

УДК 621.833

Н.Н. ИШИН, А.М. ГОМАН, А.С. СКОРОХОДОВ, кандидаты техн. наук
Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси, г. Минск

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ УДАРНОГО ИМПУЛЬСА В ЗАЦЕПЛЕНИИ ПРЯМОЗУБЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КОЛЕС С УЧЕТОМ УПРУГОСТИ ВАЛОВ И ПОДШИПНИКОВ

В работе исследуется влияние упругости валов и подшипников на параметры ударного импульса в зацеплении прямозубых зубчатых колес. Это позволило уменьшить погрешность определения амплитуды ударного импульса с 24,4 % до 8,34 %. При этом точность расчета времени удара не изменилась.

Ключевые слова: ударный импульс, амплитуда импульса, форма импульса, время удара, прямозубые зубчатые колеса, упругие валы, подшипники качения, подшипники скольжения

Введение. Решение задачи ударного взаимодействия прямозубых зубчатых колес необходимо для эффективного осуществления диагностики технического состояния зубчатых приводных механизмов автотракторной техники. Ударное взаимодействие зубчатых профилей при пересопряжении зубьев является источником колебаний элементов привода, параметры которых связаны с техническим состоянием, а значит и с остаточным ресурсом механизма. Эти колебания имеют частоту свыше 2 кГц с большими амплитудами ускорений (десятки м/с²). Сигнал от вибродатчика, установленного на корпусе редуктора, несет информацию о последовательности ударных импульсов, соответствующих зубчатым передачам механизма, причем высокочастотные составляющие этого сигнала, как правило, вызваны колебаниями элементов механизма на резонансных частотах.

Основными задачами диагностики технического состояния приводных зубчатых механизмов являются: нахождение способов разделения вибросигнала на составляющие, каждая из которых соответствует определенной зубчатой передаче; определение по этой составляющей технического состояния этой передачи. Состояние передачи оценивается по градиенту изменения трех параметров ударного импульса: амплитуды, времени действия и фазы (изменением положения импульса на оси времени) [1], которые, в свою очередь, могут быть определены путем сопоставления и анализа расчетного и экспериментального спектров вибраций.

В работах [1–4] решена задача удара зубьев прямозубых колес. В [2] проанализированы динамические модели ударного взаимодействия прямозубых зубчатых колес применительно к задачам вибродиагностики. Дана постановка задачи при первоначальном контакте зубьев вдоль образующих, а также, в случае бочкообразности зубьев, при точечном контакте в начальный момент.

В работе [3] аналитически исследован закон изменения во времени ударной силы, определена форма и время удара. На начальной фазе зацепления контакт зубьев рассматривался как контакт двух цилиндров, соприкасающихся вдоль образующих,

с радиусами ρ_1 и ρ_2 кривизны профилей зубьев соответственно шестерни и колеса. Была принята динамическая модель, учитывающая только крутильные колебания колес относительно равномерного вращения зубчатых колес с постоянной угловой скоростью, вызванные погрешностями изготовления и сборки зубчатых колес. Валы и подшипники предполагались абсолютно жесткими.

Проведенные в [3, 4] исследования показали, что с достаточной для инженерных расчетов точностью можно принять форму ударного импульса взаимодействующих зубчатых передач, описываемую полувошной синусоиды.

Сопоставление результатов эксперимента и расчета показали [4], что погрешность в определении амплитуды ударного импульса составляет более 24 %, что может привести к ощутимой неточности в определении ресурса зубчатой передачи.

Поэтому в данной работе производится расчетное уточнение значений параметров ударного импульса посредством учета упругости валов и подшипников зубчатой передачи. Задача решается путем рассмотрения цепной динамической модели, в которой валы и подшипники представлены в виде упругих связей.

Расчет жесткости подшипников качения и скольжения. Упругие смещения валов в подшипниках складываются из упругих сближений тел качения и колец, определяемых по формулам Герца, и контактных деформаций в посадочных местах колец на вал и в корпус [5]. Жесткость подшипников существенно зависит от их предварительного натяга.

