

УДК 539.3

М.А. МЕХТИЕВ

Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ВЯЗКОУПРУГИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

В данной работе с помощью вариационного принципа в геометрически нелинейной постановке решена задача о параметрическом колебании подкрепленной перекрестной системой ребер цилиндрической оболочки, контактирующей с внешней вязкоупругой средой и находящейся под действием внутреннего давления. Влияния внешней среды учтены с применением модели Пастернака. Приведены зависимости зоны динамической устойчивости от параметров конструкции на плоскости «нагрузка — частота» и представлены в виде кривой.

**Ключевые слова:** ребристая оболочка, вязкоупругость, параметрические колебания, динамическая устойчивость, модель Пастернака, частота колебания

Тонкостенные оболочечные конструкции находят большое применение в ракетостроении, самолетостроении, судостроении и строительстве. Для большей жесткости оболочки подкрепляют ребрами, при этом незначительное увеличение массы конструкции существенно повышает ее прочность даже в случае, когда ребра имеют малую высоту. Такие конструкции могут находиться в контакте с внешней средой и подвергаться не только статическим нагрузкам, но и динамическим, и допускать прогибы, соизмеримые с толщиной. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания таких конструкций играют важную роль при проектировании современных машин и аппаратов. Тем не менее, поведение тонкостенных конструкций, имеющих ребра, с учетом дискретности расположения ребер, влияния внешней среды и геометрической нелинейности исследованы недостаточно. С применением вариационного принципа и модели Пастернака, параметрические колебания нелинейной и неоднородной по толщине вязкоупругой неподкрепленной цилиндрической оболочки с наполнителем исследованы в работах [1, 2].

Дифференциальные уравнения движения и естественные граничные условия для ребристой цилиндрической оболочки, контактирующей со средой, получим на основе вариационного принципа Остроградского—Гамильтона. Для применения принципа Остроградского—Гамильтона предварительно запишем потенциальную и кинетическую энергии системы.

Потенциальная энергия упругой деформации цилиндрической оболочки имеет вид [3]:

$$\begin{aligned} \Pi_0 = & \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left\{ N_x \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + \right. \\ & + N_y \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) + N_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \\ & \left. - M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (1)$$

Выражения для потенциальной энергии упругой деформации  $i$ -го продольного и  $j$ -го поперечного ребер таковы [4]:

$$\begin{aligned} \Pi_i = & \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left[ E_i F_i \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + E_i J_{yi} \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right)^2 + \right. \\ & \left. + E_i J_{zi} \left( \frac{\partial^2 \vartheta_i}{\partial x^2} \right)^2 + G_i J_{kpi} \left( \frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial x} \right)^2 \right] dx; \\ \Pi_j = & \frac{1}{2} \int_{y_1}^{y_2} \left[ E_j F_j \left( \frac{\partial \vartheta_j}{\partial y} - \frac{w_j}{R} \right)^2 + E_j J_{xj} \left( \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + \frac{w_j}{R^2} \right)^2 + \right. \\ & \left. + E_j J_{zj} \left( \frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} - \frac{\varphi_{kpi}}{R} \right)^2 + G_j J_{kpi} \left( \frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_j}{\partial y} \right)^2 \right] dy. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $F_i, J_{yi}, J_{zi}, J_{kpi}$  — площадь и моменты инерции поперечного сечения  $i$ -го продольного стержня относительно оси  $Oz$  и оси, параллельной оси  $Oy$  и проходящей через центр тяжести сечения, а также его момент инерции при кручении;  $F_j, J_{xj}, J_{zj}, J_{kpi}$  — аналогичные величины для  $j$ -го поперечного стержня;  $E_i, G_i$  и  $E_j, G_j$  — модули упругости и сдвига материала  $i$ -го продольного и  $j$ -го поперечного стержня соответственно.

Потенциальная энергия внешних поверхностных и краевых нагрузок, приложенных к обшивке, определяется как работа, совершаемая этими нагрузками при переводе системы из деформированного состояния в начальное недеформированное, и представляется в виде:

$$A_0 = - \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} (q_x u + q_y \vartheta + q_z w) dx dy - \int_{y_1}^{y_2} (T_1 u + S_1 \vartheta + Q_1 w + M_1 \varphi) \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} dy - \int_{x_1}^{x_2} (S_2 u + T_2 \vartheta + Q_2 w + M_2 \varphi) \Big|_{y=y_1}^{y=y_2} dx. \quad (3)$$

