УДК 539.375

В.М. МИРСАЛИМОВ, д-р физ.-мат. наук; К.С. МАМЕДОВА
Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку

МИНИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ РАЗРУШЕНИЯ В СОСТАВНОМ ТЕЛЕ

Решена задача механики разрушения по определению оптимальной формы включения, обеспечивающей минимизацию коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности вершин трещин. Найденная форма поперечного сечения инородного упругого включения обеспечивает повышение несущей способности составного тела.

Ключевые слова: *упругое составное тело, связующее, включения, трещины, коэффициенты интенсивности напряжений, минимизация параметров разрушения*

Введение. Как показывает опыт, многокомпонентные среды более надежны и долговечны, чем однородные [1, 2]. Также известно, что прочность зависит от формы среды. Уместно привести слова [3] известного испанского архитектора Эдуардо Торроха: «Лучшим сооружением является то, надежность которого обеспечивается главным образом за счет его формы, а не за счет прочности материала. Последнее достигается просто, тогда как первое, наоборот, с большим трудом». Рассмотрим составное упругое тело, состоящее из упругой среды (матрицы) и распределенных в ней включений из другого материала. Процесс разрушения таких материалов определяется взаимодействием включений с матрицей. Включения из другого материала (подкрепляющие элементы), составляя по весу сравнительно небольшую часть, существенно влияют на прочность матрицы.

Поэтому важное значение приобретает оптимальное проектирование составного материала (композита). Задача теории оптимального проектирования заключается в определении характеристик составного тела таким образом, чтобы тело при действии заданных нагрузок в определенном смысле являлось наилучшим из всех составных тел рассматриваемого типа. Ресурс работы составной конструкции (тела) зависит от распределения напряжений в зонах взаимодействия ее элементов. Работоспособность составного тела (композита) можно повысить с помощью изменения геометрии (формы) соединения ее элементов.

Постановка задачи. Пусть неограниченное тело, находящееся в условиях плоской деформации или плоского напряженного состояния, ослаблено произвольно размещенными вблизи включения прямолинейными трещинами длины $2l_k$ ($k = 1, 2, ..., N$). Ресурс работы составной конструкции зависит от распределения напряжений в зонах взаимодействия ее элементов. Работоспособность композита можно повысить с помощью изменения геометрии соединения элементов. Анализ взаимодействия связующего и включения проводится на основе модели с одним включением криволинейной формы, остальные включения «размазываются», а тело вне выделенного включения представляется однородным и изотропным, с соответствующими эффективными упругими постоянными («по правилу смесей»). При таком подходе взаимодействие других «размазанных» включений и трещин осуществляется через соответствующие эффективные упругие постоянные, и нет ограничений на взаиморасположение и относительные размеры включений и трещин. Считается, что трещины не пересекаются между собой и включением.

Обозначим границу раздела различных упругих сред через L'. Полагаем, что неизвестную границу L' соединения включения с матрицей можно представить в виде

$$r = \rho(\theta);\ \rho(\theta) = \lambda + \varepsilon H(\theta), \tag{1}$$

где ε — малый параметр, равный $R_{\max}/\lambda$; $R_{\max}$ — наибольшая высота неровности профиля контура L' от окружности радиуса λ.

Принято, что всюду на границе соединения L' имеет место жесткое сцепление различных сред. Будем считать, что при $z = x + iy \to \infty$ действуют напряжения σ_x^∞, σ_y^∞, τ_{xy}^∞. Начало системы координат совмещаем с геометрическим центом круга L ($r = \lambda$) в плоскости составного тела. В центрах прямолинейных трещин разместим начала локальных систем координат $x_k O_k y_k$, оси x_k которых совпадают с линиями трещин и составляют углы α_k^* с осью x. Требуется определить такую геометрию поверхности соединения включения и связующего, чтобы созданное им упругое поле тормозило бы развитие трещин в составном теле. Очевидно, что чем ниже уровень коэффициентов интенсивности напряжений (параметров разрушения) в окрестности вершин трещин в составном теле, тем выше его несущая способность. Решению подобных задач механики посвящены работы [4—11].

