

УДК 629.113.62-235; 621.85

И.К. АЛЕКСАНДРОВ, д-р техн. наук  
Вологодский государственный технический университет, Россия

## ХАРАКТЕРНАЯ МЕТОДОЛОГИЧЕСКАЯ ОШИБКА ПРИ АНАЛИЗЕ ФРИКЦИОННЫХ СИЛ В ПАРЕ ТРЕНИЯ

*В соответствии с классическими курсами «Теория механизмов и машин» и «Детали машин» для упрощения инженерных расчетов суммарные фрикционные потери в паре трения принято оценивать без учета сил молекулярного сцепления. В статье на примере существующих экспериментальных исследований показано, что использование такой упрощенной модели расчета противоречит известному закону Амонтона—Кулона и приводит к ошибочному представлению результатов эксперимента.*

**Ключевые слова:** закон Амонтона—Кулона, пара трения, коэффициент трения, силы молекулярного сцепления

**Введение.** Несмотря на то, что закон Амонтона—Кулона является общепризнанным [1, 2, 3] и приводится в любом справочнике по физике [4], в учебной литературе и нормативных источниках [5, 6], определяющих методику инженерных расчетов, предлагается использовать упрощенное первоуродное утверждение Амонтона (опубликованное им еще в 1699 г. [7]), что якобы фрикционные силы  $F_{TP}$  (силы сопротивления перемещению тела относительно поверхности, с которой оно контактирует) определяются прямо пропорционально нормальной нагрузке  $F_H$  (силе тяжести перемещаемого тела).

В 1785 г. Ш. Кулон [8] заметил, что помимо силы трения при контакте двух тел действует еще сила сцепления, которая практически не зависит от нормальной нагрузки, а определяется только наличием контакта двух соприкасающихся тел. В настоящее время с позиции науки о трении (трибологии) считается корректным представлять модель действия фрикционных сил в паре трения в виде двухкомпонентной зависимости Кулона. Однако благодаря классическим курсам «Теория механизмов и машин» и «Детали машин» широкое использование в инженерных расчетах получила именно усеченная («амонтоновская») модель фрикционных сил. В качестве иллюстрации цитируем известное академическое издание [5]: «В большинстве технических расчетов обычно пользуются уравнением Амонтона—Кулона в простейшей форме, пренебрегая цепкостью поверхности, и считают:

$$F_{TP} = f_{TP} F_H, \quad (1)$$

где  $f_{TP}$  — некоторое среднее значение коэффициента трения, определяемого из опыта и принимаемого постоянным».

Конечно, столь простая зависимость существенно упрощает выполнение расчета при решении инженерных задач, но зачастую приводит к искаженному толкованию результатов экспериментальных и теоретических

исследований. Ниже демонстрируется эта характерная методологическая ошибка при анализе фрикционных сил в паре трения на примере исследований, представленных в работе [9].

**Метод исследования.** При решении задачи выбора закономерности, определяющей взаимодействие сил в паре трения, важнейшими требованиями являются достаточная простота математической модели, но также и ее полная адекватность. Указанные требования наилучшим образом согласуются с выводами профессора Б.И. Костецкого [2] о существовании стационарной (нормальной) области трения: «В стационарной области условий имеет место приблизительно линейная зависимость между тангентальной и нормальной реакцией. В этой области закономерно получение эмпирических зависимостей типа закона Амонтона—Кулона. Существование стационарной нормальной области трения выдвигает одну из наиболее важных и необходимых практических задач и экспериментальных исследований. Эта задача заключается в разграничении условий нормального и патологического трения...».

Итак, с учетом кулоновской поправки фрикционную силу  $F_{ФР}$ , возникающую в паре трения, определяют как сумму сил трения  $F_{TP}$  и сцепления  $F_{СИ}$ :

$$F_{ФР} = F_{TP} + F_{СИ} = f_{TP} F_H + F_{СИ}, \quad (2)$$

где  $f_{TP}$  — коэффициент трения;  $F_H$  — нормальная сила в паре трения; при этом  $F_H$  — аргумент, а  $f_{TP}$  и  $F_{СИ}$  — константы.