В выражениях (1)–(3)  $x_1, x_2, y_1, y_2$  — координаты криволинейных и прямолинейных краев оболочки. Потенциальные энергии внешних краевых нагрузок, приложенных к торцам соответственно  $i$ -го продольного и  $j$ -го поперечного стержня, аналогично определяются следующими выражениями (предполагается, что к ребрам приложены только краевые нагрузки):

$$A_i = - (T_i u_i + S_i \vartheta_i + Q_i w_i + M_i \varphi_i + M_{i\varphi} \varphi_{zi} + M_{kpi} \varphi_{kpi}) \Big|_{x=x_1}^{x=x_2}; \quad (4)$$

$$A_j = - (S_j u_j + T_j \vartheta_j + Q_j w_j + M_j \varphi_j + M_{j\varphi} \varphi_{zj} + M_{kpi} \varphi_{kpi}) \Big|_{y=y_1}^{y=y_2}.$$

Полная потенциальная энергия системы равна сумме потенциальных энергий упругих деформаций оболочки и ребер, а также потенциальных энергий всех внешних нагрузок:

$$\Pi = \Pi_0 + \sum_{i=1}^k \Pi_i + \sum_{j=1}^{k_1} \Pi_j + A_0 + \sum_{i=1}^k A_i + \sum_{j=1}^{k_1} A_j. \quad (5)$$

Кинетические энергии оболочки и ребер записываются в виде:

$$K_0 = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^{\xi_1} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] d\xi d\theta; \quad (6)$$

$$K_i = \rho_i F_i \int_{x_1}^{x_2} \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \vartheta_i}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{kpi}}{F_i} \left( \frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial t} \right)^2 \right] dx; \quad (7)$$

$$K_j = \rho_j F_j \int_{y_1}^{y_2} \left[ \left( \frac{\partial u_j}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \vartheta_j}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_j}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{kpi}}{F_j} \left( \frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial t} \right)^2 \right] dx. \quad (8)$$

Здесь  $t$  — временная координата;  $t_1 = \omega_0 t$ ;  
 $\omega_0 = \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\rho_0 R^2}}$ ;  $\rho_0, \rho_i, \rho_j$  — плотности материалов, из которых изготовлены оболочка,  $i$ -й продольный и  $j$ -й поперечный стержни.

Кинетическая энергия ребристой оболочки:

$$K = K_0 + \sum_{i=1}^k K_i + \sum_{j=1}^{k_1} K_j. \quad (9)$$

Уравнения движения ребристой оболочки, контактирующей с вязко-упругой средой получены на основе принципа стационарности действия Остроградского—Гамильтона:

$$\delta W = 0, \quad (10)$$

где  $W = \int_{t'}^{t''} \tilde{L} dt$  — действие по Гамильтону;  $\tilde{L} = K - \Pi$  — функция Лагранжа;  $t'$  и  $t''$  — заданные произвольные моменты времени.

Интенсивность нагрузки, действующей на оболочку со стороны вязкоупругого заполнителя, можно написать в следующем виде:

$$q_z = k_c w - \int_{-\infty}^t \Gamma(t-\tau) w(\tau) d\tau, \quad (11)$$

где  $\Gamma$  — ядро релаксации [5], а коэффициент  $k_c$  определяется зависимостью  $k_c = q_1 + q_0 \nabla^2$  (модель Пастернака), где  $\nabla^2$  — двумерный оператор Лапласа на поверхности контакта;  $w$  — прогиб оболочки;  $q_0, q_1$  — постоянные.

Учитывая, что имеет место постоянство радиальных прогибов по высоте сечений, а также равенства соответствующих углов закручивания, вытекающие из условий жесткого соединения ребер с оболочкой, записываем следующие соотношения:

$$u_i(x) = u(x, y_i) + h_i \varphi_1(x, y_i);$$

$$\vartheta_i(x) = \vartheta(x, y_i) + h_i \varphi_2(x, y_i); \quad w_i(x) = w(x, y_i);$$

$$\varphi_i = \varphi_1(x, y_i); \quad \varphi_{kpi}(x) = \varphi_2(x, y_i);$$

$$u_j(y) = u(x_j, y) + h_j \varphi_1(x_j, y); \quad (12)$$

$$\vartheta_j(x) = \vartheta(x_j, y) + h_j \varphi_2(x_j, y); \quad w_j(x) = w(x_j, y);$$

$$\varphi_j = \varphi_2(x_j, y); \quad \varphi_{kpi}(x) = \varphi_1(x_j, y).$$

Здесь  $h_i = 0,5h + H_i^1$ ;  $h_j = 0,5h + H_j^1$ ;  $h$  — толщина оболочки;  $H_i^1$  и  $H_j^1$  — расстояния от осей  $i$ -го продольного и  $j$ -го поперечного стержня до поверхности оболочки;  $x_i$  и  $y_j$  — координаты линий сопряжения ребер с оболочкой;  $\varphi_i, \varphi_{kpi}$  и  $\varphi_j, \varphi_{kpi}$  — углы поворота и закручивания поперечных сечений, соответственно, продольных и поперечных стержней.

