удельных деформаций во входном сечении рассматриваемого участка, $\xi(L)$ и $\xi'(L)$ — амплитуда колебательных смещений и удельных деформаций в выходном сечении рассматриваемого участка. Начало системы координат совмещается при расчете передаточных матриц с входным поперечным сечением рассматриваемого участка волновода.

Метод передаточных матриц традиционно используется для исследования ультразвуковых колебательных систем изгибных колебаний [1—4], однако, как будет показано ниже, он дает ряд преимуществ по сравнению с другими методами расчета и в случае продольных колебаний.

Продольные колебания любого из участков волновода описываются уравнением Вебстера [5]:




*а)*

*б)*

**Рисунок 1 — Гибкий ультразвуковой волновод: *а*) схема конструкции; *б*) конструкция головки**

$$\xi'' + (\ln S)'\xi' + k^2\xi = 0, \qquad (1)$$

где $S(x)$ — площадь поперечного сечения рассматриваемого участка, $k=2\pi f/c$ — волновое число ($f$ — частота колебаний, $c$ — скорость продольных ультразвуковых волн в материале волновода).

Передаточную матрицу переходного участка можно представить в виде:

$$\mathbf{T}_t = \begin{pmatrix} \tilde{\xi}^{(1)}(\Delta L) & \tilde{\xi}^{(2)}(\Delta L) \\ \tilde{\xi}^{(1)\prime}(\Delta L) & \tilde{\xi}^{(2)\prime}(\Delta L) \end{pmatrix},$$

где $\tilde{\xi}^{(1)}(x) = \xi^{(1)}(x)/\xi^{(1)}(0)$; $\tilde{\xi}^{(2)}(x) = \xi^{(2)}(x)/\xi^{(2)\prime}(0)$; $\xi^{(1)}(x)$ и $\xi^{(2)}(x)$ — частные решения уравнения (1) при граничных условиях $\xi(0)=1$, $\xi'(0)=0$ и $\xi(0)=0$, $\xi'(0)=1$; $\Delta L$ — длина переходного участка.

Передаточная матрица волновода с постоянным поперечным сечением (ступени комбинированного волновода) имеет вид:

$$\mathbf{T}(L) = \begin{pmatrix} \cos(kL) & \dfrac{\sin(kL)}{k} \\ -k\sin(kL) & \cos(kL) \end{pmatrix},$$

где $L$ — длина ступени.

Если рассматривать задачу анализа, то есть расчета собственных частот и форм колебаний волновода с заданными геометрическими параметрами и свойствами материала, то передаточные матрицы всех участков волновода становятся функциями частоты $f$ колебаний. В этом случае общая передаточная матрица трехступенчатого волновода принимает вид:

$$\mathbf{T}(f)=\mathbf{T}_h(f)\mathbf{T}_3(f)\mathbf{T}_{t2}(f)\mathbf{T}_2(f)\ \mathbf{T}_{t1}(f)\mathbf{T}_1(f),$$

где $\mathbf{T}_i(f)$ — передаточная матрица $i$-ой ступени волновода, $\mathbf{T}_{ti}(f)$ — передаточная матрица $i$-го переходного участка, $\mathbf{T}_h(f)$ — передаточная матрица головки волновода.

Как видно из рисунка 1 *б*, головка волновода состоит из сферической части и переходного участка, связывающего ее с третьей ступенью волновода. Определение передаточной матрицы головки затрудняется тем, что площадь выходного сечения головки обращается в нуль. Если связать систему координат $Ox$ с входным поперечным сечением головки, то изменение площади поперечного сечения сферической части будет описываться уравнением:

$$S(x) = \pi(r_h^2 - (x-\Delta L)^2),$$

где $r_h$ — радиус головки, откуда можно найти производную площади $S'(\Delta L+r_h)$ в выходном сечении головки:

$$S'(\Delta L+r_h)=-2\pi r_h.$$

Таким образом, несмотря на то, что производная функции, описывающей изменение диаметра поперечного сечения головки, обращается в бесконечность в точке $\xi'(\Delta L+r_h)=0$, производная площади принимает в этой точке конечное значение.

