



ДИНАМИКА, ПРОЧНОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 539.3

С.М. БОСЯКОВ, канд. физ.-мат. наук, В. ЧЖИВЭЙ
Белорусский государственный университет, г. Минск

АНАЛИЗ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ СТЕКЛОПЛАСТИКА ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ НАВЬЕ

В настоящей работе представлены результаты нахождения частот свободных колебаний цилиндрической конструктивно анизотропной оболочки из стеклопластика при граничных условиях Навье. Постоянные упругости оболочки зависят от угла намотки стекловолокна. Расчет частот свободных колебаний выполнен на основании метода Рэлея—Ритца. Результаты вычислений представлены в виде зависимостей частот свободных колебаний от угла намотки стекловолокна для оболочки из тканевого стеклопластика при различных значениях параметров волнообразования и различных отношениях между параметрами, характеризующими геометрические размеры оболочки. Проведен сравнительный анализ найденных частот свободных колебаний при нулевом угле намотки стеклоткани и полученных экспериментально частот свободных колебаний ортотропной оболочки, а также частот свободных колебаний ортотропной оболочки, рассчитанных по известным формулам.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, стеклопластик, частота свободных колебаний, метод Рэлея—Ритца, угол намотки стекловолокна

Введение. Одной из важнейших задач на стадии проектирования тонкостенных оболочечных конструкций, широко применяемых в авиационной, ракетно-космической технике и различных областях промышленности, является динамический расчет. Необходимым элементом исследования динамики оболочек является определение собственных частот и форм малых колебаний, причем наибольший интерес для приложений представляют частоты из нижнего спектра [1]. Использование в инженерной практике полимерных материалов, в частности стеклопластиков, делает обязательным учет анизотропии упругих свойств при исследовании низкочастотных колебаний оболочек. Результаты нахождения собственных частот свободных колебаний для ортотропных оболочек представлены в работе [2–4]. В то же время, сведения о частотах свободных колебаний в случае, когда основные направления упругости составляют некоторый угол с координатными линиями, практически отсутствуют, что обусловлено высокой сложностью соответствующих определяющих соотношений. Одним из подходов, позволяющих определить частоты свободных колебаний анизотропных оболочек, является метод приближенного удовлетворения граничных условий, изложенный в монографии [2]. Реализация этого подхода применительно к расчету свободных колебаний конструктивно анизотропной оболочки при граничных условиях, соответствующих шарнирному опиранию и жесткой заделке концов, представлена в

работах [5, 6]. В то же время, применение метода приближенного удовлетворения краевым условиям при более сложных условиях закрепления не позволяет получить характеристические уравнения. В настоящей работе представлены результаты определения собственных частот свободных колебаний цилиндрических оболочек из ориентированного стеклопластика на основании метода Рэлея—Ритца при граничных условиях, соответствующих граничным условиям Навье на обоих концах оболочки.

Определяющие соотношения. Компоненты смещений u , v и w , удовлетворяющие граничным условиям Навье ($v=w=M_{11}=N_{11}=0$ при $\alpha=0$ и $\alpha=l/R$) и приближенно описывающие форму изогнутой поверхности колеблющейся оболочки, представим следующим образом:

$$\begin{aligned} u &= A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi R\alpha}{l}\right) \cos(n\theta) \sin(\omega_{mn}t); \\ v &= B_{mn} \sin\left(\frac{m\pi R\alpha}{l}\right) \sin(n\theta) \sin(\omega_{mn}t); \\ w &= C_{mn} \sin\left(\frac{m\pi R\alpha}{l}\right) \cos(n\theta) \sin(\omega_{mn}t), \end{aligned} \quad (1)$$

где m — число полуволн вдоль образующей цилиндра; n — число волн в окружном направлении; α — выражение в долях радиуса R расстояние по образующей; R — радиус срединной поверхности оболочки; θ — угловая координата в окружном направлении; l — длина оболочки; A_{mn} ,

B_{mn}, C_{mn} — амплитуды колебаний вдоль соответствующих направлений; ω — круговая частота колебаний; u, v и w — перемещения срединной поверхности оболочки в продольном, окружном и радиальном направлении соответственно (перемещения в направлении осей координат x, y и z (см. рисунок 1).