Радиальная жесткость подшипника в узле рассчитывается по формуле

$$J_{r_n} = \frac{F_r}{\delta_r}, \quad (1)$$

где F_r — радиальная нагрузка на опору; δ_r — радиальная деформация подшипника под нагрузкой.

Радиальная деформация подшипника складывается из радиальной деформации наиболее нагруженного тела качения с дорожкой качения δ'_r и радиальной деформацией в контакте колец подшипника с посадочными поверхностями вала и корпуса δ''_r

$$\delta_r = \delta'_r + \delta''_r \quad (2)$$

Радиальная податливость в контакте наиболее нагруженного тела с дорожкой качения в подшипнике [5]:
- с предварительным натягом

$$\delta'_r = \beta \delta_{r,0}, \quad (3)$$

- с радиальным зазором

$$\delta'_r = \beta \delta_{r,0} - 0,5 g_r, \quad (4)$$

где $\delta_{r,0}$ — радиальная податливость в контакте наиболее нагруженного тела качения с дорожкой качения при нулевом зазоре; β — коэффициент, учитывающий величину натяга или зазора в подшипнике.

Величину $\delta_{r,0}$ для подшипников различных типов определяют из уравнений (таблица 25 [5]) в зависимости от величины радиальной нагрузки, воспринимаемой наиболее нагруженным телом качения

$$Q = \frac{5F_r}{iz \cos \alpha}, \quad (5)$$

где i — число рядов тел качения; z — число тел качения в одном ряду; α — угол контакта.

Радиальная податливость δ''_r в контакте колец подшипника с посадочными поверхностями вала и корпуса вычисляется из выражения [5]

$$\delta''_r = \frac{4Pk}{\pi d B} \left(1 + \frac{d}{D} \right), \quad (6)$$

где $k = 0,005 \div 0,025 \text{ мм}^3/\text{кгс}$ (меньшие значения k следует принимать при повышенной точности изготовления посадочных мест, больших посадочных натягах, а также при установке подшипников на конусную шейку); d, D, B — соответственно внутренний, наружный диаметры и ширина подшипника.

Расчеты показывают [5], что радиальная жесткость основных типов подшипников качения общемашиностроительного применения изменяется в пределах

$$J_m = 1 \cdot 10^8 \div 30 \cdot 10^8 \text{ Н/м.}$$

В то же время, радиальная жесткость подшипников скольжения, исследовавшихся в работе [6], имела значение $J_m = 30,5 \cdot 10^8 \text{ Н/м}$.

Выбор динамической модели. Анализ приближенного решения [3] задачи по определению параметров ударного импульса на основе линеаризации уравнения (1) [4] показывает, что в случае жестких валов и подшипников может быть рассмотрена простая двухмассовая система [7] с жесткостью зубчатого зацепления $c_3 = 1/\delta_{кр}$ (рисунок 1).

Величина $\delta_{кр}$ определяется как среднее значение функции податливости контактного взаимодействия зубчатого сопряжения δ_k , определяемой

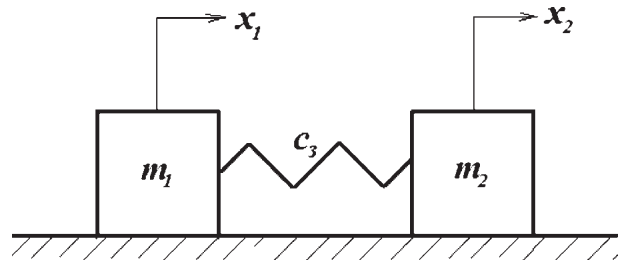


Рисунок 1 — Двухмассовая динамическая схема зубчатой передачи

из уравнения (8) [3], в промежутке изменения величины ударной силы $0 \leq F \leq F_{\max}$. При этом предполагается, что процесс ударного взаимодействия происходит со скоростью кромочного удара V_0 [8].

