

УДК 539.375

В.А. НИФАГИН, канд. физ.-мат. наук; М.А. ГУНДИНА

Белорусский национальный технический университет, г. Минск

## НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ ДЛЯ НЕГОЛОНОМНОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

*Исследуется напряженно-деформируемое состояние упругопластического материала в окрестности вершины трещины общего вида с определяющими соотношениями теории течения с упрочнением в условиях плосконапряженного состояния. Решается плоская статическая краевая задача в случае неподвижной трещины-разреза. На основе варианта метода асимптотических разложений, учитывающего неголономность разрешающих уравнений и сингулярность полей напряжений и деформаций, задача редуцируется к рекуррентной последовательности двухточечных краевых задач, которые решаются численно-аналитически. Проведен анализ напряжений, деформаций и локальных характеристик разрушения в области, примыкающей к сингулярной точке.*

**Ключевые слова:** упругопластическое тело, трещина общего вида, напряженно-деформированное состояние, метод асимптотических разложений

**Введение.** Одной из важнейших задач механики разрушения является задача об асимптотике полей напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины. В рамках упрощенных гипотез для жесткопластического материала такие задачи решались введением приведенной поверхностной энергии [1]. В механике упругопластического состояния получен ряд решений для одиночной трещины в случае идеально-пластического [2] и упрочняющегося материала в рамках деформационной теории пластичности [3]. Общая структура полей напряжений в пластической области для идеальнопластической среды вблизи вершины трещины при антиплоской деформации изучалась в [4]. Решение для упрочняющегося упругопластического материала с определяющими соотношениями деформационной пластичности построено методом годографа [5]. При решении краевых задач нелинейной теории трещин применялись различные варианты метода возмущений, на основе которых находились точные и приближенные решения в симметричных случаях нормального отрыва и поперечного сдвига [6]. В большинстве таких подходов базовым является линейное решение (нулевой член). Однако в окрестности угловой точки главную роль играет нелинейная часть диаграммы деформирования материала (кубический член). В то же время необходимость более полного учета пластических деформаций в теории трещин делает актуальным использование усложненных теорий пластичности, в частности теории течения. А сингулярный характер полей около вершины трещины, нелинейность и неголономность определяющих уравнений пластичности приводят к развитию асимптотических методов нахождения полей напряжений и деформаций, локальных характеристик (порядок сингулярностей и раскры-

тие в вершине, его форма, коэффициенты интенсивности) и глобальных характеристик (диссипация работы необратимых деформаций, разрушающие усилия и т.д.).

**Постановка задачи.** Рассматривается окрестность вершины полубесконечной трещины общего вида в неограниченном упругопластическом теле в рамках теории течения. Материал считается несжимаемым и упрочняющимся по степенному закону. Разрешающие уравнения данной задачи в полярной системе координат  $r, \varphi$ , с полюсом в вершине трещины, включающие уравнения равновесия, соотношения Коши и определяющие соотношения теории течения для напряжений в приращениях, имеют вид:

$$\begin{aligned} \delta \sigma_{rr,r} + (\delta \sigma_{rr} - \delta \sigma_{\varphi\varphi})/r + \delta \sigma_{r\varphi,\varphi}/r &= 0, \\ \delta \sigma_{r\varphi,r} + 2\delta \sigma_{r\varphi}/r + \delta \sigma_{\varphi\varphi,\varphi}/r &= 0, \\ \delta \varepsilon_{rr} = \delta u_{r,r}, \delta \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r}(\delta u_{\varphi,\varphi} + \delta u_r), \\ \delta \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2}(\delta u_{\varphi,r} + \delta u_{r,\varphi}/r - \delta u_\varphi/r), \\ \delta s_{ij} &= \delta e_{ij} \delta_{ij} - \delta \Phi(\Gamma) e_{ij}, \quad i, j = r, \varphi, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\delta \sigma_{ij}$ ,  $\delta \varepsilon_{ij}$ ,  $\delta u_i$  — приращения напряжений, деформаций и перемещений;  $\delta s_{ij}$ ,  $\delta e_{ij}$  — приращения девиаторов напряжений и деформаций;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $\Phi(\Gamma) = \sum_{k \geq 1} B_{2k} \Gamma^{2k}$  — функция интен-

сивности касательных деформаций;  $\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij}}$ ;  $G$ ;

$B_{2k}$  — упругопластические постоянные материала.

