



МЕХАНИКА ТРИБОФАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 621.763:621.891

В.Г. БАРСУКОВ, д-р техн. наук

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Республика Беларусь

В.В. БАРСУКОВ

Гродненский дом науки и техники, Республика Беларусь

Б. КРУПИЧ, д-р техн. наук

Белостокский технический университет, Республика Польша

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОЩАДОК СДВИГА В ДЕФОРМИРУЕМЫХ ДИСПЕРСНЫХ МАТЕРИАЛАХ С УЧЕТОМ МЕЖЧАСТИЧНОГО И ВНЕШНЕГО ТРЕНИЯ МЕТОДОМ НАПРЯЖЕНИЙ МОРА

Разработана методика расчета положения площадок сдвига в деформируемых хрупких дисперсных материалах с учетом межчастичного и внешнего трения, основанная на применении круговой диаграммы напряжений Мора. Принято, что фрикционные явления в массиве частиц и зоне их контакта со стенками формы подчиняются закону трения Кулона, а сдвиг реализуется на площадках, на которых касательные напряжения достигают по величине значений удельных сил межчастичного трения. Определен диапазон изменения углов ориентации площадок сдвига при перемене значений коэффициентов межчастичного и внешнего трения.

Ключевые слова: дисперсные материалы, фрикционные явления, межчастичное трение, метод напряжений Мора, закон трения Кулона

Введение. Процессы компактирования дисперсных материалов, широко распространенные во многих отраслях промышленности, характеризуются сочетанием объемного и сдвигового деформирования. Но если закономерности объемного деформирования изучены достаточно глубоко отечественными [1–5] и зарубежными [6–8] исследователями, то вопросы сдвигового деформирования исследованы в меньшей степени [8, 9]. Причиной является сложность фрикционных явлений, обусловленных контактным взаимодействием дисперсных частиц между собой (внутреннее, или межчастичное трение) и со стенками формообразующего инструмента (внешнее, или пристенное трение). Имеющиеся немногочисленные экспериментальные методы разработаны для простейших частных случаев, в которых площадки сдвига совпадают с поверхностями естественного откоса при свободной (без давления) засыпке материалов на плоскость [10], либо с поверхностями образования «мертвых зон» при бункерной засыпке, либо с плоскостями среза для схем поступательного, вращательного или вибра-

ционного сдвига при низких (до 20 кПа) сжимающих давлениях [10]. Универсальных методик измерения углов ориентации площадок сдвига при действии высокого давления не разработано [8].

При теоретическом анализе процессов компактирования дисперсных материалов существуют несколько подходов. Часть из них основана на изучении контактного взаимодействия отдельных частиц. Однако такие подходы разработаны лишь для численного решения простейших модельных задач [11, 12], не всегда обеспечивают требуемую точность расчетов в области высоких давлений и применяются в силу этого сравнительно редко.

Более удобны подходы, при котором для массива частиц составляются уравнения равновесия, дополняемые физическими уравнениями, учитывающими свойства деформируемых сред [3, 6, 8]. В частности, решения, основанные на использовании физических уравнений теорий упругости и пластичности, предсказывают реализацию сдвига на площадках действия максимальных касательных напряжений, расположенных под углом $\pi/4$ к главным площадкам [1, 13].

В механике грунтов [14, 15] и ряде работ по прессованию дисперсных материалов [7, 8, 16] используется следующая формула для расчета угла между площадкой сдвига и площадкой действия максимального сжимающего напряжения p_{\max}

$$\theta = \theta_p = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}, \quad (1)$$

где $\varphi = \arctg f$ — угол межчастичного (внутреннего) трения, f — коэффициент межчастичного трения.

Указанная формула легко и наглядно может быть получена с использованием расчетной схемы предельного равновесия дисперсного материала на основе круговой диаграммы напряжений Мора (рисунок 1).

На этой диаграмме по оси абсцисс отложены осредненные нормальные напряжения, действующие в массиве дисперсных частиц, а по оси ординат — соответствующие касательные напряжения. Сжимающие напряжения приняты положительными. Прямая OC представляет собой графическое изображение закона межчастичного (внутреннего) трения и является огибающей кругов Мора для предельных напряженных состояний, так что $\tg \varphi = f$. Касательные напряжения в точке C равны удельным силам трения, действующим между слоями дисперсного материала на площадках сдвига, а нормальные — соответствующим нормальным.

При расчете угла сдвига θ_p учитывают, что сумма углов треугольника ACO_1 равна π , а углы CAO_1 и ACO_1 равны между собой, из чего непосредственно следует формула (1).