Потенциальную энергию, накапливаемую всей оболочкой при ее упругой деформации, представим в виде:

$$U = \frac{1}{2} R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{l/R} (N_{11}\varepsilon_{11} + N_{22}\varepsilon_{22} + N_{12}\varepsilon_{12} - M_{11}\chi_{11} - M_{22}\chi_{22} - M_{12}\chi_{12}) d\alpha d\theta. \quad (2)$$

Выражения для внутренних сил и моментов представим следующим образом [4]:

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij} + z w_{ij}) dz, \quad M_{ij} = - \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij} + w_{ij} z) z dz; \quad (3)$$

$$w_{11} = B_{11}\chi_{11} + B_{12}\chi_{22} + B_{16}\chi_{12};$$

$$w_{22} = B_{12}\chi_{11} + B_{22}\chi_{22} + B_{26}\chi_{12};$$

$$w_{12} = w_{21} = B_{16}\chi_{11} + B_{26}\chi_{22} + B_{66}\chi_{12}.$$

Внутренние усилия и моменты обозначены на рисунке 1.

Напряжения σ_{ij} и деформации $\varepsilon_{ij}, \chi_{ij}, i, j=1, 2$ в срединной поверхности в соотношениях (3) определяются следующим образом [4]:

$$\sigma_{11} = B_{11}\varepsilon_{11} + B_{12}\varepsilon_{22} + B_{16}\varepsilon_{12};$$

$$\sigma_{22} = B_{12}\varepsilon_{11} + B_{22}\varepsilon_{22} + B_{26}\varepsilon_{12};$$

$$\sigma_{12} = B_{16}\varepsilon_{11} + B_{26}\varepsilon_{22} + B_{66}\varepsilon_{12};$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \alpha}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right); \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right); \quad (4)$$

$$\chi_{11} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}; \quad \chi_{22} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}; \quad \chi_{12} = -\frac{2}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \theta}.$$

Постоянные упругости зависят от угла φ намотки стекловолокна и определяются следующим образом [2]:

$$B_{11} = b_{11}\cos^4(\varphi) + b_{22}\sin^4(\varphi) + \left(b_{66} + \frac{1}{2}b_{12} \right) \sin^2(2\varphi);$$

$$B_{22} = b_{11}\sin^4(\varphi) + b_{22}\cos^4(\varphi) + \left(b_{66} + \frac{1}{2}b_{12} \right) \sin^2(2\varphi);$$

$$B_{12} = (b_{11} + b_{22} - 4b_{66}) \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi) + b_{12}(\sin^4(\varphi) + \cos^4(\varphi));$$

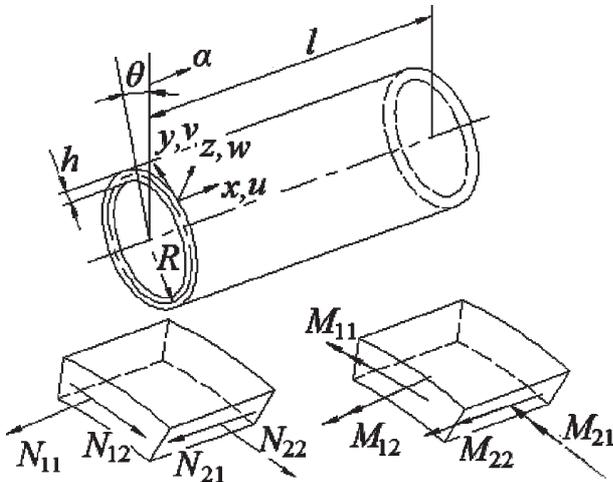


Рисунок 1 — Схема усилий и моментов, действующих на элемент оболочки

$$B_{66} = (b_{11} + b_{22} - 2b_{12}) \sin^2(\varphi) \cos^2(\varphi) + b_{66} \cos^2(2\varphi);$$

$$B_{26} = \frac{1}{2} (b_{22} \cos^2(\varphi) - b_{11} \sin^2(\varphi)) \sin(2\varphi) - \frac{1}{4} (b_{12} + 2b_{66}) \sin(4\varphi);$$

$$B_{16} = \frac{1}{2} (b_{22} \sin^2(\varphi) - b_{11} \cos^2(\varphi)) \sin(2\varphi) - \frac{1}{4} (b_{12} + 2b_{66}) \sin(4\varphi).$$

где b_{11}, b_{22}, b_{12} и b_{66} — основные модули упругости ортотропно-го материала, φ — угол, образуемый направлением стекловолокон с окружным направлением (угол ориентации стекловолокна относительно оси y , обозначенной на рисунке 1).