В приведенных уравнениях фигурируют безразмерные отнесенные напряжения  $\sigma_{ij} = \frac{1}{G} \sigma_{ij}^*$ .

Будем считать, что состояние вблизи вершины трещины контролируется параметром нагружения

$K$ , который интерпретируется как коэффициент интенсивности напряжений. Тогда единственным независимым параметром задачи с размерностью длины является величина  $K^2/G^2$ , поэтому искомые функции зависят от нагрузки только посредством безразмерных переменных  $x_i = \xi_i G^2 / K^2$  ( $i = 1, 2$ ), где  $\xi_i$  — оси, причем  $\xi_1$  ориентирована вдоль трещины в направлении вершины.

Для несжимаемого материала в условиях плоского напряженного состояния выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= e_{ij}, e_{ii} = 0, e_{zz} = -(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) = -(e_{rr} + e_{\varphi\varphi}), \\ \sigma &= \frac{1}{3}(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}), s_{r\varphi} = \sigma_{r\varphi}, s_{rr} = \frac{1}{3}(2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}), \\ s_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{3}(2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}), \sigma = -s_{zz}, -s_{zz} = s_{rr} + s_{\varphi\varphi}. \end{aligned} \quad (2)$$

Нагрузки на краях трещины общего вида равны нулю. Отсюда следуют граничные условия задачи:

$$\delta\sigma_{r\varphi}|_{\varphi=\pm\pi} = 0, \delta\sigma_{\varphi\varphi}|_{\varphi=\pm\pi} = 0. \quad (3)$$

Таким образом, уравнения (1) с условиями (3) составляют математическую формулировку краевой задачи о плоском напряженном состоянии (2) трещины общего вида в теории течения с упрочнением.

Под трещиной общего вида понимается прямолинейная неподвижная полубесконечная трещина-разрез, произвольно ориентированная по отношению к нагрузкам на бесконечности.

**Численно-аналитическое решение.** Применим метод асимптотических разложений [7] к задаче (1), (3). Учитывая представления для приращений напряжений и деформаций, отвечающих увеличению параметра  $K$  (однопараметрическое активное нагружение), будем искать решение задачи в перемещениях в виде полных разложений:

$$u_r(r, \varphi) = \sum_{n \geq 0} U_n(\varphi) r^{\lambda_n}; \quad u_\varphi(r, \varphi) = \sum_{n \geq 0} V_n(\varphi) r^{\lambda_n}. \quad (4)$$

При этом после разделения переменных показатели  $\lambda_n$  определяются в процессе решения наряду с функциями  $U_n(\varphi)$ ,  $V_n(\varphi)$  на каждом этапе.

Подстановка выражений (4) в (1), (3) с учетом (2) и аналитической на  $[0, \infty)$  функции интенсивности касательных деформаций в виде ее одночленной квадратичной аппроксимации  $\Phi(\Gamma) = B_2 \Gamma^2$ , дает выражения для компонент деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \sum_{n \geq 0} \lambda_n U_n r^{\lambda_n - 1}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \sum_{n \geq 0} (V_n' + U_n) r^{\lambda_n - 1}, \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} (U_n' + (\lambda_n - 1)V_n) r^{\lambda_n - 1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Интенсивность деформаций

$$\Gamma = \frac{2}{3} (e_{rr}^2 + e_{rr} \cdot e_{\varphi\varphi} + e_{\varphi\varphi}^2 + e_{r\varphi}^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} (F(\varphi))^{\frac{1}{2}}, \quad (6)$$

где  $F(\varphi) = \sum_{k \geq 0} \sum_{\ell \geq 0} a_{k\ell} r^{\lambda_k + \lambda_\ell - 2}$ .

$$\begin{aligned} a_{k\ell} &= \lambda_k \lambda_\ell U_k U_\ell + \lambda_k U_k (V_\ell' + U_\ell) + \\ &+ (V_k' + U_k)(V_\ell' + U_\ell) + \\ &+ \frac{1}{4} (U_k' + (\lambda_k - 1)V_k)(U_\ell' + (\lambda_\ell - 1)V_\ell). \end{aligned} \quad (7)$$

Среднее напряжение  $\sigma$  представим в виде

$$\sigma = \sum_{n \geq 0} W_n(\varphi) r^{\lambda_n - 1}, \quad (8)$$

где  $W_n(\varphi)$  — неизвестные функции, подлежащие дальнейшему определению.