Однако приведенная выше методика расчета составлена для схемы нагружения, заданной в главных напряжениях. Она не учитывает влияние внешнего трения на условия межчастичного сдвига и дает вследствие этого сравнительно точные результаты только для областей деформирования, расположенных вблизи центральной оси формуемой заготовки.

Поскольку для периферийных областей заготовки, контактирующих со стенками формующего инструмента, соответствующих методик расчета не

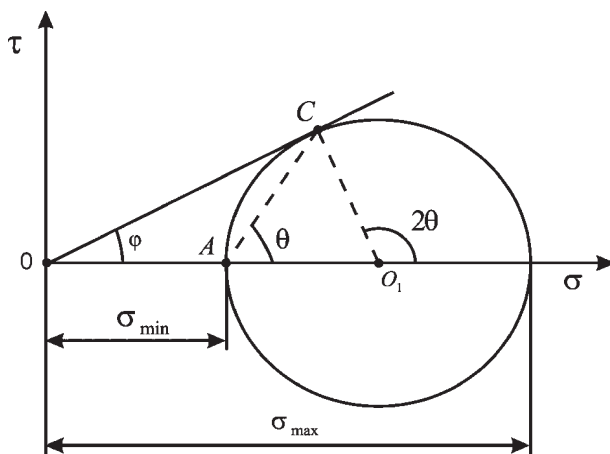


Рисунок 1 — Расчетная схема круга Мора для определения площадок сдвига в хрупких дисперсных материалах для напряженного состояния, заданного в главных напряжениях

разработано, на практике приближенно считают боковое q и осевое p давления в качестве главных напряжений и полагают, что площадки сдвига расположены к площадке действия давления компактирования p под углом, определяемым формулой (1), т. е. что и в центре заготовок, и на периферии угол сдвига один и тот же [8].

Кроме того, поскольку угол между площадкой действия рабочего давления p и бокового давления q равен $\pi/2$, то следствием формулы (1) является зависимость для расчета угла между площадкой сдвига и плоскостью действия бокового давления q

$$\theta_q = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}. \quad (2)$$

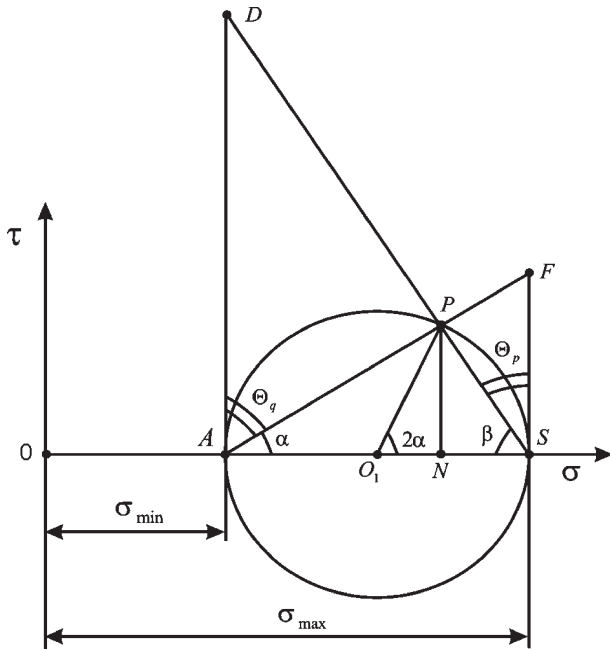
Отсутствие учета влияния внешнего трения на условия межчастичного сдвига приводит к появлению погрешностей в определении положения площадок сдвига в пристенных слоях компактируемых дисперсных материалов, а тем самым, в разделении зон интенсивной и затрудненной сдвиговой деформации. Поэтому исследования и разработки, направленные на усовершенствование методов определения положения площадок сдвига, представляются актуальными.

Целью данной работы является разработка на основе круговой диаграммы напряжений Мора методики расчета углов расположения площадок сдвига в компактируемых хрупких дисперсных материалах с учетом межчастичного и внешнего трения, а также установление диапазона изменения этих углов для различных сочетаний коэффициентов межчастичного и внешнего трения.