Для амонтоновской модели не существует разницы между суммой фрикционных сил и силой трения, т.е.  $F_{ФР} \equiv F_{TP}$ . Поэтому у исследователя, доверяющего этой упрощенной модели, всегда возникает соблазн, используя экспериментальные значения  $F_{TP}$  и  $F_H$ , по формуле (1) «быстро» определить коэффициент трения из соотношения  $f_{TP} = F_{TP} / F_H$ .

При этой процедуре исследователь вдруг неожиданно для себя обнаруживает, что он «открыл» закон изменения коэффициента трения от нагрузки в паре трения.

К сожалению, мы вынуждены разочаровать открывателя «нового» закона. Поскольку на самом деле полученные им экспериментальные значения фрикционных сил (см. рисунок 1) в реальности аппроксимируются именно полной, а не усеченной зависимостью  $F_{\text{ФР}} = f(F_N)$ . Следовательно, разделив уравнение (2) на величину  $F_{\text{ТР}}$ , определяем не коэффициент трения, а всего лишь зависимость относительных фрикционных сил  $f_{\text{ФР}}$  от нормальной нагрузки  $F_N$  и эта зависимость, естественно, представляет собой гиперболу:

$$f_{\text{ФР}} = f_{\text{ТР}} + F_{\text{СЦ}}/F_N \quad (3)$$

Согласно (3), по мере роста нормальной силы  $F_N$  относительные фрикционные силы асимптотически стремятся к константе и при некоторой (достаточно большой) нагрузке действительно становятся равными коэффициенту трения. Но при этом не происходит абсолютно никакой трансформации с самим коэффициентом трения (он в стационарной области условий остается неизменным).

Проведя операцию по вычислению относительных фрикционных потерь и получив в результате гиперболическую функцию (3), мы тем самым подтверждаем наличие существования закона Амонтона—Кулона, но представляем как бы его «зеркальное отображение» (рисунок 2).

Судя по графикам, приведенным в работе [9], экспериментальные точки с определенной достоверностью аппроксимируются гиперболической зависимостью вида (3), что сигнализирует о постоянстве коэффициента трения и о применимости закона Амонтона—Кулона при заданных условиях: нагрузочном диапазоне, температурном режиме, наличии между контактируемыми поверхностями смазывающего ингредиента и других условиях проведения экспериментальных исследований. Однако авторы, используя упрощенную (амонтоновскую) модель, ошибочно трактуют «зеркальную» версию закона Амонтона—Кулона как функциональную зависимость коэффициента трения от нагрузки (давления) в паре трения.

Весьма существенным недостатком «зеркальной» версии закона Амонтона—Кулона является то, что аппроксимирующая гиперболическая функция гораздо менее, чем линейная, чувствительна к изменению аргумента, и в этом случае появляется большая вероятность не заметить границу перехода стационарной области трения к патологии. И эта (вторая ошибка) также была допущена исследователями [9] (см. ниже).

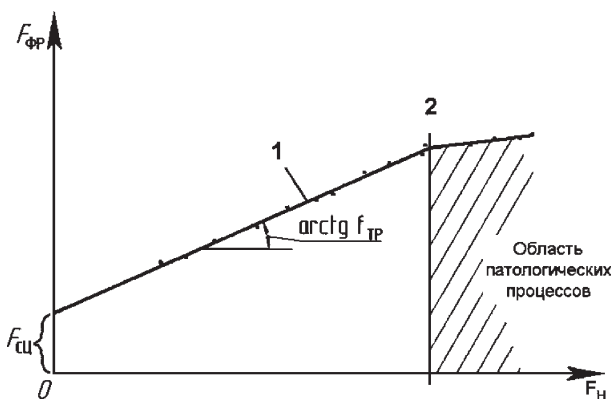


Рисунок 1 — Зависимость суммарной фрикционной силы от нормальной нагрузки в паре трения (закон Амонтона—Кулона): 1 —  $F_{\text{ФР}} = f_{\text{ТР}} F_N + F_{\text{СЦ}}$ ; 2 — граничное значение  $F_N$