Из полных разложений деформаций и определяющих уравнений получим выражения для компонент напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sum_{n \geq 0} (\lambda_n U_n + W_n) r^{\lambda_n - 1} - \\ &- B \sum_{k \geq 0} \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m \geq 0} \alpha_{k\ell m} r^{\mu_{k\ell m} - 3}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \mu_{k\ell m} &= \lambda_k + \lambda_\ell + \lambda_m, \quad B = \frac{4}{9} B_2, \\ \alpha_{k\ell m} &= a_{k\ell} \lambda_m U_m = \lambda_k \lambda_\ell \lambda_m U_k U_\ell U_m + \\ &+ \lambda_k \lambda_m U_k (V_\ell' + U_\ell) U_m + \\ &+ (V_k' + U_k)(V_\ell' + U_\ell) \lambda_m U_m + \\ &+ \frac{1}{4} (U_k' + (\lambda_k - 1)V_k)(U_\ell' + (\lambda_\ell - 1)V_\ell) \lambda_m U_m; \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \sum_{n \geq 0} (V_n' + U_n + W_n) r^{\lambda_n - 1} - \\ &- B \sum_{k \geq 0} \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m \geq 0} \beta_{k\ell m} r^{\mu_{k\ell m} - 3}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \beta_{k\ell m} &= a_{k\ell} (V_m' + U_m) = \lambda_k \lambda_\ell U_k U_\ell (V_m' + U_m) + \\ &+ \lambda_k U_k (V_\ell' + U_\ell)(V_m' + U_m) + \\ &+ (V_k' + U_k)(V_\ell' + U_\ell)(V_m' + U_m) + \\ &+ \frac{1}{4} (U_k' + (\lambda_k - 1)V_k)(U_\ell' + (\lambda_\ell - 1)V_\ell)(V_m' + U_m); \\ \sigma_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} (U_n' + (\lambda_n - 1)V_n) r^{\lambda_n - 1} - \\ &- \frac{B}{2} \sum_{k \geq 0} \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m \geq 0} \gamma_{k\ell m} r^{\mu_{k\ell m} - 3}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{k\ell m} &= a_{k\ell} (U_m' + (\lambda_m - 1)V_m) = \\ &= \lambda_k \lambda_\ell U_k U_\ell (U_m' + (\lambda_m - 1)V_m) + \\ &+ \lambda_k U_k (V_\ell' + U_\ell)(U_m' + (\lambda_m - 1)V_m) + \\ &+ (V_k' + U_k)(V_\ell' + U_\ell)(U_m' + (\lambda_m - 1)V_m) + \\ &+ \frac{1}{4} (U_k' + (\lambda_k - 1)V_k)(U_\ell' + (\lambda_\ell - 1)V_\ell) \times \\ &\times (U_m' + (\lambda_m - 1)V_m). \end{aligned}$$

Для произвольного приближения из уравнений равновесия, условия несжимаемости и представлений для напряжений имеем рекуррентную последовательность краевых задач о собственных значениях

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \left( (\lambda_n^2 - 1)U_n + (\lambda_n - 1)W_n + \frac{1}{2}U_n'' + \frac{1}{2}(\lambda_n - 3)V_n' \right) r^{\lambda_n - 2} - \\ - B \sum_{k \geq 0} \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m \geq 0} \left( (\mu_{k\ell m} - 2)\alpha_{k\ell m} - \beta_{k\ell m} + \frac{1}{2}\gamma'_{k\ell m} \right) r^{\mu_{k\ell m} - 4} = 0, \\ \sum_{n \geq 0} \left( \frac{1}{2}(\lambda_n + 3)U_n' + \frac{1}{2}(\lambda_n^2 - 1)V_n + V_n'' + W_n' \right) r^{\lambda_n - 2} - \\ - B \sum_{k \geq 0} \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m \geq 0} \left( \frac{1}{2}(\mu_{k\ell m} - 1)\gamma_{k\ell m} + \beta'_{k\ell m} \right) r^{\mu_{k\ell m} - 4} = 0, \\ \sum_{n \geq 0} ((\lambda_n + 1)U_n + V_n') r^{\lambda_n - 1} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} (V_n' + U_n + W_n) r^{\lambda_n - 1} - B \sum_{k \geq 0} \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m \geq 0} \beta_{k\ell m} r^{\mu_{k\ell m} - 3} \Big|_{\varphi = \pm \pi} = 0; \\ \left( \sum_{n \geq 0} (U_n' + (\lambda_n - 1)V_n) r^{\lambda_n - 1} - B \sum_{k \geq 0} \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m \geq 0} \gamma_{k\ell m} r^{\mu_{k\ell m} - 3} \right) \Big|_{\varphi = \pm \pi} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, возникает последовательность связанных двухточечных краевых задач для систем дифференциальных уравнений четвертого порядка. Причем на нулевом шаге — это задача о собственных функциях нелинейного однородного дифференциального оператора, а на последующих шагах — линейные задачи для неоднородного дифференциального оператора.