Кинетическая энергия всей оболочки:

$$T = \frac{1}{2} \rho R^2 \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{l/R} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) d\alpha d\theta dz, \quad (5)$$

где ρ — плотность стеклопластика, h — толщина оболочки.

Подставим соотношения (1), (3) и (4) в выражения (2) и (5) с учетом равенств (1). После соответствующих преобразований будем иметь потенциальную энергию и кинетическую энергию всей оболочки. Подставим полученные выражения в следующее уравнение движения оболочки [4]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{mn}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_{mn}} + \frac{\partial U}{\partial q_{mn}} = 0. \quad (6)$$

Здесь $q_{mn} = \{ A_{mn} \sin(\omega t), B_{mn} \sin(\omega t), C_{mn} \sin(\omega t) \}^T$.

Подставив преобразованные выражения для энергий T и U в уравнение (6), получим:

$$|M\omega_{mn}^2 - K| = 0, \quad (7)$$

где M — матрица массы, K — матрица жесткости.

Анализ собственных частот. Проведем расчет собственных частот на основании численного решения уравнения (7) для оболочки из тканевого стеклопластика, упругие свойства которого показывают основные константы упругости $b_{11}=18,3; b_{22}=25,2; b_{66}=3,5; b_{12}=2,77$ ГПа; плотность $\rho=1850$ кг/м³. Геометрические размеры оболочки описываются постоянными $h=1$ мм, $R=0,5$ м, $l=10$ м. Зависимость собственных частот ω_{mn} от угла намотки стекловолокна φ при $m=1$ и $n=1, 5$ соответственно представлена на рисунке 2.

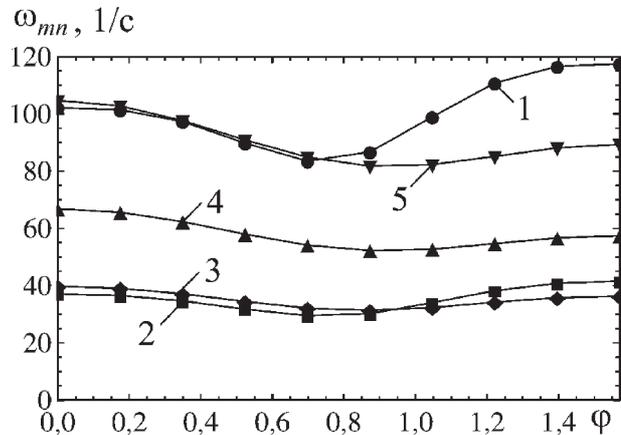


Рисунок 2 — Зависимость собственных частот свободных колебаний ω_{mn} от угла намотки φ при $m=1$: 1 — $n=1$; 2 — $n=2$; 3 — $n=3$; 4 — $n=4$; 5 — $n=5$

Из рисунка 2 видно, что зависимости частот от угла намотки стекловолокна ω_{11} и ω_{15} , а также ω_{12} и ω_{13} пересекаются. При угле $\varphi \leq 55^\circ$ частотой основного тона является частота ω_{12} , при $\varphi > 55^\circ$ — частота ω_{13} .

На рисунке 3 представлены зависимости собственных частот от угла намотки стекловолокна при $n=1$ и $m = \overline{1, 3}$ для различных мод колебаний.

Из рисунка 3 видно, что зависимости частот от угла намотки аналогичны для трех рассмотренных мод колебаний. Минимум частот ω_{11} и ω_{21} достигается при $\varphi=39^\circ$, наименьшее значение частоты ω_{31} соответствует углу $\varphi=0^\circ$. Также отметим, что, как следует из сравнения рисунков 2 и 3, влияние изменения параметра m на величины собственных частот свободных колебаний более существенно, чем параметра n .

На рисунках 4 и 5 показаны зависимости частоты ω_{11} от угла намотки φ для различных отношений h/R и R/l .

Из рисунка 4 следует, что влияние изменения отношения h/R на величину собственной частоты ω_{11} имеет достаточно сложный характер. Характер зависимости усложняется при уменьшении отношения h/R .