Представим границу неизвестного контура L' в виде (1), где функция $H(\theta)$ подлежит определению в процессе решения задачи оптимизации. Не уменьшая общности поставленной задачи оптимизации, принимаем, что искомая функция $H(\theta)$ может быть представлена виде отрезка ряда Фурье

$$H(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k \cos k\theta + \beta_k \cos k\theta).$$

Для нахождения геометрии соединения введем в задачу в качестве условия нахождения геометрии соединения (функции $H(\theta)$) условие равенства нулю (минимизации) коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности вершин трещин. Требуется определить функцию $H(\theta)$ так, чтобы созданное в процессе нагружения составного тела напряженно-деформированное поле препятствовало росту трещин. Это дополнительное условие позволяет определить искомую функцию $H(\theta)$ геометрии соединений материалов.

Напряжения σ_x, σ_y, τ_{xy} и смещения u и v в плоской задаче теории упругости можно представить с помощью комплексных потенциалов Колосова—Мусхелишвили [12].

На границе раздела сред имеем

$$\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}=\varphi_0(z)+z\overline{\varphi_0'(z)}+\overline{\psi_0(z)}\quad (z\in L');$$
$$\frac{\mu}{\mu_0}\left[\kappa_0\varphi_0(z)-z\overline{\varphi_0'(z)}-\overline{\psi_0(z)}\right]= \tag{2}$$
$$=\kappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}\quad (z\in L'),$$

где κ, μ и κ_0, μ_0 — упругие постоянные основного материала и включения соответственно; $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ — аналитические функции для основного материала и включения, соответственно.

На берегах прямолинейных трещин имеем условия

$$\Phi(x_k)+\overline{\Phi(x_k)}+x_k\overline{\Phi'(x_k)}+\overline{\Psi(x_k)}=0$$
$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ N), \tag{3}$$

где x_k — аффиксы точек k-той прямолинейной трещины.

Для решения задачи используем метод возмущений. Напряжения и смещения ищем в виде разложений по малому параметру, в которых пренебрегаем для упрощения членами, содержащими ε в степени выше первой. Каждое из приближений удовлетворяет системе дифференциальных уравнений теории упругости. Значения компонент тензора напряжений и вектора перемещений при $r=\rho(\theta)$ находим, разлагая в ряд выражения для напряжений и перемещений в окрестности $r=\lambda$. На основании граничных условий (2) получим краевые условия задачи на контуре L ($\tau=\lambda\exp(i\theta)$) для комплексных потенциалов:
- для нулевого приближения

$$\varphi^{(0)}(z)+z\overline{\varphi^{(0)\prime}(z)}+\overline{\psi^{(0)}(z)}=$$
$$=\varphi_0^{(0)}(z)+z\overline{\varphi_0^{(0)\prime}(z)}+\overline{\psi_0^{(0)}(z)}\ \text{ на } L; \tag{4}$$

$$\kappa\varphi^{(0)}(z)-z\overline{\varphi^{(0)\prime}(z)}-\overline{\psi^{(0)}(z)}=$$
$$=\frac{\mu}{\mu_0}\left[\kappa_0\varphi_0^{(0)}(z)-z\overline{\varphi_0^{(0)\prime}(z)}-\overline{\psi_0^{(0)}(z)}\right]\ \text{ на } L; \tag{5}$$

- для первого приближения

$$\varphi^{(1)}(z)+z\overline{\varphi^{(1)\prime}(z)}+\overline{\psi^{(1)}(z)}=$$
$$=\varphi_0^{(1)}(z)+z\overline{\varphi_0^{(1)\prime}(z)}+\overline{\psi_0^{(1)}(z)}+f_1+if_2\ \text{ на } L; \tag{6}$$

$$\kappa\varphi^{(1)}(z)-z\overline{\varphi^{(1)\prime}(z)}-\overline{\psi^{(1)}(z)}=$$
$$=\frac{\mu}{\mu_0}\left[\kappa_0\varphi_0^{(1)}(z)-z\overline{\varphi_0^{(1)\prime}(z)}-\overline{\psi_0^{(1)}(z)}\right]+g_1+ig_2\ \text{ на } L; \tag{7}$$

где f_1+if_2 выражается через искомую функцию $H(\theta)$ и компоненты напряжений на контуре нулевого приближения L; аналогично функция g_1+ig_2 зависит от функции $H(\theta)$ и компонент смещений при $\tau=\lambda\exp(i\theta)$ нулевого приближения.

