

УДК 681.3.06

С.В. ЛЯХОВ, канд. техн. наук

Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси, г. Минск

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ ОЦЕНКИ СИСТЕМ КОНТРОЛЯ УСТОЙЧИВОСТИ ГРУЗОВЫХ АВТОМОБИЛЕЙ И АВТОБУСОВ

*В статье рассматриваются вопросы моделирования эластичного колеса и динамики движения автомобиля в части оценки курсовой и поперечной устойчивости.*

**Ключевые слова:** динамика автомобиля, эластичное колесо, математическая модель, курсовая и поперечная устойчивость

**Введение.** Согласно новым поправкам к правилам ЕЭК ООН № 13, устанавливаются требования к системам контроля устойчивости автомобиля, и предлагается, как один из методов их оценки, метод с использованием аппаратно-программного комплекса на основе компьютерного моделирования. К моделированию предъявляются жесткие требования по соответствию получаемых результатов лабораторно-дорожным испытаниям, возможности вывода большого количества параметров, аналогично параметрам, снимаемым с датчиков, разбросанных по всему автомобилю. Сама разработка систем контроля устойчивости строится в большей степени на анализе компьютерного моделирования. Поскольку речь идет о моделировании курсовой и поперечной устойчивости, особое значение приобретает достоверность модели динамики вращения колеса, его взаимодействия с опорной поверхностью, распределения поддрессоренных и неподдрессоренных масс, которое связано с работой подвески и несущей конструкции.

Особенностью программ моделирования, работающих в аппаратно-программных комплексах, является обеспечение режима реального времени для вычисления и передачи данных с компьютера на внешнее устройство. Это накладывает ограничение на использование стандартных программ, таких как: ADAMS [1], EULER [2], «Универсальный механизм» [3], которые автоматически синтезируют систему уравнений и ее решают. Актуальным является разработка специализированных программ с жестко заданной системой уравнений и ее решением.

Задачей работы являлся анализ существующих математических моделей динамики автомобиля (так называемых «моделей с 14 степенями свободы», подробно описанных в [4]), с целью предложить новые необходимые решения и разработать программное обеспечение, соответствующее указанным требованиям. Модель динамики автомобиля в работе строится на классических уравнениях Лагранжа второго рода, на которую накладываются модели элементов и узлов автомобиля.

**Модель колеса автомобиля.** Рассматриваемая схема баланса сил колеса автомобиля представлена на рисунке 1. Силы сцепления колеса с опорной поверхностью, как правило, описываются [5]:

$$F_x = \mu_x(s, \alpha) F_z, \quad F_y = \mu_y(s, \alpha) F_z, \\ M_z = \mu_z(s, \alpha) F_z,$$

где  $F_x, F_y$  — продольная и поперечная силы сцепления колеса с опорной поверхностью;  $M_z$  — стабилизирующий

момент;  $\mu_x, \mu_y, \mu_z$  — продольный, поперечный и стабилизирующий моменты сцепления колеса с поверхностью;  $F_z$  — действующая на поверхность сила;  $s$  — проскальзывание колеса;  $\alpha$  — угол бокового увода.

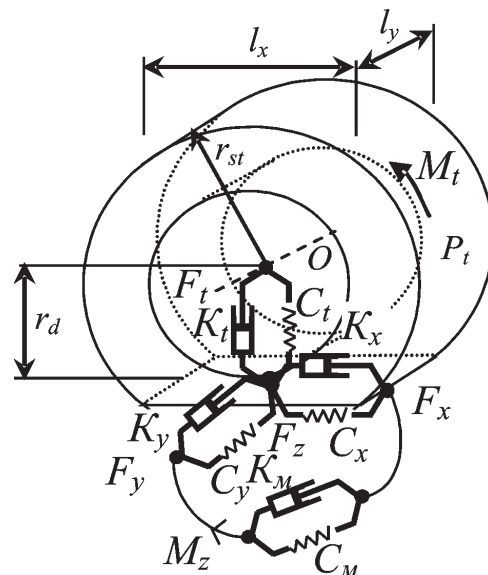
Характеристики продольного и поперечного сцеплений можно аппроксимировать по методу [6]:

$$\mu_x = s \cdot \cos \alpha \left( \frac{C_1(1 - e^{-C_2 \cdot s_{sum}})}{s_{sum}} - C_3 \right), \quad (1)$$

$$\mu_y = (1 - s) \sin \alpha \left( \frac{C_1(1 - e^{-C_2 \cdot s_{sum}})}{s_{sum}} - C_3 \right), \quad (2)$$

$$s_{sum} = \sqrt{s^2 + 2(1 - \cos \alpha)(1 - s)},$$

где  $C_1, C_2, C_3$  — коэффициенты,  $s_{sum}$  — суммарное проскальзывание.