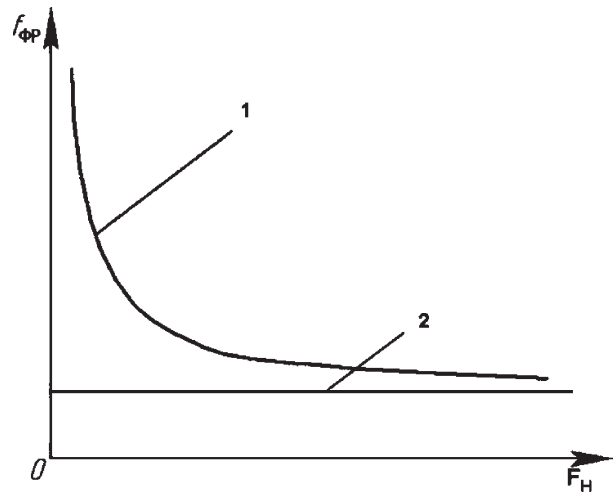


Рисунок 2 — Зависимость относительной суммарной фрикционной силы от нормальной нагрузки в паре трения («зеркальная» версия закона Амонтона—Кулона): 1 —  $f_{\text{ФР}} = f_{\text{ТР}} + F_{\text{СЦ}}/F_N$ ; 2 —  $f_{\text{ТР}} = \text{const}$

Следуя идее профессора Б.И. Костецкого о существовании стационарной области трения и выделении граничных условий патологического трения, необходимо в процессе экспериментальных исследований ставить задачу определения этих граничных условий или, по крайней мере, проводить исследование пар трения в границах реальных условий изменения определяющих параметров. Как показывают эксперименты [1, 2, 3] появление граничных условий чаще всего связано с такими параметрами, как величина нормальной нагрузки, температурный и скоростной режимы и условия смазки в паре трения. На рисунке 1 показан возможный пример возникновения патологии (выход за пределы стационарной области) за счет превышения величины нагрузки в паре трения.

В работе [9] проведены исследования одного из типов пары трения скольжения при изменении основных условий: нормальной нагрузки, температурного и скоростного режимов. На наш взгляд, эти исследования позволяют сделать обобщающие выводы о влиянии указанных условий на существование стационарной области трения.

Трансформируем результаты экспериментальных исследований, представленных в работе [9] в «зеркальной» форме, к виду адекватной зависимости Амонтона—Кулона (2).

Поскольку в работе [9] приняты удельные показатели фрикционных сил, то мы также вынуждены ввести удельные характеристики, то есть представленные выше силы отнести к единице поверхности контакта в паре трения:

$$F_{\text{ФР}y\sigma} = F_{\text{ФР}}/S, \quad F_{\text{ТР}y\sigma} = F_{\text{ТР}}/S, \quad F_{\text{СЦ}y\sigma} = F_{\text{СЦ}}/S;$$

$$F_{\text{Н}y\sigma} = F_N/S = p,$$

где  $S$  — площадь поверхности контакта в паре трения,  $\text{м}^2$ ;  $p$  — величина давления в паре трения,  $\text{Па}$ .

Запишем формулу (2) с учетом введенных обозначений:

$$F_{\text{ФР}y\sigma} = f_{\text{ТР}} F_{\text{Н}y\sigma} + F_{\text{СЦ}y\sigma} \quad (4)$$

Как видим, принципиально формула не изменилась, поменялись только единицы измерений входящих в нее параметров.