Для оценки влияния жесткости валов и подшипников на динамическую нагрузку в зубчатом зацеплении и нагруженность корпуса передачи в данной работе используется упрощенная динамическая модель [7], представляющая собой также двухмассовую цепную систему (рисунок 2). В этой модели валы и подшипники представлены в виде упругих связей с эквивалентными жесткостями $c_{1экв}$, $c_{2экв}$. Проведенные расчеты передаточных функций различных конструктивных вариантов зубчатых передач, полученные с помощью предлагаемой упрощенной динамической модели, показали вполне удовлетворительное совпадение с экспериментальными данными [7].

Дифференциальные уравнения движения. На рисунке 2 обозначены: m_1, m_2 — соответственно массы шестерни и колеса; $c_{1экв}$ и $c_{2экв}$ — эквивалентные жесткости валов и подшипниковых узлов шестерни и колеса; x_1, x_2 — перемещения шестерни и колеса.

Рассматриваемая динамическая система имеет две степени свободы. Дифференциальные уравнения движения можно представить в матричной форме

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{1экв} + c_3 & -c_3 \\ -c_3 & c_3 + c_{2экв} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Интегрирование уравнений (7) необходимо производить при следующих начальных условиях: при $t = 0$; $x_1 = x_2 = 0$; $\dot{x}_1 = V_0$; $\dot{x}_2 = 0$. Системе однородных уравнений (7) удовлетворяют гармонические решения вида

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin(pt + \varphi), \\ x_2 &= B_1 \sin(pt + \varphi), \end{aligned} \quad (8)$$

где через A_1, B_1 обозначены амплитудные значения колебательных движений масс m_1, m_2 соответствен-

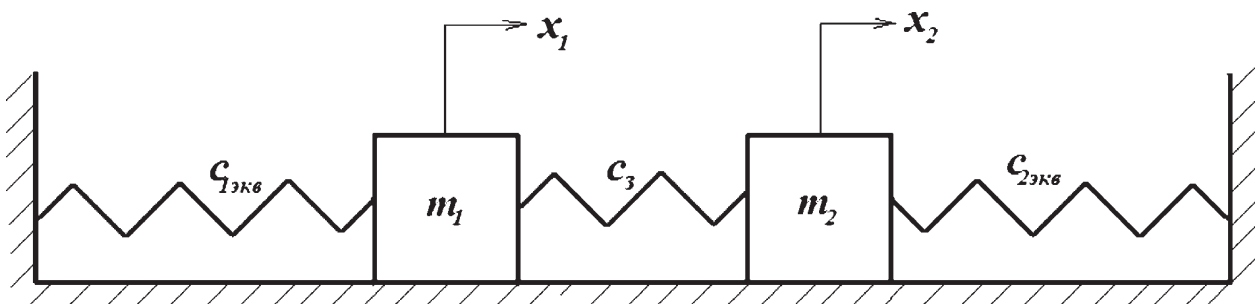


Рисунок 2 — Приближенная динамическая схема зубчатой передачи

но; p — собственная частота системы; φ — фазовый угол. После подстановки решений (8) в уравнение (7) получается система алгебраических уравнений в матричной форме

$$\begin{bmatrix} (c_{1эков} + c_3) - m_1 p^2 & -c_3 \\ -c_3 & (c_3 + c_{2эков}) - m_2 p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Ненулевые решения для перемещений существуют, если определитель уравнения (9) равен нулю

$$\begin{vmatrix} (c_{1эков} + c_3) - m_1 p^2 & -c_3 \\ -c_3 & (c_3 + c_{2эков}) - m_2 p^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

После раскрытия определителя (10), характеристическое уравнение, из которого определяются собственные частоты системы имеет вид

$$m_1 m_2 p^4 - [m_1(c_3 + c_{2эков}) + m_2(c_3 + c_{1эков})] p^2 + (c_{1эков} c_3 + c_{1эков} c_{2эков} + c_{2эков} c_3) = 0 \quad (11)$$

Уравнение (11), являющееся квадратичным относительно p^2 , имеет два корня, которые вычисляются по формуле

$$p_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{c_{1эков} + c_3}{m_1} + \frac{c_{2эков} + c_3}{m_2} \right] \mp \left[\frac{c_{1эков} + c_3}{m_1} + \frac{c_{2эков} + c_3}{m_2} \right]^2 - 4 \frac{c_{1эков} c_3 + c_{1эков} c_{2эков} + c_{2эков} c_3}{m_1 m_2} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

Таким образом, характеристическое уравнение (11) дает два значения собственных частот колебаний, которые зависят только от физических постоянных системы.