**Рисунок 1** — Схема баланса сил колеса автомобиля:  $F_t$  — вертикальная сила шины;  $F_x, F_y$  — продольная и поперечная силы сцепления;  $M_z$  — стабилизирующий момент;  $F_z$  — сила на опорную поверхность;  $M_t$  — тормозной момент;  $C_t$  — вертикальная жесткость;  $K_t$  — вертикальное сопротивление;  $C_x, C_y, C_m$  — продольная, поперечная и стабилизирующего момента жесткости шины;  $K_x, K_y, K_m$  — продольная, поперечная и стабилизирующего момента сопротивления шины;  $O$  — ось колеса;  $P_t$  — давление в шине;  $r_{st}$  — статический радиус колеса;  $r_d$  — динамический радиус колеса;  $l_x$  — длина пятна контакта;  $l_y$  — ширина пятна контакта

Автор в [6] предлагает ввести зависимость сцепления от скорости колеса путем умножения на член:

$$e^{-C_4 \lambda_v},$$

где  $\lambda_v$  — проскальзывание при скорости 0,02—0,04 м/с;  $C_4$  — коэффициент.

Поскольку в [6] не предложена формула сцепления стабилизирующего момента, для аппроксимации воспользуемся методом, описанным в [5], где сцепление стабилизирующего момента может быть представлено произведением поперечного сцепления и зависимости, отражающей изменение сцепления от бокового увода колеса:

$$\mu_z = \mu_y \cdot C_5 \cos(\alpha) \cdot \cos(C_6 \cdot \arctg(C_7 \times \alpha - C_8(C_7 \cdot \alpha - \arctg(C_7 \cdot \alpha)))) \quad (3)$$

где  $C_5, C_6, C_7, C_8$  — коэффициенты.

На устойчивость автомобиля существенное влияние оказывает степень эластичности колес, приводящая к возникновению переходных процессов параметров движения и затягиванию их по времени. Приведенные формулы (1—3) отражают характеристики в устоявшемся режиме (являются статическими). Для отражения динамических процессов дополнить силу жесткости шины, прибавив силу сопротивления уводу колеса, автор считает некорректным, поскольку аппроксимации отражают экспериментальные зависимости, несущие в себе полный баланс сил. Придать характеристикам сцепления динамические свойства можно, дополнив известную формулу угла бокового увода для жесткого колеса

$$\alpha_f = \varphi - \arctg\left(\frac{V_y \pm \Omega \cdot \alpha_i}{V_x \pm \Omega \cdot b_i}\right) \quad (4)$$

формулой, отражающей динамику увода эластичного колеса:

$$\alpha = \alpha_f - C_8 \cdot v_\alpha, \quad (5)$$

где  $\varphi$  — угол поворота колеса по оси  $z$ ;  $V_x, V_y$  — продольная и поперечная скорости автомобиля;  $\Omega$  — скорость рысканья автомобиля;  $a_i, b_i$  — проекции на ось  $x$  и  $y$  от центра масс до оси  $z$  поворота колеса;  $v_\alpha$  — скорость изменения угла бокового увода;  $C_8$  — коэффициент сопротивления уводу.

Исходя из формулы увода (4), статическое проскальзывание жесткого колеса для тормозного режима определяется:

$$s_f = 1 - \frac{w_k \cdot r_d}{(V_x \pm \Omega b_i) \cos(\varphi) + (V_y \pm \Omega a_i) \sin(\varphi)},$$

где  $w_k$  — угловая скорость колеса;  $r_d$  — динамический радиус колеса.

Введем по аналогии с боковым уводом формулу, отражающую динамику проскальзывания колеса:

$$s = s_f - C_9 \cdot v_s, \quad (6)$$

где  $v_s$  — скорость изменения проскальзывания колеса,  $C_9$  — коэффициент сопротивления проскальзыванию.