Как видно из рисунка 5 при малых значениях отношения R/l величины собственных частот свободных колебаний практически не изменяются для различных углов намотки стекловолокна. При увеличении значения R/l зависимость $\omega_{11}(\varphi)$ приобретает более сложный характер, и значения частот возрастают.

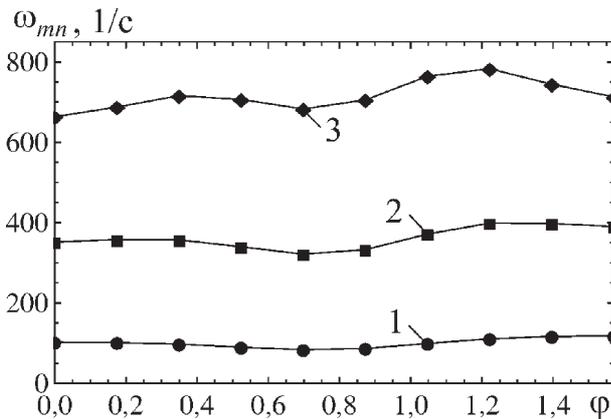


Рисунок 3 — Зависимость собственных частот свободных колебаний ω_{mn} от угла намотки φ при $n=1$: 1 — $m=1$; 2 — $m=2$; 3 — $m=3$

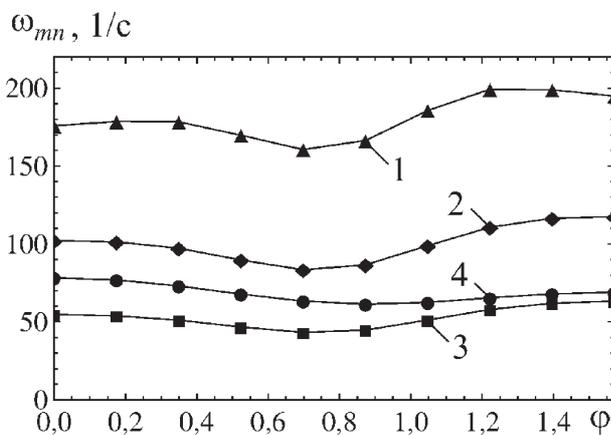


Рисунок 4 — Зависимость собственных частот свободных колебаний ω_{mn} от угла намотки φ при $m=n=1$ для различных отношений h/R равно: 1 — 0,001; 2 — 0,002; 3 — 0,004; 4 — 0,01

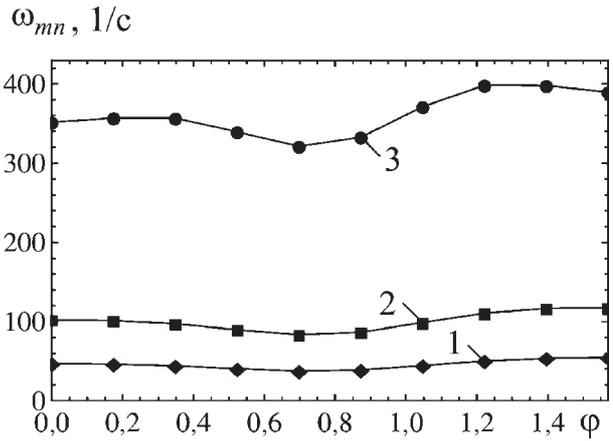


Рисунок 5 — Зависимость собственных частот свободных колебаний ω_{mn} от угла намотки φ при $m=n=1$ для различных отношений R/l равно: 1 — 1/30; 2 — 1/20; 3 — 1/10

Проведем сравнительный анализ величин собственных частот свободных колебаний цилиндрической оболочки ω , рассчитанных на основании решения уравнения (7) при $\varphi=0^\circ$ (основные направления упругости совпадают с координатными линиями), экспериментально найденных значений частот ω_e [2] и значений частот ω_0 , рассчитанных на основании известных формул для ортотропных оболочек [2]. Основные модули упругости стеклопластика прежние. Относительная погрешность находилась по формуле $\delta = |(\omega_{mn} - \omega_e) / \omega_{mn}|$. Результаты расчета приведены в таблице.