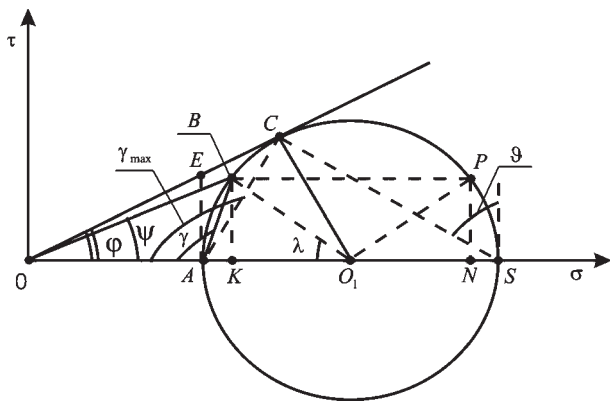
Усовершенствованная методика расчета положения площадок сдвига в хрупких дисперсных материалах. Рассмотрим вначале некоторые свойства диаграммы напряжений Мора (рисунок 2 а). Для произвольного напряженного состояния, соответствующего точке P на диаграмме Мора, нормальные сжимающие напряжения составляют $\sigma_p = ON$, а касательные $\tau_p = PN$. Положение главных площадок можно получить, соединив точку P с точками S и A , которые соответствуют максимальным σ_{\max} (точка S) и минимальным σ_{\min} (точка A) напряжениям. При этом между углами α и β существует следующая взаимосвязь: $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Из вспомогательных треугольников PSF и APD , получаемых путем восстановления перпендикуляров к оси σ в точках S и A , и продления линий главных площадок видно, что угол $\angle PSF = \Theta_p$ равен α , а угол $\angle PAD = \Theta_q$ равен β . Таким образом, вычисляя углы DAP и PSF во вспомогательных треугольниках, можно найти положение главных площадок.

Для определения положения площадок сдвига по отношению к площадкам действия осевого p и бокового q давлений с учетом межчастичного и внешнего трения в дисперсных материалах воспользуемся расчетной схемой, представленной на рисунке 2 б.



а



б

Рисунок 2 — Расчетная схема для определения положения главных площадок (а) и площадок сдвига (б) с использованием модифицированной диаграммы напряжений Мора

На этой схеме точка *B* характеризует напряженное состояние на поверхности контакта деформируемого дисперсного материала со стенками формы, причем отрезок $BK = \tau = \mu q$ соответствует касательным напряжениям от удельных сил трения на поверхности формы, а $OK = q$ — боковому давлению со стороны формы на материал. Вследствие закона парности касательных напряжений и свойств круга Мора точка *P* характеризует напряженное состояние на перпендикулярной грани элемента материала, так что ON соответствует осевому давлению компактирования p . При этом $tg\psi = \mu$ (μ — коэффициент внешнего трения).

Нетрудно убедиться, что угол между площадкой действия минимального давления σ_3 (точка *A*) и текущей площадкой, на которой действует давление q (точка *B*), будет равен углу между прямой *AB* и перпендикуляром, опущенным в точке *A* к

прямой *OP* (линия *AE*). Углом между площадкой сдвига (напряженное состояние соответствует точке *C*) и площадкой минимального давления будет являться угол между линией *AC* и перпендикуляром *AE*. Углом между площадкой действия максимального давления σ_{max} (напряженное состояние соответствует точке *S*) и площадкой сдвига будет угол ϑ , образованный линией *CS* и перпендикуляром, опущенным на ось давлений в точке *S*.

Обозначим углы $\angle COA = \varphi$; $\angle BOA = \psi$; $\angle BAO = \gamma$; $\angle CAO = \gamma_{max}$; $\angle BAC = \theta_q$; $\angle O_1BA = \angle O_1AB = \Omega$.

Найдем угол $\theta_q = \angle BAC$ между площадкой действия бокового давления q и площадкой сдвига. Из рисунка 2 б видно, что $\theta_q = \gamma_{max} - \gamma$. Покажем, что

$$\gamma_{max} = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right). \quad (3)$$

Из $\triangle OO_1C$ следует, что $\lambda_{max} = \frac{\pi}{2} - \varphi$. К тому же в равнобедренном треугольнике O_1AC стороны $O_1A = O_1C$, а углы при основании равны между собой и могут быть вычислены из следующей формулы:

$$\angle CAO_1 = \angle O_1AC = \frac{1}{2}(\pi - \lambda_{max}) = \frac{1}{2} \left[\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right] = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}.$$

Но $\gamma_{max} = \pi - \angle CAO_1 = \pi - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$, что совпадает с формулой (3).

Найдем углы $\angle BAO_1 = \angle ABO_1 = \Omega$. Поскольку сумма углов треугольника AO_1B равна π , то $2\Omega + \lambda = \pi$ или $\Omega = \frac{\pi - \lambda}{2}$. Из развернутого угла OAO_1 находим, что

$$\gamma + \Omega = \pi, \text{ откуда } \gamma = \pi - \Omega = \pi - \left(\frac{\pi - \lambda}{2} \right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\lambda}{2}.$$

Искомый угол θ_q

$$\theta_q = \gamma_{max} - \gamma = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \frac{\lambda}{2}. \quad (4)$$

Выразим вспомогательный угол λ через углы трения ψ и φ .