Для дальнейшего анализа представим уравнение (1) в виде:

$$S\xi'' + S'\xi' + k^2 S\xi = 0,$$

откуда с учетом соотношений $S'(r_h)=-2\pi r_h$, $S(\Delta L+r_h)=0$ получим равенство:

$$\xi'(\Delta L+r_h)=0.$$

Данное равенство является естественным граничным условием для резонансного волновода, однако в рассматриваемом случае оно должно выполняться независимо от того, находится волновод в резонансе или нет.

Рассмотрим частное решение $\xi^{(1)}(x)$ уравнения (1) в системе координат $Ox$, начало которой находится в выходном сечении головки волновода, при граничных условиях:

$$\xi(0)=1,\ \xi'(0)=0. \qquad (2)$$

Так как одно из этих граничных условий ($\xi'(0)=0$) должно выполняться для любых параметров волновода, любые физически реализуемые граничные условия будут находиться в линейной зависимости с условиями (2), в связи с чем общее решение уравнения (1) может быть выражено через одну базисную функцию:

$$\xi(x) = \xi(0)\frac{\xi^{(1)}(x)}{\xi^{(1)}(0)}.$$

Производная решения имеет вид:

$$\xi'(x) = \xi(0)\frac{\xi^{(1)\prime}(x)}{\xi^{(1)}(0)}.$$

Для входного сечения головки волновода с координатой $x=\Delta L+r_h$ получим следующие значения решения и его производной:

$$\xi(\Delta L + r_h) = \xi(0)\frac{\xi^{(1)}(\Delta L + r_h)}{\xi^{(1)}(0)},$$
$$\xi'(\Delta L + r_h) = \xi(0)\frac{\xi^{(1)\prime}(\Delta L + r_h)}{\xi^{(1)}(0)}. \qquad (3)$$

Решение $\xi(x)$ уравнения (1) и его производная $\xi'(x)$ в системе координат $Ox$ могут быть представлены в виде:

$$\xi(x) = \xi(\Delta L + r_h - x),$$

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{d\xi(\Delta L + r_h - x)}{dx} = -\frac{d\xi(\Delta L + r_h - x)}{d(\Delta L + r_h - x)} = -\frac{d\xi}{dx},$$

что позволяет записать уравнения (3) в форме:

$$\xi(\Delta L + r_h) = \xi(0)\frac{\xi^{(1)}(0)}{\xi^{(1)}(\Delta L + r_h)},$$

$$\xi(\Delta L + r_h) = -\xi'(0)\frac{\xi^{(1)}(0)}{\xi^{(1)\prime}(\Delta L + r_h)}.$$

Из этих уравнений следует линейная зависимость между величинами $\xi(0)$ и $\xi'(0)$:

$$\xi(0)\frac{\xi^{(1)\prime}(\Delta L + r_h)}{\xi^{(1)}(\Delta L + r_h)} + \xi'(0) = 0. \qquad (4)$$

Величина $\xi'(\Delta L+r_h)$ может быть представлена с помощью передаточной матрицы в виде:

$$\xi'(\Delta L + r_h) = \mathrm{T}_{h21}(f)\xi(0) + \mathrm{T}_{h22}(f)\xi'(0), \qquad (5)$$

где величина $\mathrm{T}_{h22}(f)$ должна быть безразмерной, а величина $\mathrm{T}_{h21}(f)$ должна иметь размерность $м^{-1}$.

Из выражения (5) с учетом граничного условия $\xi'(\Delta L+r_h)$ следует уравнение:

$$\mathrm{T}_{h21}(f)\xi(0) + \mathrm{T}_{h22}(f)\xi'(0) = 0, \qquad (6)$$

которое по своей форме аналогично уравнению (4).

Так как коэффициенты уравнения (4) имеют подходящие размерности, то можно приравнять соответствующие коэффициенты уравнений (4) и (6):

$$\mathrm{T}_{h21}(f) = \frac{\xi^{(1)\prime}(\Delta L + r_h)}{\xi^{(1)}(\Delta L + r_h)},\ \mathrm{T}_{h22}(f) = 1.$$

Это позволяет окончательно представить передаточную матрицу головки в виде:

$$\begin{pmatrix} \xi(\Delta L+r_h) \\ \xi'(\Delta L+r_h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\xi^{(1)}(0)}{\xi^{(1)}(\Delta L+r_h)} & 0 \\ \dfrac{\xi^{(1)\prime}(\Delta L+r_h)}{\xi^{(1)}(\Delta L+r_h)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(0) \\ \xi'(0) \end{pmatrix}.$$