Силу деформации шины по оси  $z$  опишем:

$$F_c = 2 \cdot p_t \cdot l_y \sqrt{r_{st}^2 - r_d^2},$$

где  $p_t$  — давление воздуха в шине;  $l_y$  — ширина пятна контакта колеса;  $r_{st}$  — статический радиус колеса.

Силу демпфирования (сопротивления) шины по оси  $z$  опишем формулой (7) аналогично амортизатору.

Действие формул (5) и (6) будет показано ниже.

**Расчет координат центра масс и сил со стороны поддресоренной массы.** Модель автомобиля включает поддресоренную и четыре неподдресоренные массы, каждая из которых включает массу колеса и половину массы оси. Действие сил со стороны поддресоренной массы на узлы подвесок для каждого колеса описывается формулой:

$$F_m = m_p (g \cdot K_m + K_x \cdot a_x + K_y \cdot a_y),$$

где  $K_m$  — весовой коэффициент действия массы при статическом состоянии автомобиля;  $K_x, K_y$  — весовые коэффициенты действия массы по проекциям  $x$  и  $y$  автомобиля в состоянии динамики;  $a_x, a_y$  — продольное и поперечное ускорение автомобиля;  $m_p$  — поддресоренная масса;  $g$  — ускорение свободного падения.

Весовые коэффициенты находятся путем расчета координат центра поддресоренной массы в трехмерном пространстве, согласно схеме, представленной на рисунке 2, и зависят от величин масс, высоты центра масс, углов наклона рамы во времени. Сначала производится перерасчет координат центра поддресоренной массы от координат центра массы всего автомобиля. Затем производится перерасчет координат центра поддресоренной массы в зависимости от продольного и поперечного наклона рамы и, с учетом этого, обратный перерасчет координат центра масс автомобиля. Данные координаты используются для расчета углов бокового увода и моментов, вращающих автомобиль.

**Модель несущей конструкции и подвески автомобиля.**

В большинстве классических моделей автомобиля, рассматривающих вопросы устойчивости, баланс сил по оси  $z$  представлен рассмотрением сил, связанных с перераспределением силы тяжести от продольных и поперечных ускорений автомобиля, действием сил элементов жесткости (рессора или пневмобаллон) и элементов сопротивления (амортизатора) подвески.

Первичное моделирование показало ограниченность в использовании такой модели и приближенность полу-

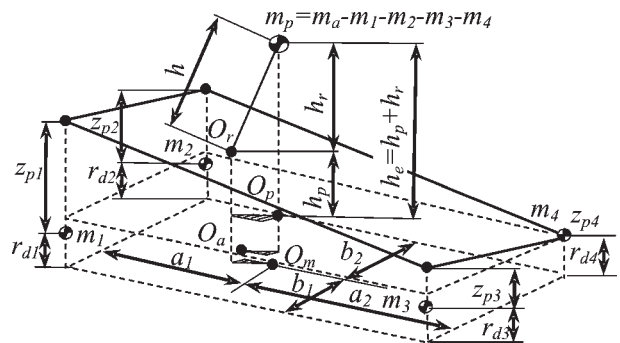


Рисунок 2 — Геометрическая схема пятимассовой модели:

$m_a$  — масса автомобиля;  $m_p$  — поддресоренная масса;  $m_{1-4}$  — неподдресоренные массы (колеса с осями);  $O_m$  — проекция центра масс автомобиля в статическом состоянии на плоскость  $x-y$ ;  $O_r$  — проекция центра поддресоренной массы на плоскость рамы;  $O_p$  — проекция центра поддресоренной массы на плоскость  $x-y$ ;  $O_s$  — проекция центра масс автомобиля в динамическом состоянии на плоскость  $x-y$ ;  $h_e$  — эффективная высота центра поддресоренной масс от уровня минимальной из высот узлов подвесок;  $h$  — высота центра поддресоренной массы от плоскости рамы;  $h_r$  — проекция на ось  $z$  высоты центра поддресоренной масс;  $h_p$  — высота до точки проекции центра масс на плоскость рамы от уровня минимальной из высот узлов подвесок;  $a_1, a_2, b_1, b_2$  — координаты проекции центра масс автомобиля в статическом состоянии;  $z_{p1-4}$  — высоты узлов подвесок;  $r_{d1-4}$  — динамические радиусы колес