После подстановки значений собственных частот p_1^2 и p_2^2 в однородные алгебраические уравнения (9) находятся отношения $r_1 = A_1/B_1$ и $r_2 = A_2/B_2$, соответствующие этим частотам

$$r_1 = \frac{A_1}{B_1} = \frac{c_3}{c_{1эков} + c_3 - m_1 p_1^2} = \frac{c_{2эков} + c_3 - m_2 p_1^2}{c_3}, \quad (13)$$

$$r_2 = \frac{A_2}{B_2} = \frac{c_3}{c_{1эков} + c_3 - m_1 p_2^2} = \frac{c_{2эков} + c_3 - m_2 p_2^2}{c_3}. \quad (14)$$

Общее решение уравнений (7) имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 (B_{11} \sin p_1 t + B_{12} \cos p_1 t) + \\ &+ r_2 (B_{21} \sin p_2 t + B_{22} \cos p_2 t); \\ x_2 &= B_{11} \sin p_1 t + B_{12} \cos p_1 t + \\ &+ B_{21} \sin p_2 t + B_{22} \cos p_2 t. \end{aligned} \quad (15)$$

Продифференцировав выражение (15) по времени, получим выражения для скоростей

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= r_1 p_1 (B_{11} \cos p_1 t - B_{12} \sin p_1 t) + r_2 p_2 (B_{21} \cos p_2 t - \\ &- B_{22} \sin p_2 t); \quad \dot{x}_2 = p_1 (B_{11} \cos p_1 t - B_{12} \sin p_1 t) + \\ &+ p_2 (B_{21} \cos p_2 t - B_{22} \sin p_2 t). \end{aligned} \quad (16)$$

Четыре постоянных интегрирования B_{11} , B_{12} , B_{21} , B_{22} находятся из начальных условий с учетом (15), (16)

$$B_{11} = -\frac{V_0}{p_1(r_2 - r_1)}; \quad B_{21} = \frac{V_0}{p_2(r_2 - r_1)}; \quad B_{12} = B_{22} = 0. \quad (17)$$

Выражения, описывающие процесс ударного взаимодействия зубьев в зубчатой передаче, после подстановки (17) в (15), примут вид

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{V_0}{r_2 - r_1} \left(-\frac{r_1}{p_1} \sin p_1 t + \frac{r_2}{p_2} \sin p_2 t \right), \\ x_2 &= \frac{V_0}{r_2 - r_1} \left(-\frac{1}{p_1} \sin p_1 t + \frac{1}{p_2} \sin p_2 t \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Закон изменения ударной силы в зацеплении F^* с учетом упругости системы описывается выражением

$$F^* = c_3 (x_1 - x_2) = \frac{c_3 V_0}{r_2 - r_1} \left(\frac{1 - r_1}{p_1} \sin p_1 t + \frac{r_2 - 1}{p_2} \sin p_2 t \right). \quad (19)$$

Для оценки влияния жесткости упругих валов и подшипников на величину ударной силы в зубчатом зацеплении вводится коэффициент β_y , определяемый как отношение максимального значения ударной силы $(F^*)_{\max}$ к максимальному значению ударной силы F_{\max} в зубчатой передаче с абсолютно жесткими валами и подшипниками:

$$\beta_y = (F^*)_{\max} / F_{\max}. \quad (20)$$

Оценка влияния упругости валов и подшипников на амплитуду и время действия ударного импульса. Величина F_{\max} определяется по формуле (9) [4]

$$F_{\max} = V_0 \sqrt{\frac{\mu_{np}}{\delta_{кр}}}. \quad (21)$$

Здесь $\delta_{кр}$ — среднее значение функции контактной податливости в сопрягаемой паре зубьев в промежутке изменения величины ударной силы $0 \leq F \leq F_{\max}$. Для исследуемой зубчатой пары $\delta_{кр} = 3,14 \cdot 10^{-9}$ м/Н. Отсюда контактная жесткость зубчатого зацепления $c_3 = 1/\delta_{кр}$.