На основании граничных условий (3) получим краевые условия задачи на берегах трещин для комплексных потенциалов:
- для нулевого приближения

$$\Phi^{(0)}(x_k)+\overline{\Phi^{(0)}(x_k)}+x_k\overline{\Phi^{(0)\prime}(x_k)}+\overline{\Psi^{(0)}(x_k)}=0$$
$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ N); \tag{8}$$

- для первого приближения

$$\Phi^{(1)}(x_k)+\overline{\Phi^{(1)}(x_k)}+x_k\overline{\Phi^{(1)\prime}(x_k)}+\overline{\Psi^{(1)}(x_k)}=0$$
$$(k=1,\ 2,\ \ldots,N). \tag{9}$$

Комплексные потенциалы $\varphi_0^{(0)}(z)$ и $\psi_0^{(0)}(z)$, описывающие напряженно-деформированное состояние включения в нулевом приближении, ищем в виде [12]

$$\varphi_0^{(0)}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{(0)}z^k;\quad \psi_0^{(0)}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k^{(0)}z^k. \tag{10}$$

Обозначим левую часть граничного условия (4) через $f_1^0+if_2^0$ и предположим, что на контуре L функция $f_1^0+if_2^0$ разлагается в ряд Фурье. Этот ряд имеет вид

$$f_1^0+if_2^0=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_ne^{in\theta}. \tag{11}$$

На основании граничного условия (4) и соотношений (10), (11), применяя метод степенных рядов [12], найдем

$$a_n^{(0)}=\frac{A_n}{\lambda^n}\quad (n>1),\ \operatorname{Re}a_1^{(0)}=\frac{A_1}{2\lambda};$$
$$b_n^{(0)}=\frac{\overline{A}_{-n}}{\lambda^n}-(n+2)\frac{A_{n+2}}{\lambda^n}\quad (n\geq 0), \tag{12}$$

определяющие коэффициенты $a_n^{(0)}$, $b_n^{(0)}$ функций $\varphi_0^{(0)}(z)$ и $\psi_0^{(0)}(z)$. Для определения величин A_k рассмотрим решение задачи для связующего.

Используя комплексные потенциалы $\varphi_0^{(0)}(z)$ и $\psi_0^{(0)}(z)$, после некоторых преобразований граничные условия на контуре $\tau=\lambda\exp(i\theta)$ для комплексных потенциалов запишутся в виде

$$\varphi^{(0)}(\tau)+\tau\overline{\varphi^{(0)\prime}(\tau)}+\overline{\psi^{(0)}(\tau)}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_ke^{ik\theta}; \tag{13}$$

$$\kappa\varphi^{(0)}(\tau)-\tau\overline{\varphi^{(0)\prime}(\tau)}-\overline{\psi^{(0)}(\tau)}=$$
$$=\frac{\mu}{\mu_0}\left\{\kappa_0\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{(0)}\lambda^ke^{ik\theta}-\overline{a}_1^{(0)}\lambda e^{i\theta}-\right. \tag{14}$$
$$\left.-\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)\overline{a}_{k+2}^{(0)}\lambda^{k+2}e^{-ik\theta}-\sum_{k=0}^{\infty}\overline{b}_k^{(0)}\lambda^ke^{-ik\theta}\right\}.$$

Решение краевой задачи (8), (13), (14) ищем в виде [12, 13]:

$$\Phi^{(0)}(z)=\varphi_1^{(0)\prime}(z)+\Phi_2^{(0)}(z);$$
$$\Psi^{(0)}(z)=\psi_1^{(0)\prime}(z)+\Psi_2^{(0)}(z); \tag{15}$$
$$\varphi_1^{(0)}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k^{(0)}z^{-k};\ \psi_1^{(0)}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}d_k^{(0)}z^{-k};$$
$$\Phi_2^{(0)}(z)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{-l_k}^{l_k}\frac{g_k^0(t)dt}{t-z_k};$$
$$\Psi_2^{(0)}(z)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}e^{-2i\alpha_k}\int_{-l_k}^{l_k}\left[\frac{\overline{g_k^0(t)}}{t-z_k}-\frac{\overline{T}_ke^{i\alpha_k}}{(t-z_k)^2}g_k^0(t)\right]dt;$$