Для резонансного волновода $\xi'(0)=\xi'(L)=0$, что приводит к системе уравнений:

$$\begin{pmatrix} \xi(L) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11}(f) & T_{12}(f) \\ T_{21}(f) & T_{22}(f) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi(0) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из второго уравнения системы следует условие резонанса:

$$T_{21}(f)=0.$$

При этом амплитуде колебаний $\xi(0)$ во входном сечении волновода можно придавать произвольное значение. Амплитуда колебаний $\xi(L)$ в выходном сечении волновода связана с амплитудой $\xi(0)$ первым уравнением системы:

$$\xi(L)=T_{11}(f)\xi(0).$$

Из этого уравнения вытекает физический смысл элемента $T_{11}(f)$ передаточной матрицы: он представляет собой коэффициент усиления колебаний по амплитуде.

Для отыскания базисной функции $\xi^{(1)}(x)$ методом Рунге-Кутта необходимо представить уравнение (1) в виде эквивалентной системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{d\mathrm{x}} = u_2 \\ \dfrac{du_2}{d\mathrm{x}} = -\dfrac{2d'}{d}u_2 - k^2 u_1 \end{cases} \tag{7}$$

с начальными условиями:

$$u_1(0)=1,\ u_2(0)=0,$$

где $u_1=\xi$, $u_2 = \dfrac{d\xi}{d\mathrm{x}}$, $d(\mathrm{x})$ — функция, описывающая изменение диаметра поперечного сечения головки, или в векторной форме:

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{x}} = F(\mathrm{x},\mathbf{u}),\ \mathbf{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

На первом шаге метода Рунге-Кутта требуется вычисление значения вектор-функции $\mathbf{F}(\mathrm{x},\mathbf{u})$ в точке x=0. Это затрудняется тем, что значение выражения $-\dfrac{2d'}{d}u_2 - k^2 u_1$ в точке x=0 не определено. Действительно, так как при $\mathrm{x} \le r_h$ выполняются равенства $d(\mathrm{x}) = 2\sqrt{r_h^2 - (\mathrm{x}-r_h)^2}$, $d'(\mathrm{x}) = \dfrac{2(r_h - \mathrm{x})}{\sqrt{r_h^2 - (\mathrm{x}-r_h)^2}}$, то $\dfrac{d(0)}{d'(0)} = 0$ и в силу граничного условия $u_2(0)=0$ в точке x=0 возникает неопределенность вида 0/0. Для раскрытия этой неопределенности используем правило Лопиталя:

$$\lim_{\mathrm{x}\to 0}\frac{u_2(\mathrm{x})}{d/d'} = \lim_{\mathrm{x}\to 0}(r_h - \mathrm{x})\frac{u_2(\mathrm{x})}{r_h^2 - (\mathrm{x}-r_h)^2} =$$

$$= r_h \lim_{\mathrm{x}\to 0}\frac{u_2(\mathrm{x})}{r_h^2 - (\mathrm{x}-r_h)^2} = -\frac{r_h}{2}\lim_{\mathrm{x}\to 0}\frac{du_2/d\mathrm{x}}{\mathrm{x}-r_h} = \frac{u_2'(0)}{2}.$$

Здесь предполагается, что производная $u_2'(0)$ принимает конечное значение. Для определения этого значения рассмотрим второе уравнение системы (7) в точке x=0. С учетом полученного выражения для возникающей в точке x=0 неопределенности уравнение примет вид:

$$u_2'(0) = -u_2'(0) - k^2 u_1(0),$$

откуда с учетом граничного условия $u_1(0)=1$ следует:

$$u_2'(0) = -k^2/2.$$

Таким образом, вектор-функция $\mathbf{F}(\mathrm{x},\mathbf{u})$ примет в точке x=0 значение:

$$\mathbf{F}(0,\mathbf{u}(0)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -k^2/2 \end{pmatrix}.$$

Для определения передаточных матриц переходных участков и головки волновода выполнялось численное решение уравнения (7) с необходимыми граничными условиями для ряда значений волнового числа $k$, соответствующих различным частотам $f$ колебаний. Решение производилось с помощью метода Рунге-Кутта четвертого порядка с использованием программы MathCad. Изменение диаметра $d(x)$ переходных участков описывалось полиномиальными функциями по ранее разработанной методике [6, 7]. По результатам расчета общей передаточной матрицы волновода строилась его логарифмическая резонансная характеристика $R(f)=\lg|T_{21}(f)|$, из которой определялись резонансные частоты, при которых $R(f) \to -\infty$.