чаемых результатов, поскольку силовая связь между узлами подвесок каждого колеса осуществляется только за счет сил, связанных с перераспределением поддресоренной массы. В результате колебание подвески каждого колеса «живет своей собственной жизнью». Классическая модель дополнена моделями стабилизатора поперечной устойчивости и рамы автомобиля. Стабилизаторы связывают поперечные точки, а рама — диагональные. Тогда колебания узлов подвесок носят жестко связанный характер, что приводит к меньшим амплитудам колебаний и их более быстрому затуханию. Расчетная схема модели несущей конструкции и подвески, приходящейся на одно колесо, представлена на рисунке 3.

Модель стабилизатора представляет торсион, на концах которого закреплены рычаги. Сила жесткости стабилизатора описывается:

$$F_{stc} = \frac{C_v}{l_v} \lambda_{st} = \frac{C_v}{l_v} 2 \arcsin \left( \frac{x_{st}}{2 \cdot l_r} \right),$$

где  $C_v$  — коэффициент жесткости вала стабилизатора;  $l_v$  — длина вала стабилизатора;  $\lambda_{st}$  — угол между рычагами стабилизатора;  $x_{st}$  — величина хода рычагов;  $l_r$  — длина рычагов.

Модель рамы представляет лонжероны с закрепленными поперечинами. Сила жесткости рамы, действующая на точку крепления подвески на одно колесо, описывается:

$$F_{rc} = \pm \frac{2E_l \cdot j_l}{a^2} (\lambda_1 - \lambda_3) \pm \frac{2E_p \cdot j_p}{b^2} (\lambda_2 - \lambda_4),$$

где  $a, b$  — длины лонжеронов и поперечин;  $E_p, E_l$  — модули упругости лонжеронов и поперечин;  $J_p, J_l$  — момен-

ты инерции сечений лонжеронов и поперечин;  $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_2, \lambda_4$  — углы изгибов лонжеронов и поперечин.

Сила сопротивления рамы описывается:

$$F_{ra} = \pm K_l \cdot v_{1-3} \pm K_p \cdot v_{2-4},$$

где  $K_p, K_l$  — сопротивления лонжеронов и поперечин;  $v_{1-3}, v_{2-4}$  — скорости изменения углов изгибов лонжеронов и поперечин.

Модель подвески на узел одного колеса включает пневмобаллон, рессору-рычаг и амортизатор. Сила пневмобаллона описывается в [7] и, с учетом действия рессоры-рычага, будет:

$$F_b = \left[ p_{b0} \left( \frac{V_0}{V} \right)^n - p_a \right] S \left( \frac{x_2}{x_1} \right),$$

где  $p_{b0}$  — давление воздуха в упругом элементе в состоянии статического равновесия;  $V_0$  — объем упругого элемента в состоянии статического равновесия;  $V$  — текущий объем упругого элемента;  $n$  — показатель политропы;  $p_a$  — нормальное атмосферное давление;  $S$  — эффективное сечение упругого элемента;  $x_1$  — длина рычага-рессоры до оси колеса;  $x_2$  — длина рычага-рессоры до пневмобаллона.

Сила амортизатора подвески описывается в [8]:

$$F_a = \begin{cases} k_m \cdot v_n^m, & \text{если } v_n < v_{n1} \\ \text{иначе } k_m \cdot v_{n1}^m + k_n' (v_n - v_{n1})^n \end{cases}, \quad (7)$$

где  $k_m$  — коэффициент сопротивления начального участка ( $0 < m < 3$ );  $v_n$  — скорость поршня;  $v_{n1}$  — скорость поршня, соответствующая началу открытия клапана;  $k_n'$  — коэффициент сопротивления клапанного участка.

**Модель тормозной системы.** Модель тормозной системы включает два контура передней и задней оси, и состоит из двух емкостей ресиверов, тормозного крана, обеспечивающего заданный уровень тормозного давления, регулятора тормозного давления, регулирующего давление в тормозных камерах задней оси от нагрузки на заднюю ось, модуляторов тормозного давления электронной системы управления, емкостей тормозных камер, тормозных механизмов. Действие тормозной камеры с тормозным механизмом описывается зависимостью тормозного момента от давления воздуха, подаваемого в тормозную камеру с заданием гистерезиса прямого и обратного хода.