где $T_k = te^{i\alpha_k} + z_k^0$; $z_k = e^{-i\alpha_k}(z - z_k^0)$, $g_k(x_k)$ $(k=1,2,...,N)$ — искомые функции, характеризующие раскрытие берегов трещин

$$g_k^0(x) = \frac{2\mu}{i(1+\kappa)}\frac{\partial}{\partial x}\left[u_{0k}^+ - u_{0k}^- + i(\mathrm{v}_{0k}^+ - \mathrm{v}_{0k}^-)\right].$$

Удовлетворяя функциями (15) граничным условиям (13), (14) и сравнивая коэффициенты при различных степенях $\exp(i\theta)$, получим уравнения для определения коэффициентов $c_k^{(0)}$, $d_k^{(0)}$ и A_k. Удовлетворяя комплексными потенциалами (15) граничным условиям на берегах трещин, получим систему N сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $g_k^0(x_k)$

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{-l_k}^{l_k}\left[R_{nk}(t,x)g_n^0(t) + S_{nk}(t,x)\overline{g_n^0(t)}\right]dt = \pi F_n^0(x)$$
$$|x| \le l_n \quad (n = 1,\ 2,\ ...,\ N); \tag{16}$$

где $F_n^0(x) = -\left[\Phi_1^{(0)}(x) + \overline{\Phi_1^{(0)}(x)} + x\overline{\Phi_1^{(0)\prime}(x)} + \overline{\Psi_1^{(0)}(x)}\right]$; x, t, z_n^0 и l_n — безразмерные величины, отнесенные к R; R_{nk}, S_{nk} — определяются по известным соотношениям ([13], формулы (VI. 62)).

К системе сингулярных интегральных уравнений (16) добавляются дополнительные равенства

$$\int_{-l_k}^{l_k} g_k^0(t)dt = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ ...,\ N), \tag{17}$$

обеспечивающие однозначность смещений при обводе контуров трещин в нулевом приближении.

Система комплексных сингулярных интегральных уравнений (16) при дополнительных условиях (17) сводится [13, 14] к системе $N\times M$ алгебраических уравнений относительно приближенных значений искомых функций $g_k^0(x_k)$ в узловых точках

$$\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} l_k\left[g_k^0(t_m)R_{nk}(l_k t_m, l_n x_r) + \right.$$
$$\left. + \overline{g_k^0(t)}S_{nk}(l_k t_m, l_n x_r)\right] = F_n^0(x_r);$$
$$\sum_{m=1}^{M} g_n^0(t_m) = 0, \tag{18}$$
$$(n = 1,\ 2,\ ...,\ N;\quad r = 1,\ 2,\ ...,\ M-1).$$

Определив решение задачи в нулевом приближении, находим коэффициенты интенсивности напряжений в нулевом приближении для окрестности вершин трещин. После нахождения решения задачи в нулевом приближении можно перейти к решению задачи в первом приближении. На основании решения в нулевом приближении находятся функции $f_1 + if_2$ и $g_1 + ig_2$. Комплексные потенциалы $\varphi_0^{(1)}(z)$, $\psi_0^{(1)}(z)$ и $\varphi^{(1)}(z)$, $\psi^{(1)}(z)$ ищутся в виде аналогичном (10), (15) с очевидными изменениями. Дальнейший ход решения задачи (6), (7), (9) такой же как в нулевом приближении. Применяя метод степенных рядов к граничным условиям (6), (7), после некоторых преобразований находим соотношения для коэффициентов $a_k^{(1)}$, $b_k^{(1)}$, $c_k^{(1)}$, $d_k^{(1)}$ и A_k. Как и в нулевом приближении, эти соотношения таковы, что позволяют в явном виде получить формулы для $a_k^{(1)}$, $b_k^{(1)}$, $c_k^{(1)}$, $d_k^{(1)}$, A_k через функции $g_k^1(x_k)$ и коэффициенты рядов Фурье функций f_1+if_2 и g_1+ig_2.

Удовлетворяя комплексными потенциалами первого приближения граничным условиям, после некоторых преобразований находим систему N комплексных сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $g_k^1(x_k)$

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{-l_k}^{l_k}\left[R_{nk}(t,x)g_k^1(t) + S_{nk}(t,x)\overline{g_k^1(t)}\right]dt = \pi F_n^1(x),$$
$$|x| \le l_n \quad (n = 1,\ 2,\ ...,\ N), \tag{19}$$

где $F_n^1(x) = -\left[\Phi_1^{(1)}(x) + \overline{\Phi_1^{(1)}(x)} + x\overline{\Phi_1^{(1)\prime}(x)} + \overline{\Psi_1^{(1)}(x)}\right]$.