Таблица — Результаты расчета частот на основании метода Рэлея-Ритца при $\varphi = 0^\circ$, экспериментально полученные значения частот и значения частот для ортотропной оболочки

l , мм	R , мм	h , мм	m/n	ω , 1/c	ω_0 , 1/c	ω_e , 1/c	δ , %			
440	57,5	1	1/2	348	348	410	17,8			
			1/3	463	464	475	2,6			
			1/4	803	804	740	7,8			
412	57,5	1	1/2	383	380	400	4,4			
			1/3	471	471	520	10,4			
			1/4	804	822	830	3,2			
			2/3	740	739	745	0,7			
			525	65	1	1/2	277	277	308	11,2
						1/3	363	364	330	9,1
1/4	628	629				575	8,4			
1/5	986	987				935	5,2			
2/2	789	818				825	4,6			
240	57,5	0,5	1/2	837	834	875	4,5			
			1/4	486	488	455	6,4			
			1/5	658	660	660	0,3			
			1/6	923	925	910	1,4			
200	57,5	0,5	1/4	555	555	515	7,2			
			1/6	934	937	930	0,4			
220	57,5	0,5	1/2	957	951	940	1,8			
			1/4	514	518	540	5,1			

Приведенные в таблице данные позволяют сделать вывод о том, что результаты расчета частот на основании метода Рэлея—Ритца достаточно хорошо согласуются с опытными и теоретическими данными [2, 3] и могут быть использованы в инженерных расчетах при проектировании стеклопластиковых конструкций.

Заключение. Приближенный расчет собственных частот свободных колебаний нижнего спектра цилиндрических оболочек из стеклопластика при граничных условиях Навье, выполненный на основании метода Рэлея—Ритца, показывает, что значения частот существенно зависят от угла намотки стекловолокна. Значения собственных частот ω_{mn} для одних и тех же углов намотки стекловолокна находятся в соотношении, которое соответствует результатам натурных экспериментов и результатам, рассчитанным для ортотропных оболочек на основании известных аналитических выражений [2—4]. В частности, значения частот свободных колебаний для ортотропной оболочки, рассчитанные в работе [2] при точном удовлетворении граничным условиям Навье, практически совпадают с частотами, найденными при решении характеристического уравнения (7) при нулевом угле намотки

стекловолокна. Это обстоятельство делает возможным использование полученных в работе результатов при проектировании цилиндрических оболочек из стеклопластика.

Список литературы

1. Михасев, Г.И. Локализованные колебания и волны в тонких оболочках. Асимптотические методы / Г.И. Михасев, П.Е. Товстик. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 292 с.
2. Бажанов, В.Л. Сопротивление стеклопластиков / В.Л. Бажанов [и др.] // М.: Машиностроение, 1968. — 304 с.
3. Lee, Y.S. Effect of boundary conditions on natural frequencies for rotating composite cylindrical shells with orthogonal stiffeners / Y.S. Lee, Y.W. Kim // *Advances in Engineering Software*. — 1999. — Vol. 30. — pp. 649—655.
4. Xu, Zh. *Elasticity* / Zhilun Xu. — Beijing: Higher Education Press, 2006. — Vol. II. — 287 p.
5. Босьяков, С.М. Определение собственных частот анизотропной цилиндрической шарнирно опертой оболочки из ориентированного стеклопластика / С.М. Босьяков, В. Чживэй // *Механика машин, механизмов и материалов*. — 2011. — № 2. — С. 54 — 57.
6. Босьяков, С.М. Определение собственных частот свободных колебаний тонкой цилиндрической оболочки из стеклопластика при несимметричных граничных условиях / С.М. Босьяков, В. Чживэй // *Вестн. БГУ. Сер. 1*. — 2011. — № 1. — С. 110 — 115.

Bosiakov S.M., Zhiwei W.

Free vibration analysis of cylindrical shell from fiberglass with Navier boundary conditions

The analytical solution of approximate natural frequencies for the free vibration of cylindrical shells of GFRP (glass fiber reinforced plastic) with Navier boundary conditions is presented using the Rayleigh-Ritz method, while the winding angle varies. Frequency variations for different vibration modes with certain shell's geometrical parameters are discussed. The effect of shell's geometrical parameters is also investigated on natural frequencies.

Поступила в редакцию 19.11.2010.