Предложенные выше зависимости для расчета параметров ударного импульса применимы для зубчатых передач с произвольным передаточным отношением. Массы зубчатых колес в этом случае неодинаковы, а также различны жесткости подшипников и валов, на которых установлены эти колеса.

В экспериментальной паре зубчатых колес [4] массы зубчатых колес, жесткости валов и подшипников одинаковы: $m_1 = m_2 = m$; $c_{1эков} = c_{2эков} = c_{эков}$. Для этой пары собственные частоты в соответствии с формулами (12) равны

$$p_1 = \sqrt{\frac{c_{эков}}{m}}, \quad p_2 = \sqrt{\frac{c_{эков} + 2c_3}{m}}. \quad (22)$$

Из формул (13), (14) следует, что $r_1 = 1$, $r_2 = -1$. После подстановки значений этих коэффициентов в (19) выражение для закона изменения ударной силы запишется следующим образом

$$F^* = c_3 (x_1 - x_2) = \frac{c_3 V_0}{p_2} \sin p_2 t. \quad (23)$$

Откуда следует, что величина амплитуды ударного импульса, найденная с учетом с учетом упругости валов и подшипников, определяется из выражения

$$F_{\max}^* = \frac{c_3 V_0}{p_2}. \quad (24)$$

Время действия импульса T^* для упругой системы будет равно

$$T^* = \frac{\pi}{p_2} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{c_{\text{экв}} + 2c_3}{m}}} \quad (25)$$

После подстановки в (20) выражений (21), (22), (24), выражение для коэффициента β_y для экспериментальной пары зубчатых колес примет вид

$$\beta_y = \frac{c_3 V_0}{V_0 \sqrt{c_3 \mu}} \sqrt{\frac{m}{c_{\text{экв}} + 2c_3}} \quad (26)$$

Для цилиндрических зубчатых колес $m \approx 2\mu$. Тогда после некоторых преобразований из выражения (26) следует

$$\beta_y = \frac{1}{\sqrt{1 + c_{\text{экв}}/2c_3}} \quad (27)$$

Для экспериментальной зубчатой пары жесткость валов $c_b = 2,7 \cdot 10^8$ Н/м; жесткость конических радиально-упорных роликоподшипников $J_m = 4,57 \cdot 10^8$ Н/м; $c_3 = 3,18 \cdot 10^8$ Н/м.

При симметричном расположении зубчатых колес относительно опор эквивалентная жесткость упругого вала и опор в виде подшипников определяется по формуле

$$c_{\text{экв}} = \frac{c_e}{1 + c_e/2J_m} \quad (28)$$

Из (28) следует

$$c_{\text{экв}} = \frac{2,7 \cdot 10^8}{1 + 2,7 \cdot 10^8 / 2 \cdot 4,57 \cdot 10^8} = 2,08 \cdot 10^8 \text{ Н/м.}$$

Коэффициент снижения амплитуды ударного импульса по (26)

$$\beta_y = \frac{1}{\sqrt{1 + 2,08 \cdot 10^8 / 2 \cdot 3,18 \cdot 10^8}} = 0,87.$$