К системе (19) добавляются дополнительные условия

$$\int_{-l_k}^{l_k} g_k^1(t)dt = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ ...,\ N). \tag{20}$$

Как и в нулевом приближении, система сингулярных интегральных уравнений (19) с дополнительными условиями (20) сводится к системе $N\times M$ алгебраических уравнений относительно приближенных значений искомых функций $g_k^1(x_k)$ в узловых точках

$$\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} l_k\left[g_k^1(t_m)R_{nk}(l_k t_m, l_n x_r) + \right.$$
$$\left. + \overline{g_k^1(t)}S_{nk}(l_k t_m, l_n x_r)\right] = F_n^1(x_r),$$
$$\sum_{m=1}^{M} g_n^1(t_m) = 0 \tag{21}$$
$$(n = 1,\ 2,\ ...,\ N;\ r = 1,\ 2,\ ...,\ M-1).$$

При заданной функции $H(\theta)$ полученные алгебраические системы являются замкнутыми и позволяют исследовать напряженно-деформированное состояние составного тела, найти коэффициенты интенсивности напряжений в окрестности вершин трещин для каждого профиля поперечного сечения включения.

Перейдем к задаче оптимального проектирования. Для построения недостающих уравнений, позволяющих определить коэффициенты α_k и β_k, требуем, чтобы обеспечивалась минимизация коэффициентов интенсивности напряжений, т.е. чтобы трещины не росли.

Для предотвращения роста трещин достаточно, чтобы в окрестности вершин трещин все коэффициенты интенсивности напряжений были равны нулю. Добавляя эти $2N$ условия

$$\sum_{m=1}^{M}(-1)^{M+m}\left[g_k^0(t_m) + \varepsilon g_k^1(t_m)\right] tg\frac{2m-1}{4M}\pi = 0$$
$$(k = 1, 2, .., N),$$
$$\sum_{m=1}^{M}(-1)^{m}\left[g_k^0(t_m) + \varepsilon g_k^1(t_m)\right] ctg\frac{2m-1}{4M}\pi = 0 \tag{22}$$

к найденным ранее алгебраическим системам получим замкнутую алгебраическую систему для определения всех неизвестных, в том числе коэффициентов α_k и β_k. Решая алгебраическую систему методом Гаусса с выбором главного элемента для различных механических характеристик связующего и включения, находим искомые параметры геометрии поверхности соединения различных сред. Меняя значения параметров α_k^* и z_k^0, можно исследовать различные случаи расположения трещин в основном материале и их влияние на оптимальную геометрию поверхности соединения материалов в составном теле.

Численный расчет был выполнен для случая, когда матрица ослаблена тремя прямолинейными трещинами $\alpha_1=15°$; $l_1/\lambda = 0{,}075$; $z_1^0 = 1{,}25\lambda e^{i\pi\theta/10}$; $\alpha_2 = 30°$; $l_2/\lambda = 0{,}10$; $z_2^0 = 1{,}35\lambda e^{i\pi\theta/12}$; $\alpha_3 = 45°$; $l_3/\lambda = 0{,}05$; $z_3^0 = 1{,}5\lambda e^{i\pi\theta/18}$. Результаты расчетов коэффициентов разложения функции $H(\theta)$ для волокна $\nu_0 = 0{,}32$; $\mu_0 = 4{,}5 \cdot 10^5$ МПа и матрицы $\nu = 0{,}31$; $\mu = 2{,}6 \cdot 10^5$ МПа приведены в таблице. Коэффициенты разложения даются в мм.

Таблица — Значения коэффициентов Фурье оптимальной формы поперечного сечения волокна для случая трех трещин

α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7
0,1216	0,0785	0,0739	0,0684	0,0656	0,0439	0,0347	0,0211
	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_3	β_7
	0,0847	0,0709	0,0614	0,0492	0,0376	0,0215	0,0129

Оптимальное решение, т.е. найденные коэффициенты α_k и β_k функции $H(\theta)$, способствует повышению несущей способности составного тела.

Заключение. Предложен критерий и метод решения задачи по предотвращению разрушения составного тела (композита) при действии заданной системы внешних нагрузок. Построена замкнутая система алгебраических уравнений, позволяющая получить решение задачи оптимального проектирования композита в зависимости от геометрических и механических характеристик связующего и включений. Найденная форма соединения материалов обеспечивает минимизацию параметров разрушения (коэффициентов интенсивности напряжений) и повышает несущую способность составного тела.