Приведем в соответствие с выдвинутой математической моделью результаты экспериментальных исследований, представленных в работе [9]. Для этой цели используем экспериментальные графики, на которых приведены зависимости относительных фрикционных сил  $f_{\text{ФР}}$  в функции от удельной нормальной силы (давления) в паре трения:

$$f_{\text{фр}} = f(F_{\text{Нвд}}) = \frac{F_{\text{фрвд}}}{F_{\text{Нвд}}} = \frac{F_{\text{ТРвд}} + F_{\text{СЛвд}}}{F_{\text{Нвд}}} = f_{\text{ТР}} + \frac{F_{\text{СЛвд}}}{F_{\text{Нвд}}} \quad (5)$$

На рисунке 3 показаны результаты экспериментальных исследований фрикционных потерь в маятниковых подшипниках скольжения при  $T=173$  К, опубликованные в работе [9].

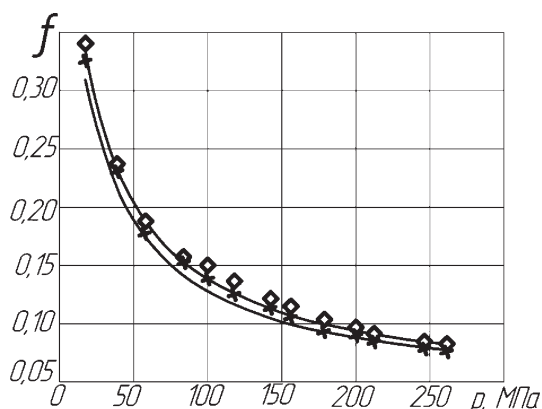


Рисунок 3 — Результаты экспериментальных исследований фрикционных потерь маятниковых подшипников скольжения при  $T=173$  К (В.А. Наденн):  
 x —  $V=0,02$  м/с; o —  $V=0,005$  м/с

Отметим, что анализ проводился только на основании координат отмеченных на графике экспериментальных точек, теоретические кривые, построенные авторами, во внимание не принимались.

Результаты обработки экспериментальных данных приведены в таблицах 1, 2 и в виде графика на рисунке 4.

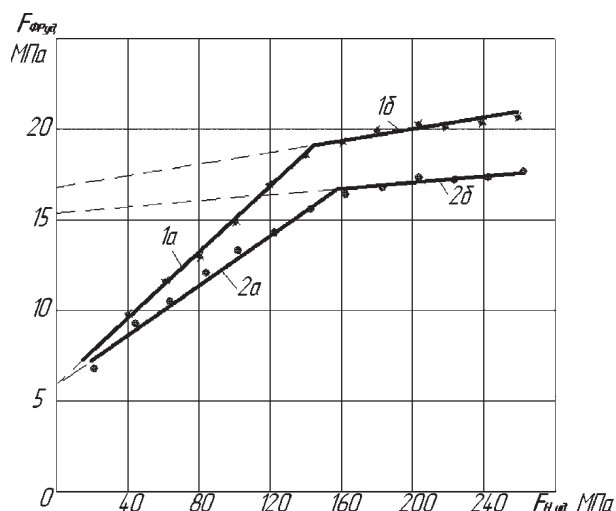


Рисунок 4 — Зависимости фрикционных сил от нормальной нагрузки в паре трения при  $T=173$  К: x —  $V=0,02$  м/с; o —  $V=0,005$  м/с; 1a —  $F_{\text{фрвд}}=0,0928F_{\text{Нвд}}+5,802$ ; 1б —  $F_{\text{фрвд}}=0,01413F_{\text{Нвд}}+17,152$ ; 2a —  $F_{\text{фрвд}}=0,069356F_{\text{Нвд}}+6,306$ ; 2б —  $F_{\text{фрвд}}=0,00892F_{\text{Нвд}}+15,55$