Из определения функций  $\alpha_{k\ell m}(\varphi)$ ,  $\beta_{k\ell m}(\varphi)$ ,  $\gamma_{k\ell m}(\varphi)$  (9) заключаем, что они зависят от  $U_n(\varphi)$ ,  $V_n(\varphi)$ ,  $W_n(\varphi)$  с индексом  $\min\{k, \ell, m\} \leq n \leq \max\{k, \ell, m\}$ . Следовательно, для непротиворечивости уравнений (10)–(11) необходимо выполнение условия

$$\lambda_n - 2 = \mu_{100} - 4 \quad (\mu_{100} = \mu_{010} = \mu_{001} = 2\lambda_0 + \lambda_1), \quad (12)$$

где  $\lambda_1 = 2 - \lambda_0$ . Рассуждая аналогичным образом на следующем шаге, получим  $\lambda_1 - 2 = \mu_{110} - 4$  ( $\mu_{110} = \mu_{101} = \mu_{011} = \mu_{200} = \mu_{020} = \mu_{002} = 2\lambda_1 + \lambda_0 = 2\lambda_0 + \lambda_2$ ) так, что  $\lambda_2 = -3\lambda_0 + 4$ . В общем случае условие разрешимости краевой задачи имеет вид

$$\lambda_n - 2 = \mu_{1\ell m} - 4 \quad (k + \ell + m = n + 1, n = 0, 1, 2, \dots).$$

Откуда  $\lambda_n = 2n(1 - \lambda_0) + \lambda_0$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ).

Исследуя уравнения для нулевого шага при условии (12), заметим, что из-за сингулярности напряжений при  $r \rightarrow 0$  собственное значение  $\lambda_0 < 1$ . Сравнивая первые слагаемые ( $n = 0, k = \ell = m = 0$ ) сумм в (10), (11) получим

$$\lambda_0 - 2 > \mu_{000} - 4 \quad (\mu_{000} = 3\lambda_0).$$

Поэтому из (4), (5) краевая задача на нулевом этапе записывается

$$\begin{aligned} (\lambda_0^2 - 1)U_0 + (\lambda_0 - 1)W_0 + \frac{1}{2}U_0'' + \frac{1}{2}(\lambda_0 - 3)V_0' - \\ - B \left( (3\lambda_0 - 2)\alpha_{000} - \beta_{000} + \frac{1}{2}\gamma'_{000} \right) = 0, \\ \frac{1}{2}(\lambda_0 + 3)U_0' + \frac{1}{2}(\lambda_0^2 - 1)V_0 + V_0'' + W_0' - \\ - B \left( \frac{1}{2}(3\lambda_0 - 1)\gamma_{000} + \beta'_{000} \right) = 0, \\ (\lambda_0 + 1)U_0 + V_0' = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Система дифференциальных уравнений (13) вместе с граничными условиями

$$\begin{aligned} (V_0' + U_0 + W_0 - B\beta_{000}) \Big|_{\varphi = \pm \pi} = 0, \\ (U_0' + (\lambda_0 - 1)V_0 - B\gamma_{000}) \Big|_{\varphi = \pm \pi} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

образует однородную нелинейную двухточечную краевую задачу для нахождения собственного значения  $\lambda_0$  и собственных функций  $U_0(\varphi)$ ,  $V_0(\varphi)$ ,  $W_0(\varphi)$ , определяемых с точностью до мультипликативной постоянной.

Построим численное решение приведенной задачи, предварительно исключая  $U_0$  из уравнений (13), (14) с помощью последнего уравнения (14).