Таким образом, результаты рассмотренной теоретической работы открывают новые возможности оптимального проектирования составных тел (композитов) за счет выбора формы соединения матрицы и включения.

Список обозначений

ε — малый параметр;
R_{max} — наибольшая высота неровности профиля поверхности соединения материалов от окружности $r = \lambda$;
σ_x, σ_y, τ_{xy} — компоненты тензора напряжений;
u, v — составляющие вектора перемещений;
l_k — полудлина прямолинейных трещин;
N — число трещин;
$\rho(\theta)$ — функция, описывающая контур соединения материалов;
α_k, β_k — коэффициенты разложения ряда Фурье искомой функции поверхности соединения материалов;
$\varphi(z)$, $\psi(z)$ и $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ — комплексные потенциалы;
z — комплексная переменная;
$g_k(x_k)$ — искомые функции, характеризующие раскрытие берегов трещин;
M — число чебышевских узлов разбиения интервала интегрирования.

Список литературы

1. Решетов Д.Н. Состояние и тенденции развития деталей машин // Вестн. машиностроения. — 2000. — № 10. — С. 11—15.
2. Фудзуки, Т. Механика разрушения композиционных материалов / Т. Фудзуки, М. Дзако. — М.: Мир, 1982. — 232 с.
3. Андреев, Л.В. В мире оболочек / Л.В. Андреев. — М.: Знание, 1986. — 176 с.
4. Mirsalimov, V.M. The breaking crack build-up in perforated planes by uniform ring switching / V.M. Mirsalimov, E.A. Allahyarov // Int. J. Fracture. — 1996. — Vol. 79, No 1. — Pp. 17—21.
5. Гаджиев, Г.Х. Обратная задача механики разрушения для составного цилиндра контактной пары / Г.Х. Гаджиев, В.М. Мирсалимов // Проблемы механики: сб. ст. к 90-летию со дня рождения А.Ю. Ишлинского / под ред. Д.М. Климова. — М.: Физматлит, 2003. — С. 196—207.
6. Гаджиев, Г.Х. Оптимальное проектирование контактной пары составной цилиндр-плунжер / Г.Х. Гаджиев, В.М. Мирсалимов // Трение и износ. — 2004. — Т. 25. — С. 466—473.
7. Гаджиев, Г.Х. Минимизация параметров разрушения составного цилиндра контактной пары / Г.Х. Гаджиев, В.М. Мирсалимов // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород: сб. ст. к 75-летию со дня рождения Е.И. Шемякина / под ред. Д.Д. Ивлева, Н.Ф. Морозова. — М. Физматлит, 2006. — С. 115—134.
8. Mirsalimov, V.M. Inverse theory of elasticity problem of mounting a disk on a rotating shaft / V.M. Mirsalimov // J. of Machinery Manufacture and Reliability. —2007. — Vol. 36, No 1. — Pp. 35—38.
9. Mirsalimov, V.M. Inverse theory of elasticity problem of mounting a disk on a rotating shaft / V.M. Mirsalimov // J. of Machinery Manufacture and Reliability. 2008. — Vol. 37, No 1. — Pp. 53—59.
10. Мирсалимов, В.М. Обратная задача механики разрушения для составного цилиндра / В.М. Мирсалимов // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 2009. — № 1. — С. 165—173.
11. Мирсалимов, В.М. Минимизация напряженного состояния составного цилиндра / В.М. Мирсалимов // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 2006. — № 6. — С. 97—101.
12. Мусхелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. — М.: Наука, 1966. — 707 с.
13. Панасюк, В.В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацышин. — Киев: Наук. думка, 1976. — 443 с.
14. Мирсалимов, В.М. Неодномерные упругопластические задачи / В.М. Мирсалимов. — М.: Наука, 1987. — 256 с.

Mirsalimov V.M., Mammedova K.S.

Minimization of fracture parameters in composite body

The problem of fracture mechanics to determine the optimal form inclusion what provides a minimum of stress intensity factors near the crack tip is solved. The obtained cross-sectional shape of foreign elastic inclusion enhances the bearing capacity of the composite body.

Поступила в редакцию 16.05.2011.