Таблица 1 — Изменение фрикционных характеристик при  $T=173$  К и  $V=0,02$  м/с

Номер точки на графике	Значения параметров получены на основании экспериментальных исследований, представленных в работе [9]			Аппроксимирующая функция. Коэффициент трения. Сила сцепления, МПа	Погрешность аппроксимации, %
	Относительная фрикционная сила $f_{\text{ТР}}$	Удельная нормальная сила (давление) $F_{\text{Нвд}}$ , МПа	Удельная фрикционная сила $F_{\text{фрвд}}$ , МПа		
1	0,343	21,15	7,255	Точки 1—6 $F_{\text{фрвд}}=0,0928F_{\text{Нвд}}+5,802$ $f_{\text{ТР}}=0,0928$ $F_{\text{СЛвд}}=5,802$	$D=2,323$ %
2	0,241	42,31	10,196		
3	0,191	61,538	11,754		
4	0,1636	80,77	13,214		
5	0,15	100	15,0		
6	0,1427	121,15	17,288		
7	0,1318	142,3	18,755	Точки 7—13 $F_{\text{фрвд}}=0,091413F_{\text{Нвд}}+17,152$ $f_{\text{ТР}}=0,01413$ $F_{\text{СЛвд}}=17,152$	$D=1,41$ %
8	0,1205	161,5	19,465		
9	0,1114	180,77	20,138		
10	0,1	204	20,4		
11	0,0909	221,15	20,103		
12	0,0841	242,31	20,38		
13	0,0795	261,54	20,79		

Таблица 2 — Изменение фрикционных характеристик при  $T=173$  К и  $V=0,005$  м/с

Номер точки на графике	Значения параметров получены на основании экспериментальных исследований, представленных в работе [9]			Аппроксимирующая функция. Коэффициент трения. Сила сцепления, МПа	Погрешность аппроксимации, %
	Относительная фрикционная сила $f_{TP}$	Удельная нормальная сила (давление) $F_{Hy0}$ , МПа	Удельная фрикционная сила $F_{Фp0}$ , МПа		
1	0,325	21,15	6,87	Точки 1—7 $F_{Фp0}=0,069356F_{Hy0}+6,306$ $f_{TP}=0,069356$ $F_{Cц0}=6,306$ МПа	$D=3,65$ %
2	0,225	42,3	9,52		
3	0,1727	61,54	10,63		
4	0,1545	80,77	12,48		
5	0,1386	100	13,86		
6	0,1227	121,15	14,87		
7	0,1136	140,38	15,95		
8	0,1045	159,62	16,68	Точки 8—13 $F_{Фp0}=0,00892F_{Hy0}+15,55$ $f_{TP}=0,00892$ $F_{Cц0}=15,55$ МПа	$D=1,46$ %
9	0,0955	180,77	17,26		
10	0,0886	200	17,72		
11	0,0795	221,15	17,58		
12	0,07273	240,38	17,48		
13	0,0682	261,54	17,84		

Аппроксимация экспериментальных значений с использованием линейной функции вида (4) выполнялась на основе требований регрессионного анализа, т.е. коэффициенты аппроксимирующей функции вычислялись из условия минимального отклонения суммы квадратов отклонений ординат экспериментальных точек от теоретической зависимости (метод наименьших квадратов) [10]. Достоверность аппроксимации оценивалась путем определения относительной ошибки  $D$  с учетом  $t$ -распределения Стьюдента [11].

$D$  составила приблизительно 2—3 %, что говорит о высокой достоверности аппроксимации экспериментальных данных зависимостью (4) и еще раз подтверждает адекватность двухкомпонентной модели Кулона.

Нами обнаружена четкая закономерность увеличения сил сцепления и одновременное уменьшение коэффициента трения при превышении некоторого (граничного) значения давления в паре трения (в пределах 140...160 МПа), что свидетельствует о «патологических» (по Б.И. Костецкому) изменениях условий трения в паре.

По достижении граничной величины давления происходит разрушение поверхностного слоя одного (наименее прочного) из контактируемых материалов. В зоне контакта появляются микрочастицы разрушенного материала, которые обеспечивают снижение сил трения. Возникает пограничный «смазывающий» слой из этих частиц (эффект арбузной корки, эффект конька).

По результатам обработки экспериментального материала установлено существенное влияние температурного режима на коэффициент силы трения и силы сцепления (ввиду ограниченности объема статьи этот анализ не представлен).

Выявлен относительно небольшой рост фрикционных сил при заданном температурном режиме в зависимости от относительной скорости перемещения тел трения.