**Характеристика компьютерной программы.** Описанные выше математические модели использованы для разработки программы моделирования. Программа разработана в среде Delphi и предназначена для оценки курсовой и поперечной устойчивости автомобиля, оценки алгоритмов систем устойчивости, антиблокировочных систем, систем активной подвески автомобиля. Интерфейс программы позволяет задавать массо-габаритные параметры автомобиля, параметры пневмоподвески, амортизаторов, стабилизаторов поперечной устойчивости, рамы автомобиля, пневматической системы, тормозных механизмов, колес автомобиля и их углов поворота, характеристики сцепления с дорожным покрытием. Сцепления колес задаются отдельно под правым и левым бортом в виде участков дорог с изменяющимся покрытием от сухого асфальта до льда в зависимости от длины заданных участков. Предусмотрены режимы поворота руля: постоянный поворот, одиночные пол синусоиды, одиночная синусоида и одиночная синусоида с полкой 500 мс (согласно Правил ЕЭК ООН № 13) с частотой 0,7 Гц, постоянная синусоида с частотой 0,7 и 0,2 Гц. В программе заложен выбор различных алгоритмов анти-

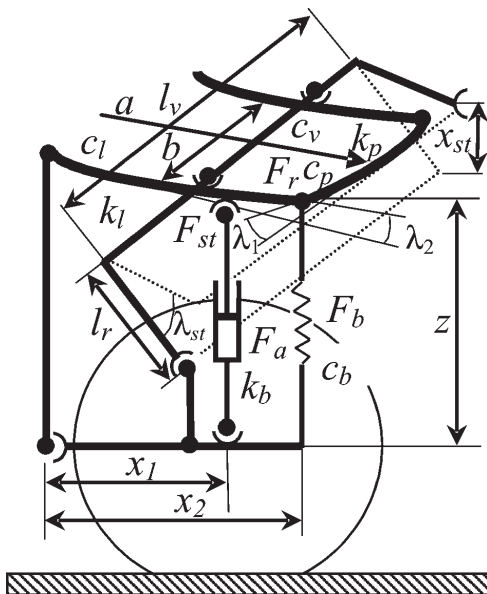


Рисунок 3 — Силевая схема несущей конструкции и подвески на одно колесо:  $F_r, F_{st}$  — силы рамы и стабилизатора поперечной устойчивости приходящиеся на подвеску в одном узле;  $F_a$  — сила амортизатора;  $F_b$  — сила пневмобаллона с учетом действия рессоры-рычага подвески;  $a, b$  — длины лонжерона и поперечины рамы;  $\lambda_1, \lambda_2$  — углы изгибов поперечины и лонжерона рамы;  $c_p, c_l$  — жесткости лонжерона и поперечины рамы;  $k_p, k_l$  — сопротивление лонжеронов и поперечины рамы;  $c_b$  — жесткость пневмобаллона;  $k_a$  — сопротивление амортизатора;  $x_1$  — длина рычага-рессоры до оси колеса;  $x_2$  — длина рычага-рессоры до пневмобаллона;  $z$  — высота подвески;  $C_v$  — коэффициент жесткости вала;  $l_v$  — длина вала;  $l_{st}$  — угол между рычагами;  $x_{st}$  — величина хода рычагов;  $l_r$  — длина рычагов