Для подтверждения достоверности результатов, полученных с помощью метода передаточных матриц, также были проведены экспериментальные исследования, методика которых излагается в следующем разделе, и моделирование с помощью метода конечных элементов (МКЭ) с использованием программы ANSYS. Моделирование выполнялось методом модального анализа с помощью специально разработанной программы на языке APDL (ANSYS Parametric Design Language) [8]. В качестве геометрической модели рассматривалась четверть волновода с наложением симметричных граничных условий на плоскостях разреза, однако, в отличие от ранее описанных моделей [6—8], геометрическая модель разбивалась на участки (ступени, переходные участки и головка), «склеиваемые» между собой, что позволило избежать проблем с автоматической генерацией конечных элементов, возникающих при исследовании длинных волноводов. Входное и выходное сечения волновода считались свободными, в связи с чем наложение связей в направлении оси симметрии волновода не требовалось.

**Методика экспериментальных исследований**

Для экспериментальной регистрации амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) волновода использовался специально разработанный индукционный датчик амплитуды колебаний, схема конструкции которого приведена на рисунке 2 *а*.

Датчик состоит из пластмассового корпуса 3, внутри которого установлен кольцевой постоянный магнит 4. Исследуемый волновод 1 вводится в центральное отверстие корпуса 3. Магнитный поток, создаваемый магнитом 4, проходит через полюсные наконечники 6 из магнитомягкого феррита и замыкается через волновод 1. Величина магнитного потока будет зависеть от величины зазора между полюсным наконечником и волноводом, которая будет изменяться при изгибных колебаниях волновода и в результате изменения диаметра волновода при продольных колебаниях (эффект Пуассона). Переменный магнитный поток будет индуцировать электродвижущую силу (ЭДС) в катушках 5, намотанных на полюсные наконечники. Чтобы исключить составляющую ЭДС, связанную с изгибными колебаниями волновода, катушки, намотанные на диаметрально противоположные полюс-