Этот эффект слабого влияния скоростного режима на фрикционные характеристики пары трения следует отметить особо. Как показывают экспериментальные исследования (не только рассматриваемые в данной статье, но также и исследования других экспериментаторов, в том числе и исследования автора), фрикционные характеристики в стационарной области трения остаются стабильными в очень широком скоростном диапазоне, и при решении инженерных задач во многих случаях допустимо пренебречь этим фактором.

При условии  $T=173$  К (рисунок 4) отклонения фрикционных характеристик в стационарной области не существенны несмотря на то, что скоростной режим был изменен в 4 раза. В данном случае вполне допустимо при выполнении инженерных вычислений пренебречь влиянием скоростного режима и применять усредненную величину коэффициента трения:

$$\bar{f}_{TP} = \frac{0,09 + 0,07}{2} = 0,08.$$

**Заключение.** Обработка результатов эксперимента на основе представленной методики подтверждает: а) гипотезу профессора Б.И. Костецкого о существовании стационарной области условий трения; б) адекватность предлагаемого трибологией анализа фрикционных потерь в паре трения на основе двухкомпонентной модели Кулона (что игнорируется классическими курсами «ТММ» и «Детали машин»).

В статье показан один из фрагментов аналитических исследований автора в области определения энергетических потерь в механизмах и машинах (подробно см. [12]).

#### Список литературы

1. Гаркунов, Д.Н. Триботехника / Д.Н. Гаркунов. — М.: Машиностроение, 1985. — 424 с.
2. Костецкий, Б.И. Трение, смазка и износ в машинах / Б.И. Костецкий. — Киев: Техніка, 1970. — 396 с.
3. Крагельский, И.В., Основы расчета на трение и износ / И.В. Крагельский, М.Н. Добычин, В.С. Комбалов. — М.: Машиностроение, 1977. — 526 с.
4. Яворский, В.М. Справочник по физике для инженеров и студентов вузов / В.М. Яворский., А.А. Детлаф. — М.: Наука, 1971. — 940 с.
5. Артоболевский, И.И. Теория механизмов и машин / И.И. Артоболевский. — изд. 5-е стер., перепеч. с изд. 1988. — М.: Альянс, 2008. — 639 с.
6. Решетов, Д.Н. Детали машин / Д.Н. Решетов. — М.: Машиностроение, 1989. — 496 с.
7. Amontons V. De resistance caus ee dans les mashines. Memoires de l'Аkademie Royale, 1699 / V. Amontons. — pp. 203—222.
8. Coulomb, С.А. Theorie des mashines simples. Memoires de mathematique et de physique de l'Аcademie des sciences / С.А.. Coulomb. — Vol. 10, No 1785. — pp. 161—331.
9. Надеин, В.А., Характеристики маятниковых подшипников скольжения – сейсмоизоляторов/ В.А. Надеин, Ю.Н. Дроздов, В.Н. Пучков, М.В. Пучков// Вестник машиностроения. — 2007. — № 2. — С. 8—11.
10. Корн, Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн. — М.: Наука, 1973. — 831 с.
11. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. — М.: Высш. шк., 1977. — 479 с.
12. Александров, И.К. Энергетический анализ механизмов и машин. Теоретическое и экспериментальное обоснование принципов исследования и определения энергетических потерь в механизмах и машинах: монография / И.К. Александров. — Вологда: ВоГТУ, 2011. — 244 с.

---

Aleksandrov I.K.

#### Characteristic Methodological Error in Analysing the Total Frictional Forces in the Friction Pair

In accordance with the classical courses «The Theory of Machinery and Machines» and «Machine Parts» for the purpose of simplifying engineering calculations it is adopted to determine total frictional losses in frictional pair without taking into account molecular coupling forces. In the paper by the examples of the existing experimental researches it is show, that the application of such simplified calculation model contradicts the known Amontons—Coulomb Law and results in erroneous representation of the experimental results.

*Поступила в редакцию 07.07.2010.*