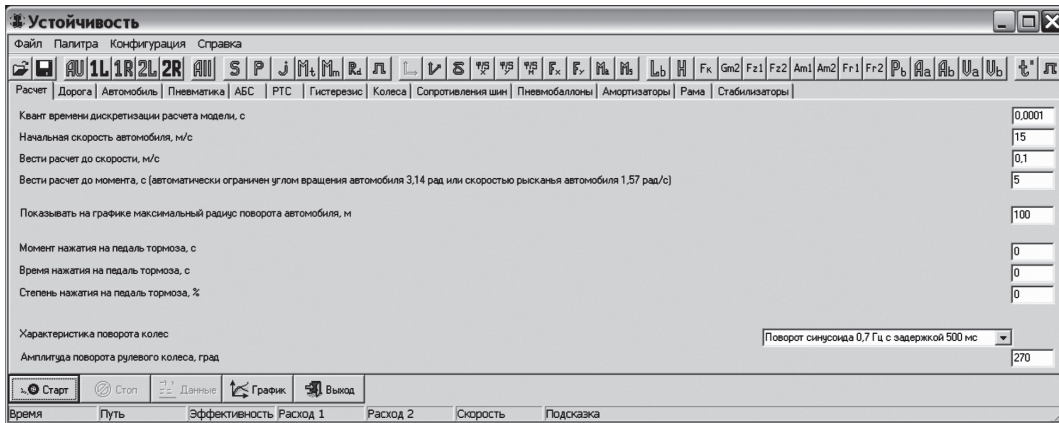


Рисунок 4 — Интерфейс программы моделирования

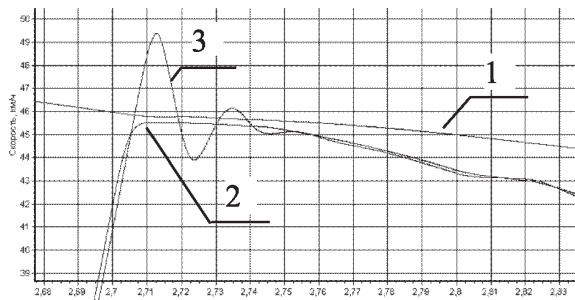


Рисунок 5 — Изменение скорости колеса:  
1 — автомобиль; 2 — статическая модель колеса;  
3 — квазидинамическая модель колеса

блокировочных систем тормозов с целью оценки их влияния на устойчивость автомобиля. Все характеристики поведения автомобиля и его узлов (геометрические, силы, моменты, ускорения, проскальзывания и уводы колес) рассчитываются в явном виде, что позволяет после расчета выводить их на экран монитора в виде графиков по нажатию заданной кнопки с названием характеристики. Оценка курсовой устойчивости производится на основе изменения во времени скорости рыскания и сноса автомобиля в поперечном направлении, а боковая устойчивость оценивается по отрыву колес от опорной поверхности при заданном поперечном ускорении. Интерфейс данной программы показан на рисунке 4.

**Примеры моделирования динамики автомобиля с использованием предложенных математических моделей.** Моделирование колеса при переходе из состояния блокировки в состояние полной раскрутки с последующим началом антиблокировочного цикла системы управления с учетом и без формулы (6) показано на рисунке 5. Скорость колеса с предложенной моделью колеса около скорости автомобиля при выходе с большим ускорением из блока имеет колебательный характер, что подтверждается экспериментально. Такое поведение скорости колеса оказывает существенное влияние на проведение антиблокировочного регулирования.

На рисунке 6 а и б показаны характеристики поведения двухосного седельного тягача (масса 7050 кг; база 3,5 м; расстояние до центра масс 1,3 м; коэффициент сцепления колес 0,8; передаточный коэффициент рулевого управления 25) во время прохождения теста по поправке к правилам ЕЭК ООН № 13 с учетом формулы (5). Тест заключается в повороте руля по синусоидальному закону, где на второй полусинусоиде при достижении максимума делается полка длительностью 0,5 мс. На определенном