По вычисленному значению коэффициента β_y для экспериментальной пары зубчатых колес определяется уточненное значение амплитуды ударного импульса F_{max}^* . По расчетам, проведенным в [4] для жестких валов и подшипников, получено значение $F_{\text{max}} = 3611$ Н. Погрешность расчета при этом по сравнению с экспериментальными данными ($F_{\text{max}} = 2900$ Н) [4] составила 24,4 %. В соответствии с (20) $F_{\text{max}}^* = 0,87 \cdot 3611 = 3142$ Н. Погрешность вычисления амплитуды ударного импульса при учете жесткости валов и подшипников составляет

$$\Delta F_{\text{max}} = \frac{|2900 - 3142|}{2900} \cdot 100\% = 8,34\%.$$

Время действия импульса рассчитывается по формуле (25)

$$T^* = \frac{\pi}{p_2} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{2,08 \cdot 10^8 + 2 \cdot 3,18 \cdot 10^8}{0,598}}} = 0,836 \cdot 10^{-4} \text{ с.}$$

Погрешность вычисления времени действия импульса составляет

$$\Delta T = \frac{|0,909 \cdot 10^{-4} - 0,836 \cdot 10^{-4}|}{0,909 \cdot 10^{-4}} \cdot 100\% = 8,0\%.$$

Заключение. Сопоставление значений параметров ударного импульса, вычисленных для случая жестких валов и подшипников, со значениями, рассчитанными по предложенной методике, показывает, что учет упругости валов и подшипников уменьшает погрешность определения амплитуды ударного импульса с 24,4 % до 8,34 %. При этом точность определения времени удара практически не изменилась.

Уточнение значений параметров ударного импульса позволяет повысить соответствие расчетного спектра вибраций реальному, что, в свою очередь, повышает достоверность оценки технического состояния зубчатой передачи.

Список литературы

1. Павлов, В.Б. Акустическая диагностика механизмов / В.Б. Павлов. — М.: Машиностроение, 1971. — 224 с.
2. Ишин, Н.Н. Исследование ударного взаимодействия прямозубых зубчатых колёс применительно к задачам вибродиагностики. Постановка задачи, выбор динамической модели, вывод дифференциальных уравнений удара / Н.Н. Ишин, А.М. Гоман, А.С. Скороходов / Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. — 2011. — № 3. — С. 41—46.
3. Ишин, Н.Н. Исследование ударного взаимодействия прямозубых зубчатых колёс применительно к задачам вибродиагностики. Определение параметров ударного импульса в зубчатом зацеплении прямозубых цилиндрических зубчатых колес / Н.Н. Ишин, А.М. Гоман, А.С. Скороходов / Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. — 2012. — № 1. — С. 58—63.
4. Ишин, Н.Н. Исследование параметров ударного импульса в зубчатом зацеплении прямозубых цилиндрических зубчатых колес / Н.Н. Ишин, А.М. Гоман, А.С. Скороходов / Механика машин, механизмов и материалов — 2011. — № 3. — С. 19—23.
5. Бейзельман, Р.Д. Подшипники качения: справ. / Р.Д. Бейзельман, Б.В. Цыпкин, Л.Я. Перель. — М., Машиностроение, 1975. — 572 с.
6. Белкин, А.П. Моделирование вибросостояния и прогнозирование остаточного ресурса электродвигателей магистральных насосных агрегатов: автореф. дис. ... канд. техн. наук / А.П. Белкин; Тюменский гос. архитектур.-строит. ун-т, 2010. — 25 с.
7. Берестнев, О.В. Аналитические методы механики в динамике приводов / О.В. Берестнев, А.М. Гоман, Н.Н. Ишин. — Минск: Навука і тэхніка, 1992. — 238 с.
8. Абрамов, Б.М. Колебания прямозубых зубчатых колес / Б.М. Абрамов. — Харьков: ХГУ, 1968. — 175 с.

Ishin N.N., Goman A.M., Skorokhodov A.S.

Definition of the parameters of the shock pulse in the spur gearing, taking into account the elasticity of shafts and bearings

This paper investigates the effect of elastic shafts and bearings on the parameters of the shock pulse in the mesh spur gears. It is possible to reduce the error in determining the amplitude of the shock pulse from 24.4 % to 8.34 %. The accuracy of the timing of impact has not changed.

Поступила в редакцию 10.04.2012.