С учетом соотношений (12) перемещение стержней выражаем через перемещение оболочки. Из условия стационарности (10) получаем системы нелинейных алгебраических уравнений относительно искомого неизвестных.

На примере рассмотрим нелинейные параметрические колебания подкрепленной круговой цилиндрической оболочки под действием радиальной нагрузки  $q = q_0 + q_1 \sin \omega t$ , где  $q_0$  — средняя или основная нагрузка,  $q_1$  — амплитуда изменения нагрузки;  $\omega$  — частота ее изменения. Считая, что края оболочки шарнирно оперты, т.е. при  $x=0$ ;  $l$ :

$$N_x = 0; \quad M_x = 0; \quad \vartheta = 0; \quad w = 0. \quad (13)$$

Неизвестные величины аппроксимируем следующим образом:

$$u = \cos \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (u_0 \cos \omega t + u_1 \sin \omega t);$$

$$\vartheta = \sin \frac{\pi x}{l} \cos(k\varphi) (\vartheta_0 \cos \omega t + \vartheta_1 \sin \omega t);$$

$$w = \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (w_0 \cos \omega t + w_1 \sin \omega t);$$

$$N_x = \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (N_{x0} \cos \omega t + N_{x1} \sin \omega t); \quad (14)$$

$$N_y = \cos \frac{\pi x}{l} \cos(k\varphi) (N_{y0} \cos \omega t + N_{y1} \sin \omega t);$$

$$N_{xy} = -qR + \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (N_{xy0} \cos \omega t + N_{xy1} \sin \omega t);$$

$$M_x = \sin \frac{\pi x}{l} \sin(k\varphi) (M_{x0} \cos \omega t + M_{x1} \sin \omega t);$$

$$M_y = \sin \frac{\pi X}{l} \sin(k\varphi) (M_{y0} \cos \omega t + M_{y1} \sin \omega t);$$

$$M_{xy} = \sin \frac{\pi X}{l} \cos(k\varphi) (M_{xy0} \cos \omega t + M_{xy1} \sin \omega t),$$

где  $k$  — число волн в окружном направлении,  $\omega$  — частота колебания искомого величин  $u, \vartheta, w, N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}$ . Подставим аппроксимации (14) в функционале (5)

и, учитывая, что  $x_1=0, x_2=l, y_1=0, y_2=2\pi, t'=0, t'' = \frac{2\pi}{\omega}$ , проинтегрируем по  $x, y$  и  $t$ . Тогда вместо функционала (5) получаем функцию от искомого величин  $u_m, \vartheta_m, w_m, N_{xm}, N_{ym}, M_{xm}, M_{ym}, M_{xym}$ . Стационарное значение полученной функции определяется следующей системой:

$$\begin{aligned} &1) \frac{\partial J}{\partial u_0} = 0; 2) \frac{\partial J}{\partial u_1} = 0; 3) \frac{\partial J}{\partial \vartheta_0} = 0; 4) \frac{\partial J}{\partial \vartheta_1} = 0; \\ &5) \frac{\partial J}{\partial w_0} = 0; 6) \frac{\partial J}{\partial w_1} = 0; 7) \frac{\partial J}{\partial N_{x0}} = 0; 8) \frac{\partial J}{\partial N_{x1}} = 0; \\ &9) \frac{\partial J}{\partial N_{y0}} = 0; 10) \frac{\partial J}{\partial N_{y1}} = 0; 11) \frac{\partial J}{\partial N_{xy0}} = 0; \\ &12) \frac{\partial J}{\partial N_{xy1}} = 0; 13) \frac{\partial J}{\partial M_{x0}} = 0; 14) \frac{\partial J}{\partial M_{x1}} = 0; \\ &15) \frac{\partial J}{\partial M_{y0}} = 0; 16) \frac{\partial J}{\partial M_{y1}} = 0; \\ &17) \frac{\partial J}{\partial M_{xy0}} = 0; 18) \frac{\partial J}{\partial M_{xy1}} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Нелинейные системы уравнений (15) решены методом Ньютона при следующих исходных данных [4]:

$$E=E_i=E_j=6,67 \cdot 10^9 \text{ н/м}^2; \nu=0,3; n=8;$$

$$h_j=1,39 \text{ мм}; k=16; R=160 \text{ мм}; q/q_0=3; q_0/E=0,002.$$

Кроме того,  $M(t-\tau)=\beta=const; \Gamma(t)=Ae^{-\psi t} (\psi=0,05;$

$$A=0,1615); \frac{J_{yi}}{2\pi R^3 h} = 0,8289 \cdot 10^{-6}; h=0,45 \text{ мм}; |h_i| = 0,1375 \cdot 10^{-1} R;$$

$$\frac{J_{kp,i}}{2\pi R^3 h} = 0,5305 \cdot 10^{-6}; l=800 \text{ мм}; F_j=5,75 \text{ мм}^2; J_{xj}=19,9 \text{ мм}^4;$$

$$I_{kp,j}=0,48 \text{ мм}^4; \frac{F_i}{2\pi R h} = 0,1591 \cdot 10^{-1}; k_1=4; \rho_0=7,8 \text{ г/см}^3;$$

$$\tau_0 = \frac{q_0}{Eh^3} = 0,08; \tau_1 = \frac{q_1}{Eh^3}.$$

На рисунке приведены зависимости зоны динамической устойчивости от параметров конструкции на плоскости «нагрузка — частота». Кривая разделяет плос-

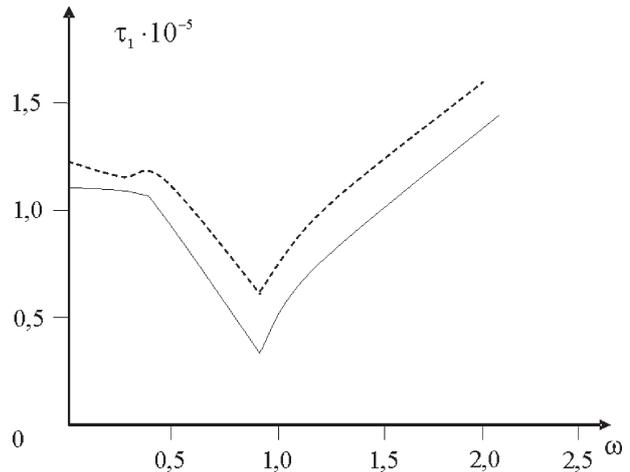


Рисунок — Области устойчивости и неустойчивости параметрических колебаний

кость на две области: для точек, одной из которых колебания ограничены, а для другой — неограниченны во времени. В графике сплошной линии соответствуют колебания цилиндрической оболочки в вязкоупругой среде, а пунктирной — в упругой среде. Из расчета оболочки имеем, что для вязкоупругого тела точка перелома характерной кривой поднимается над осью частот. Кроме того, расчет показывает, что учет влияния среды приводит к увеличению силы  $\tau_1$ .

#### Список литературы

1. Пирмамедов, И.Т. Параметрические колебания вязкоупругой оболочки, с учетом повреждаемости, заключенной в вязкоупругую матрицу / И.Т. Пирмамедов // Механика машин, механизмов и материалов. — 2009. — № 1 (6). — С. 52—55.
2. Пирмамедов, И.Т. Параметрические колебания нелинейной вязкоупругой цилиндрической оболочки, заключенной в вязкоупругую матрицу, с применением «динамической» модели Пастернака и с учетом трения / И.Т. Пирмамедов // Естественные и технические науки. — 2008. — № 6(38). — С. 27—32.
3. Вольмир, А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек / А.С. Вольмир. — М.: Наука, 1972. — 432 с.
4. Амиро, И.Я. Теория ребристых оболочек. Методы расчета оболочек / И.Я. Амиро, В.А. Заруцкий. — Киев: Наук. думка, 1980. — 367 с.
5. Гельфанд, И.М. Обобщенные функции и действия над ними / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шиллов. — М.: Физматгиз, 1959. — 470 с.

Mehtiyev M.A.

#### Nonlinear parametric vibrations of stiffened cylindrical shell with a viscoelastic filler

In the paper, a problem on parametric vibration of a stiffened cross system of ribs cylindrical shell contacting with external viscoelastic medium and situated under the action of internal pressure is solved in a geometric nonlinear statement by means of the variation principle. Influences of environment have been taken into account by means of the Pasternak model. Dependencies of dynamic stability area on parameters of the construction on the «load-frequency» plane are reduced and respresented on the form of a curve.

Поступила в редакцию 15.01.2011.