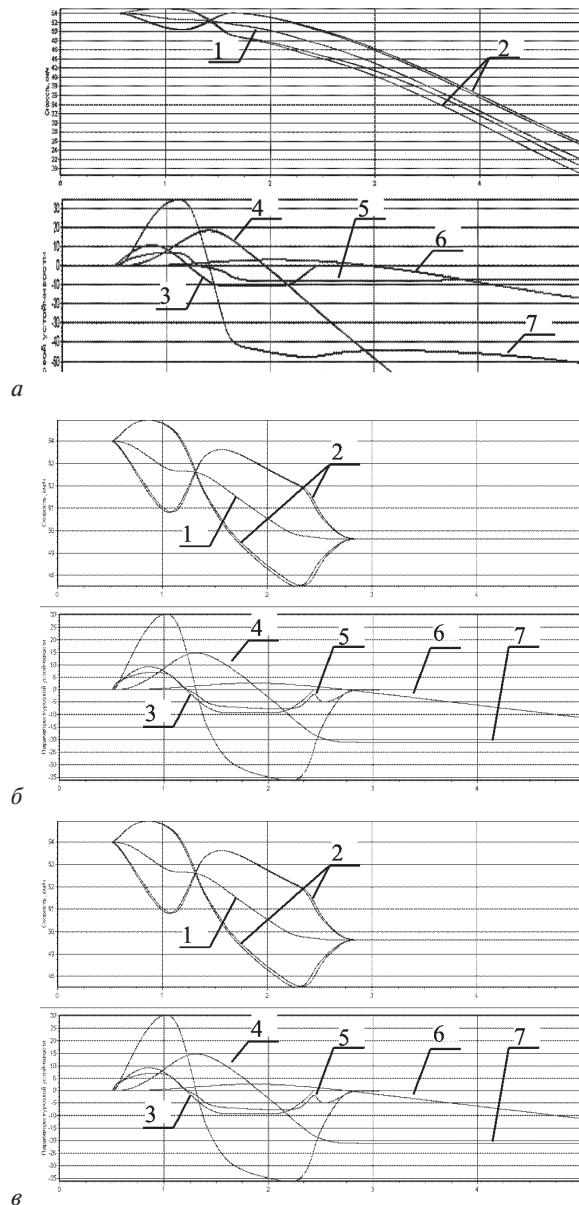


Рисунок 6 — Графики параметров маневра (шаг сетки по вертикали 5, по горизонтали 1): а — маневр при амплитуде поворота руля 270° (квазидинамическая модель колеса); б — маневр при амплитуде 230°; в — маневр при амплитуде 230° (статическая модель); 1 — скорость автомобиля, м/с; 2 — скорости колес, м/с; 3 — угол поворота колес, град; 4 — угол вращения автомобиля, град; 5 — поперечное ускорение автомобиля, м/с<sup>2</sup>; 6 — поперечное отклонение автомобиля, м; 7 — скорость вращения автомобиля, град/с



заезде с увеличением амплитуды поворота руля автомобиль переходит в состояние заноса, когда скорость рысканья автомобиля при завершении поворота руля не возвращается в состояние нуля, а продолжает оставаться постоянной или возрастает. На рисунке 6 в показана характеристика прохождения теста для статической модели колеса, где в отличие от предложенной модели, не наблюдаются переходных процессов, а сам процесс выхода автомобиля из маневра происходит без задержки по времени.

На рисунке 7 показано на примере изменения длин пневмобаллонов действие сил рамы и стабилизаторов поперечной устойчивости (характеристики автомобиля те же, что и в предыдущем примере). В статическом состоянии длины пневмобаллонов составляли 0,2 м. Угол наклона рамы со стабилизаторами поперечной устойчивости при постоянном повороте руля в 270 град составлял 2—3 град, а без — 4—5 град. Без учета сил рамы наблюдается значительное расхождение значений длин пневмобаллонов, расположенных по диагоналям. При увеличении загрузки автомобиля расхождение в угле наклона рамы с учетом и без сил стабилизатора и рамы становится принципиальным для оценки устойчивости автомобиля.