Обозначая  $y_0 = V_0$ ,  $y_1 = V_0'$ ,  $y_2 = V_0''$ ,  $y_3 = W_0$ , получим систему четырех дифференциальных уравнений первого порядка эквивалентную системе (13) с граничными условиями (14):

$$y_i' = f_i(y_j), \quad i, j = \overline{0, 3}, \quad (15)$$

$$L_i y_j \Big|_{\varphi = \pm \pi} = 0, \quad i = 1, 2, j = \overline{0, 3}, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} f_0 &= y_1; f_1 = y_2; \\ f_2 &= -2(\lambda_0^2 - 1)y_1 + 2(\lambda_0^2 - 1)y_3 + \\ &+ (\lambda_0^2 - 2\lambda_0 - 3)y_0 - B(2(3\lambda_0^2 + \lambda_0 - 2)\alpha_{000} - \\ &- 2(\lambda_0 + 1)\beta_{000} + (\lambda_0 + 1)\gamma'_{000}); \\ f_3 &= \frac{1}{2}(\lambda_0 - 1)y_0 - \frac{\lambda_0 - 1}{2(\lambda_0 + 1)}y_2 + \\ &+ B \left( \frac{1}{2}(3\lambda_0 - 1)\gamma_{000} + \beta'_{000} \right); \\ L_1 y_j &= \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + 1}y_1 + y_3 - B\beta_{000}; \\ L_2 y_j &= -\frac{1}{\lambda_0 + 1}y_2 + (\lambda_0 - 1)y_0 - B\gamma_{000}. \end{aligned} \quad (17)$$

Численное решение двухточечной краевой задачи с параметром (15), (16) основано на применении модифицированного метода пристрелки с использованием особенностей постановки задачи. В ходе решения отыскиваются собственные значения  $\lambda_0$  и функции  $V_0$ ,  $W_0$  на промежутке  $\varphi \in [-\pi; \pi]$ .

Так, полагая значения  $y_j(-\pi) = y_{j_0}$ , и задавая начальные значения  $y_{j_0}$ , систему дифференциальных уравнений интегрируем методом Рунге-Кутты.

Ищутся нетривиальные решения однородной задачи, поэтому одно из значений  $y_{j_0}$  задается произвольно. Например,  $y_{10} = -1$ , тогда из граничных условий (16) значения  $y_{20}, y_{30}$  находятся через  $y_{00}, y_{10}$  при  $\varphi = -\pi$ . Параметр  $\lambda_0$  и значение  $y_{00}$  выбираются таким образом, чтобы удовлетворить второй группе граничных условий (16) при  $\varphi = \pi$ . Для этого сформулируем вспомогательную оптимизационную задачу для выпуклой целевой функции, условия минимума которой соответствуют выполнению двух недостающих краевых условий (16). Выберем такую функцию в виде

$$\Phi(y_j) = L_1^2 y_j + L_2^2 y_j, \quad \varphi = \pi.$$

В итоге, асимптотика решения содержит два произвольных параметра на нулевом этапе, так как граничные условия (16) при  $\varphi = \pi$  удовлетворяются при любом значении  $y_{00}$ . Для классификации рассматриваемых задач будем в случае 1 говорить о трещине общего вида, а в случае 2, 3 — о симметричных задачах — трещине нормального отрыва и трещине поперечного сдвига соответственно. Пусть  $\gamma$  — полуокружность радиуса  $r$  с центром в начале координат при  $\varphi \in [0; \pi]$ . Главный вектор сил (внешних), приложенных к контуре  $\gamma$  определим в декартовых координатах

$$F_i = r \int_0^\pi \sigma_{ij} n_j d\varphi, \quad n_1 = \cos \varphi, \quad n_2 = \sin \varphi, \quad i, j = 1, 2, \quad (18)$$

где  $n_j$  — единичная внешняя нормаль к  $\gamma$ ;  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений в декартовой системе координат.

Сила  $\vec{F}$  имеет разложение

$$F_1 = |\vec{F}| \cos \theta; \quad F_2 = |\vec{F}| \sin \theta, \quad (19)$$

где  $\theta$  — угол между силой  $\vec{F}$  и осью  $x_1$ .

Введение угла  $\theta$  и формулы, связывающих декартовые и полярные компоненты тензора напряжений, позволяет отделить случай трещины общего вида (например,  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ) от частных случаев, обладающих симметрией. Для трещины нормального отрыва  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , для трещины поперечного сдвига  $\theta = 0$ . Применялась следующая вычислительная схема: задавалось значение  $y_{00}$ , и из решения оптимизационной задачи для функции  $\Phi(y_j)$  численно находилась величина  $\lambda_0$ , а затем компоненты  $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{r\varphi}$ . Вычислялись декартовые координаты главного вектора сил (18) и из (19) получался угол  $\theta$ . Заметим, что в случае трещины нормального отрыва рассматривается интервал  $\varphi \in [0; \pi]$ . На левом конце которого задаются условия симметрии

$$u_\varphi|_{\varphi=0} = 0, \quad u_{r,\varphi}|_{\varphi=0} = 0, \quad (20)$$

которые вместе с двумя условиями (14) на правом конце определяют краевую задачу. Далее задаются

четыре начальных условия при  $\varphi = 0$ , и возникающая задача Коши решается численно. Из этих условий два — условия симметрии (20), а третье — произвольное ненулевое значение. Изменяя величину четвертого условия и параметра  $\lambda_0$ , удовлетворяются граничные условия на правом конце.