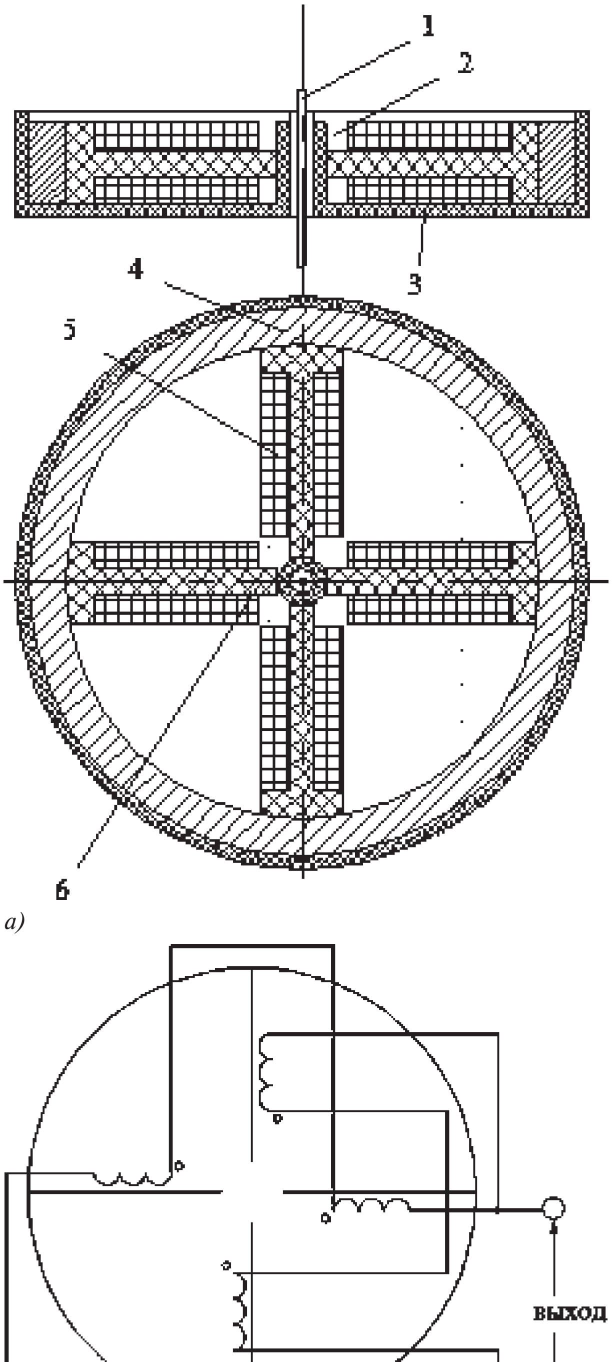



**Рисунок 2 — Датчик амплитуды колебаний волновода: *а*) схема конструкции; *б*) схема включения**

ные наконечники, включаются последовательно по встречной схеме (см. рисунок 2 *б*). Все элементы датчика залиты эпоксидным компаундом 2.

Для построения АЧХ колебания волновода возбуждались с помощью пьезоэлектрического ультразвукового преобразователя, на который подавалось напряжение от ультразвукового генератора, управляемого с помощью компьютера и специально разработанного программного обеспечения (ПО) [9]. Частота возбуждающего напряжения изменялась в определенном диапазоне (типично от 20 до 36 кГц), который задавался с помощью ПО. Амплитуда колебаний для каждой из частот диапазона регистрировалась с помощью описанного выше датчика. Связь генератора и датчика с компьютером осуществлялись через последовательный порт (COM-порт).

**Результаты и их обсуждение**

Приведенные ниже результаты получены для волновода со следующими параметрами: длины ступеней $L_1$=0,098 м, $L_2$=0,05 м, $L_3$=0,29325 м; длина переходных участков $\Delta L$=0,006 м; радиус головки $r_h$=0,00075 м; диаметры ступеней $D_1$=0,0015 м, $D_2$=0,00089 м, $D_3$=0,0005 м; модуль упругости материала $E$=1,873·10$^{11}$ Па; коэффициент Пуассона $\nu$=0,28; плотность $\rho$=7800 кг/м$^3$.

Типичный вид экспериментальной АЧХ волновода представлен на рисунке 3.

На рисунке 4 представлена логарифмическая резонансная характеристика волновода, полученная с помощью метода передаточных матриц.

В таблице приведены значения резонансных частот продольных колебаний волновода, полученные с помощью трех методов: метода передаточных матриц, МКЭ и экспериментального метода.

Как следует из анализа приведенных данных, погрешность определения резонансных частот с использованием различных методов не превышает 3,5 %, что подтверждает корректность и эффективность разработанной методики расчета.