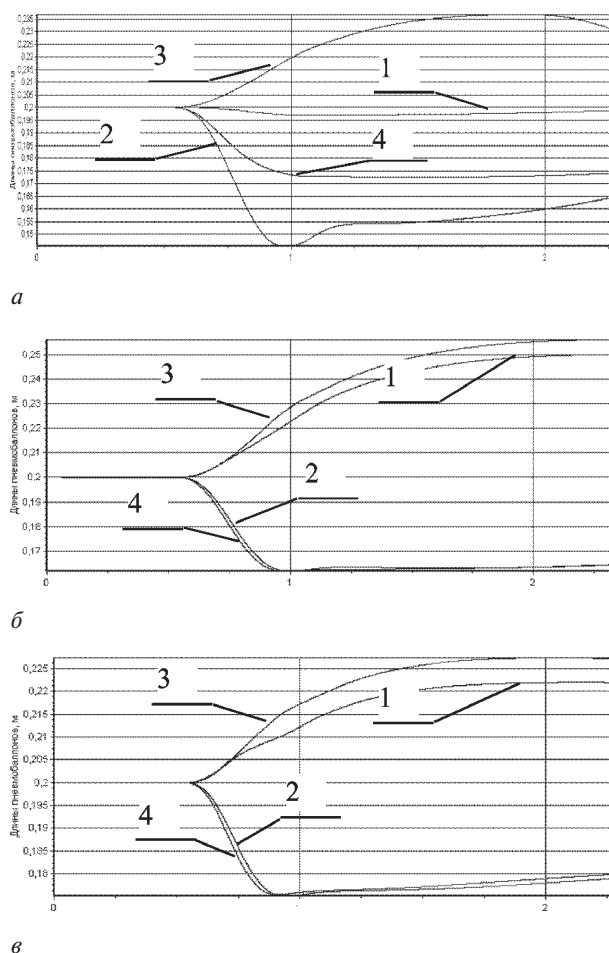
**Заключение.** 1. Предложено ввести в статическую модель колеса, строящуюся на аппроксимациях продольного, поперечного и стабилизирующего момента сцеплений колеса с опорной поверхностью, динамически изменяющиеся характеристики проскальзывания и увода, что позволяет отражать неустановившийся режим поведения эластичного колеса.

2. Предложено рассматривать поведение подвески в модели автомобиля, состоящей из упругого элемента (пневмобаллона) и амортизатора, дополненной элементами стабилизатора поперечной устойчивости и несущей конструкции (рамы автомобиля), поскольку это существенно меняется характер возникающих в подвеске возмущений, и точнее отражает ее реальное поведение.

3. Разработана программа моделирования для оценки курсовой и поперечной устойчивости грузового автомобиля и автобуса, отличающаяся тем, что позволяет проводить вычисление необходимого массива данных параметров движения автомобиля и передавать их на внешнее устройство в режиме реального времени. Программа выполнена в соответствии с требованиями, предъявляемыми к проведению компьютерных испытаний систем контроля устойчивости, согласно Правилу ЕЭК ООН № 13.

#### Список литературы

1. Mode of access: <http://www.mscsoftware.com>. — Data of access: 14.09.2011.
2. Mode of access: <http://www.euler.ru>. — Data of access: 14.09.2011.
3. Mode of access: <http://www.umlab.ru>. — Data of access: 14.09.2011.



**Рисунок 7** — Длины пневмобаллонов подвески при постоянном повороте автомобиля: *а* — без расчета сил рамы, перераспределения центра масс от наклона рамы и сил стабилизаторов устойчивости; *б* — с расчетом сил рамы, перераспределения центра масс от наклона рамы и без расчета сил стабилизаторов устойчивости; *в* — с расчетом сил рамы, перераспределения центра масс от наклона рамы и с расчетом сил стабилизаторов устойчивости; 1, 2, 3, 4 — переднее правое, переднее левое, заднее правое, заднее левое колесо

4. Ghike, Chinar. 14-degree-of freedom vehicle model for roll dynamics study / Chinar Ghike, Taehyun Shin // SAE Technical paper series 2006-01-1277. — 10 p.
5. Pacejka, H.B. The Magic Formula tyre model / H.B. Pacejka, E. Bakker // Proceedings of 1st Colloquium on Tyre Models for Vehicle Analysis, Delft 1991, ed. H.B. Pacejka, Suppl. Vehicle System Dynamics, 21. — 1993.
6. Burckhardt, M. Fahrwerktechnik: Radschlupf-Regelsysteme / M. Burckhardt. — Würzburg: Vogel, 1993. — 432 p.
7. Автомобили: Конструкция, конструирование и расчет. Системы управления и ходовая часть: учеб. пособие для вузов / А.И. Гришкевич [и др.]; под. ред. А.И. Гришкевича. — Минск: Выш. шк., 1987. — 200 с.
8. Дембаремдикер, А.Д. Гидравлические амортизаторы автомобиля / А.Д. Дембаремдикер. — М: Машиностроение, 1969. — 232 с.

Liakhov S.V.

#### Mathematical model and software for simulation testing the electronic vehicle stability control of buses and trucks

In this paper, problems of simulation of pneumatic tire and vehicle dynamics are considered with respect to the evaluation of function directional and roll-over control.

Поступила в редакцию 22.07.2011.