Для трещины поперечного сдвига на промежутке  $\varphi \in [0; \pi]$  на левом конце имеются следующие граничные условия

$$\sigma_{rr}|_{\varphi=0} = 0, \quad \sigma_{\varphi\varphi}|_{\varphi=0} = 0, \quad (21)$$

которые вместе с двумя условиями (14) на правом конце определяют краевую задачу.

Для первого и второго приближения этап численной оптимизации опускался.

**Анализ результатов.** Рассчитанные с учетом трех приближений асимптотики компонент тензора напряжений ( $1 - \sigma_{rr}, 2 - \sigma_{\varphi\varphi}, 3 - \sigma_{r\varphi}$  интенсивности напряжений ( $1 - T$ ), среднего напряжения ( $2 - \sigma_0$ ), максимального нормального напряжения ( $3 - \sigma_{\max}$ ) в зависимости от полярного угла) для трещины общего вида ( $\theta = \frac{\pi}{4}$ ) представлены на рисунках 1, 2,

для трещины нормального отрыва ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) — на рисунках 3, 4 и для трещины поперечного сдвига ( $\theta = 0$ ) — на рисунках 5, 6 соответственно.

Учитывались 3 члена рядов безразмерных величин в полном диапазоне смешанных форм деформирования для меди с упругопластическими

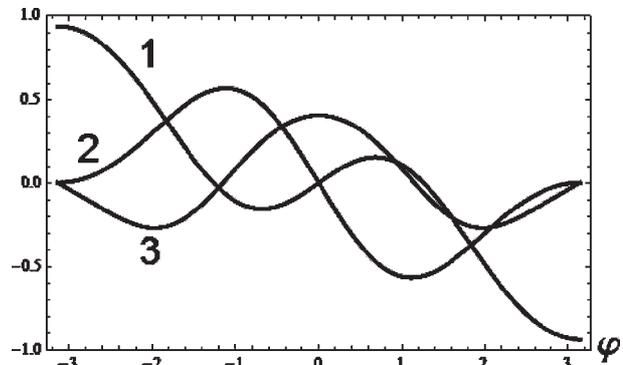


Рисунок 1 — Компоненты напряжений для трещины общего вида: 1 —  $\sigma_{rr}$ ; 2 —  $\sigma_{\varphi\varphi}$ ; 3 —  $\sigma_{r\varphi}$

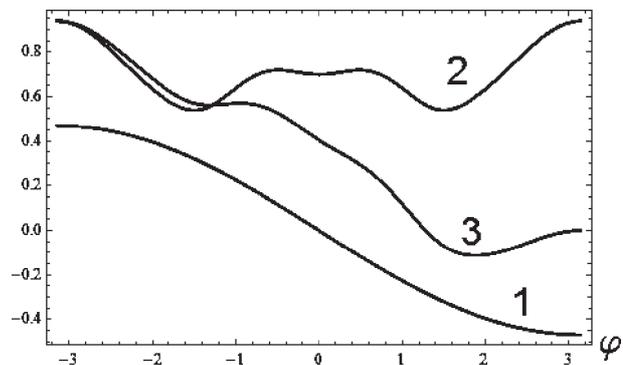


Рисунок 2 — Среднее напряжение ( $1 - \sigma_0$ ), интенсивность напряжений ( $2 - T$ ), максимальное нормальное напряжение ( $3 - \sigma_{\max}$ ) для трещины общего вида

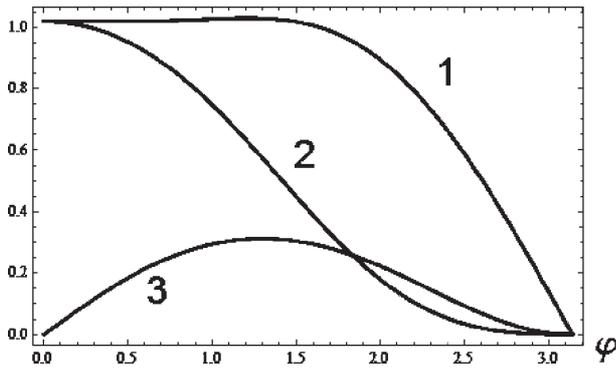


Рисунок 3 — Компоненты напряжений для трещины нормального отрыва: 1 —  $\sigma_{rr}$ ; 2 —  $\sigma_{\varphi\varphi}$ ; 3 —  $\sigma_{r\varphi}$