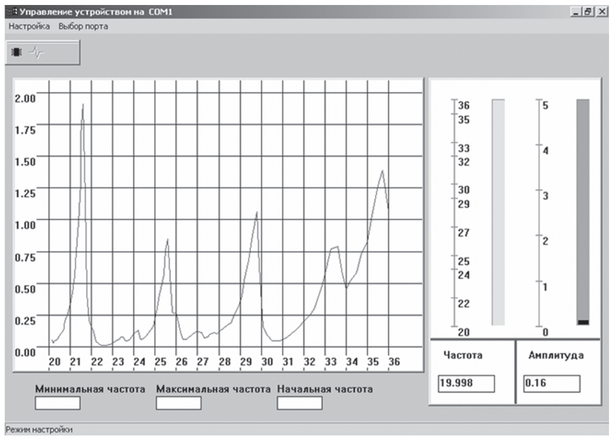



**Рисунок 3 — Экспериментальная АЧХ волновода**

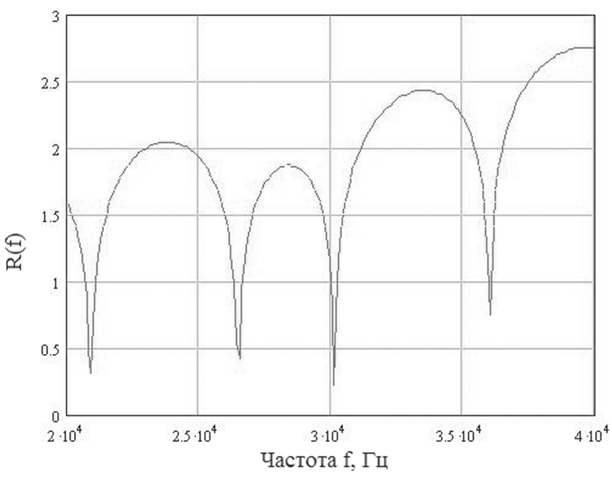



**Рисунок 4 — Расчетная логарифмическая резонансная характеристика волновода**

Таблица — Резонансные частоты продольных колебаний волновода

| Метод определения частот | Значения частот, кГц | | | |
|---|---|---|---|---|
| Метод передаточных матриц | 20,9 | 26,5 | 30,1 | 36,0 |
| МКЭ | 20,6 | 26,1 | 29,8 | 35,4 |
| Экспериментальный метод | 21,6 | 25,6 | 29,8 | 35,7 |

## Выводы

1. Предложена методика расчета резонансных частот продольных колебаний гибких ультразвуковых волноводов, основанная на использовании метода передаточных матриц.
2. На основе сравнения результатов расчета с результатами моделирования с помощью МКЭ и экспериментальными данными показана корректность и эффективность предложенной методики.

## Список обозначений

$c$ — скорость продольной ультразвуковой волны, м/с;
$f$ — частота колебаний, Гц;
$k$ — волновое число, м$^{-1}$;
$L_i$ — длина $i$-ой ступени, м;
$r_h$ — радиус головки, м;
$S$ — площадь поперечного сечения, м$^2$;
$\mathbf{T}$ — передаточная матрица волновода;
$\mathbf{T}_h$ — передаточная матрица головки;
$\mathbf{T}_i$ — передаточная матрица $i$-ой ступени;
$\mathbf{T}_{ti}$ — передаточная матрица $i$-го переходного участка;
$\Delta L$ — длина переходных участков, м;
$\xi$ — амплитуда колебательных смещений, м.

## Список литературы


1. Zhou, G. The performance and design of ultrasonic vibration system for flexural mode / G. Zhou // Ultrasonics. — 2000. — Vol. 38. — pp. 979—984.
2. The design of an ultrasonic polishing tool by the transfer-matrix method / Z.N. Guo [et al.] // Journal of Materials Processing Technology. — 2000. — Vol. 102. — pp. 122—127.
3. Experimental and theoretical research on «local resonance» in an ultrasonic honing system / X.S. Zhu // Journal of Materials Processing Technology. — 2002. — Vol. 129. — pp. 207—211.
4. Квашнин, С.Е. Ультразвуковые электроакустические преобразователи и волноводы-инструменты для медицины / С.Е. Квашнин. — М.: Изд-во МГТУ, 1995. — 43 с.
5. Webster, A.G. Acoustical impedance, and the theory of horns and of the phonograph // Proc. of the National Academy of Sciences of the USA. — 1919. — Vol. 5. — pp. 275—282.
6. Минченя, В.Т. Линейные колебания двухступенчатого волновода-концентратора для ультразвукового тромболизиса / В.Т. Минченя, Д.А. Степаненко// Докл. НАН Беларуси. — 2009. — Т. 53; № 6. — С. 114—119.
7. Stepanenko, D.A. Modeling of flexible waveguides for ultrasonic vibrations transmission: Longitudinal and flexural vibrations of non-deformed waveguide / D.A. Stepanenko, V.T. Minchenya // Ultrasonics. — 2010. — Vol. 50. — pp. 424—430.
8. Bubulis, A. Semi-automatic modal analysis of flexible ultrasonic waveguides in ANSYS / A. Bubulis, V.T. Minchenya, D.A. Stepanenko // Материалы МНТК «Приборостроение—2009». — Минск, 2009. — С. 145—146.
9. Минченя, В.Т. Контрольно-измерительный комплекс для гибких ультразвуковых волноводов / В.Т. Минченя, И.В. Луговой, И.В. Реут // Материалы МНТК «Приборостроение—2008». — Минск, 2008. — С. 106—107.


Stepanenko D.A., Minchenya V.T., Minchenya N.T.

**Investigation of longitudinal vibration of flexible ultrasonic waveguides by means of transfer-matrix method**

The article considers application of the transfer-matrix method for calculating resonant frequencies of longitudinal vibration of flexible ultrasonic waveguides. Correctness and efficiency of the suggested method are verified by finite-element modelling as well as by the results of experimental studies.

*Поступила в редакцию 02.08.2010*