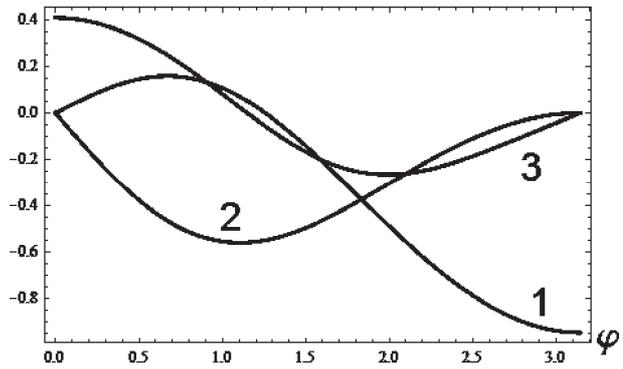


Рисунок 5 — Компоненты напряжений для трещины поперечного сдвига: 1 —  $\sigma_{rr}$ ; 2 —  $\sigma_{\varphi\varphi}$ ; 3 —  $\sigma_{r\varphi}$

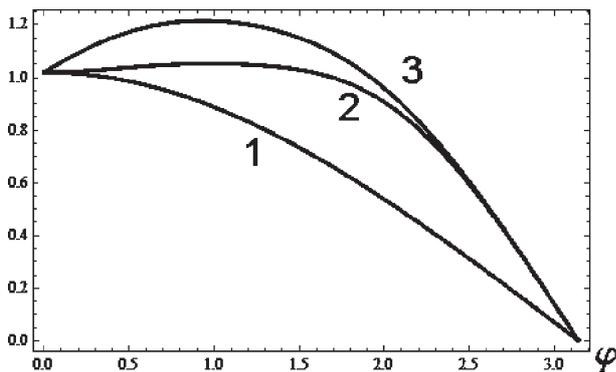


Рисунок 4 — Среднее напряжение (1 —  $\sigma_0$ ), интенсивность напряжений (2 —  $T$ ), максимальное нормальное напряжение (3 —  $\sigma_{max}$ ) для трещины нормального отрыва

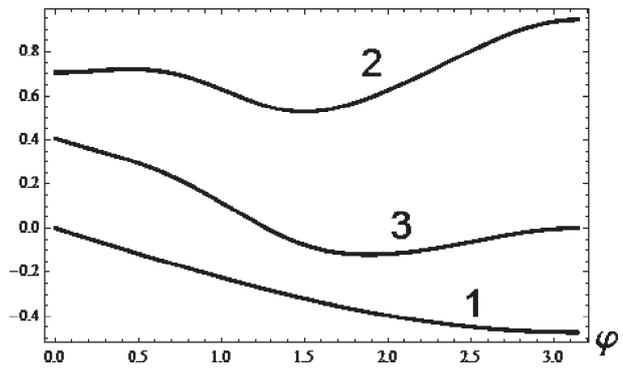


Рисунок 6 — Среднее напряжение (1 —  $\sigma_0$ ), интенсивность напряжений (2 —  $T$ ), максимальное нормальное напряжение (3 —  $\sigma_{max}$ ) для трещины поперечного сдвига

характеристиками  $G = 0,4442431 \cdot 10^{11}$  н/м<sup>2</sup>,  $B_2 = 1,327 \cdot 10^{-5}$ ,  $K = 0,6 \cdot 10^6$  н·м<sup>3/2</sup>.

Численный анализ показал, что для окружной компоненты напряжений  $\sigma_{\varphi\varphi}$  максимум наблюдается в направлении предполагаемого развития трещины (см. рисунки 1, 3, 5).

Обобщая ранее полученные результаты для нелинейной упругости, отмечаем, что уменьшение нормальных напряжений в непосредственной окрестности вершины трещины и на удалении от нее составляет от 2 до 9,5 раз для различных типов трещины (см. рисунки 1, 3, 5) в теории течения с упрочнением. Зависимость интенсивности напряжений, среднего напряжения и максимального нормального напряжения наиболее значимо проявляется для трещины нормального отрыва (см. рисунок 4) и менее значимо для трещины общего вида (см. рисунок 2) и трещины поперечного сдвига (рисунок 6). При этом в теории течения влияние форм деформирования становится менее значимым, как и влияние пластических свойств материала на удалении от вершины (см. рисунки 1, 3, 5).

В то же время, в непосредственной окрестности вершины трещины влияние вида нагружения является существенным (см. рисунки 1, 3, 5).

Проявляется зависимость величины нормальных напряжений от расстояния до вершины трещины, которая уменьшается от 3 % до 10 % по

радиусу от соответствующих значений в нелинейной упругости в одинаковом диапазоне изменения полярного угла, в связи с более полным учетом пластических свойств материала в рамках теории течения с упрочнением. На удалении от вершины трещины по длине трещины наблюдается более равномерное распределение касательных напряжений. Противоположная ситуация возникает для нормальных напряжений (см. рисунки 1, 3, 5). В непосредственной окрестности вершины касательные напряжения имеют минимальные значения для трещины нормального отрыва и общего вида, а для поперечного сдвига они достигают максимального значения, но при удалении от нее быстро уменьшаются (см. рисунок 3). При увеличении радиуса скорость изменения касательных напряжений уменьшается, но менее значительно, чем в нелинейном случае.

Величина поправки составляет для нормальных напряжений для различных типов нагружения от 3 % до 9 % для первого приближения, от 0,04 % до 0,9 % для второго приближения. Для касательных напряжений от 8 % до 13 % — для первого и от 0,2 % до 4,2 % — для второго приближения.

**Выводы.** Построено приближенное решение краевой упругопластической задачи для трещины общего вида. Наличие такого решения актуально для задач нелинейной механики разрушения, поскольку если

бы асимптотика существовала только для симметричных случаев, то она бы не имела физического смысла, так как реальное напряженное состояние — это всегда общий случай. В то же время построенная асимптотика изменяется в ходе итерационного процесса, что соответствует представлению об областях сверхтонкой и промежуточной структуры решения. Полученные результаты оценки напряженного состояния в области промежуточной структуры вершины трещины указывают на значительное возрастание размера пластической зоны для плоского напряженного состояния ( $\approx$  в 1,8 раз по длине радиуса) в сравнении со случаем плоской деформации. В то же время величина угла  $\theta$  не влияет столь значительно на распределение напряжений, как в случае плоской деформации, что соответствует использованию более точных усложненных теорий течения.

## Список литературы

1. Качанов, Л.М. Основы механики разрушения / Л.М. Качанов. — М.: Наука, 1974. — 312 с.
2. Ивлев, Д.Д. Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д.Д. Ивлев, Л.В. Ершов. — М.: Наука, 1978. — 208 с.
3. Степанова, Л.В. Математические методы механики разрушения / Л.В. Степанова. — М.: Физматлит, 2009. — 334 с.
4. Rahman, M. Elastic perfectly-plastic asymptotic mixed mode crack tip fields in plane stress / M. Rahman, J.W. Hancock // Int. J. Solids and Structures. 2006. — Vol. 43. — Pp. 3692–3704.
5. Либовиц, Г. Разрушение: в 7 т. / Г. Либовиц; под ред. Г. Либовица. — М.: Мир, 1975. — Т. 2: Математические основы теории разрушения. — 768 с.
6. Yuan, F.G. Analytical solutions of fully plastic crack-tip higher order fields under antiplane shear / F.G. Yuan, S. Yang // Intern. J. of Fracture. — 1995. Vol. 69. — Pp. 1–26.
7. Нифагин, В.А. Оценка напряженного состояния упругопластического тела в окрестности угловой точки / В.А. Нифагин // Вест. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. — 2010. — № 3. — С. 102–106.

Nifagin V.A., Hundzina M.A.

### The stress-strain state in near crack top for nonholonomic plasticity under conditions of plane stress

The stress-strain state of elastic-plastic material in a neighborhood of the top of arbitrary oriented straight-line crack with determining relations of the flow theory with hardening under plane stress is investigated. Based on the variant of a method of asymptotic expansion taking into account nonholonomicity of the resolving equations and the singularity of fields of stresses and deformations, the problem is reduced to a recurrent sequence of two-point boundary problems, that are solved numerically-analytically. The analysis of stresses and deformations and local characteristics of damage in the area surrounding singular point has been done.

Поступила в редакцию 05.12.2011.