Из рисунка 2 б видно, что радиус круга Мора $R = O_1B = O_1C$, а длина перпендикуляра

$$BK = R \sin \lambda = q \cdot \mu = q \operatorname{tg} \psi. \quad (5)$$

Поскольку радиус R может быть представлен в виде

$$R = OO_1 \sin \varphi = \frac{OK + ON}{2} \sin \varphi = \frac{p + q}{2} \sin \varphi,$$

то, подставив его значение в формулу (5), получаем:

$$\sin \lambda = \frac{2q\mu}{(p + q)\sin \varphi}. \quad (6)$$

Вследствие того, что

$$\operatorname{tg} \varphi = f,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = f; \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + f^2}},$$

$$\sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi \times \cos \varphi = \frac{f}{\sqrt{1 + f^2}},$$

то (6) может быть преобразовано к виду

$$\sin \lambda = \frac{2q\mu}{(p+q)} \frac{\sqrt{1+f^2}}{f} = \frac{2\xi\mu}{1+\xi} \frac{\sqrt{1+f^2}}{f}, \quad (7)$$

где $\xi = \frac{q}{p}$ — коэффициент бокового давления.

В работе [17] показано, что величина коэффициента бокового давления связана с коэффициентом межчастичного трения f и коэффициентом внешнего трения μ следующей зависимостью

$$\xi = \frac{\sqrt{1+f^2} - \sqrt{f^2 - \mu^2}}{(1+2\mu^2)\sqrt{1+f^2} + \sqrt{f^2 - \mu^2}}. \quad (8)$$

Совместное решение (4), (7) и (8) дает:

$$\theta_q = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{\mu(\sqrt{1+f^2} - \sqrt{f^2 - \mu^2})}{f(1+\mu^2)}. \quad (9)$$

Поскольку $\varphi = \arctg f$, то формула (9) может быть записана в следующем виде:

$$\theta_q = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctg f - \frac{1}{2} \arcsin \frac{\mu(\sqrt{1+f^2} - \sqrt{f^2 - \mu^2})}{f(1+\mu^2)}. \quad (10)$$

Соответственно, для площадки сдвига, отсчитываемой от площадки действия рабочего давления p , расчетное значение угла составит

$$\theta_p = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctg f + \frac{1}{2} \arcsin \frac{\mu(\sqrt{1+f^2} - \sqrt{f^2 - \mu^2})}{f(1+\mu^2)}. \quad (11)$$

На рисунке 3 приведены расчетные значения углов ориентации площадок сдвига в хрупких дисперсных материалах по отношению к площадкам действия бокового давления q как функции межчастичного f и внешнего μ трения, а также их отношения μ/f .

Из представленных данных видно, что углы между площадками сдвига и площадками действия бокового давления компактирования при увеличении коэффициента внешнего трения μ уменьшаются от максимальных значений, предсказываемых уравнением механики грунтов (2), до минимальных, зависящих от соотношения коэффициентов внешнего и межчастичного трения μ/f . Вследствие этого увеличивается угол между площадкой сдвига и площадкой действия осевого давления компактирования.

Заключение. В результате выполненных теоретических исследований, основанных на развитии метода напряжений Мора, получены аналитические зависимости, устанавливающие взаимосвязь между углами ориентации площадок сдвига в компактируемых хрупких дисперсных материалах по отношению к площадкам действия бокового давления компактирования и бокового давления формы с учетом межчастичного и внешнего трения. Определен диапазон изменения этих углов для различных сочетаний значений коэффициентов межчастичного и внешнего трения.

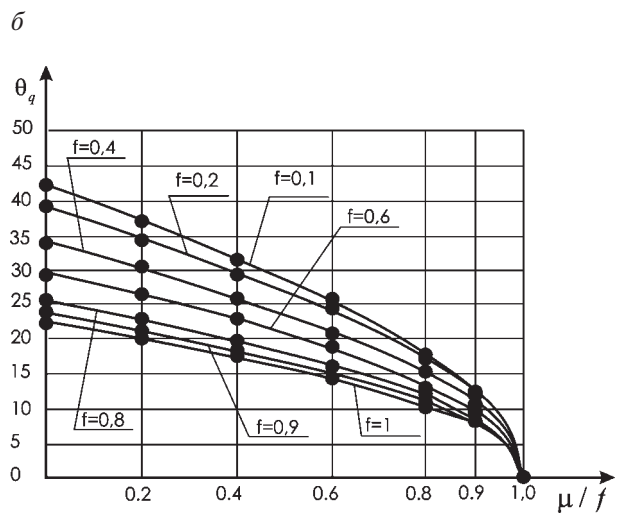
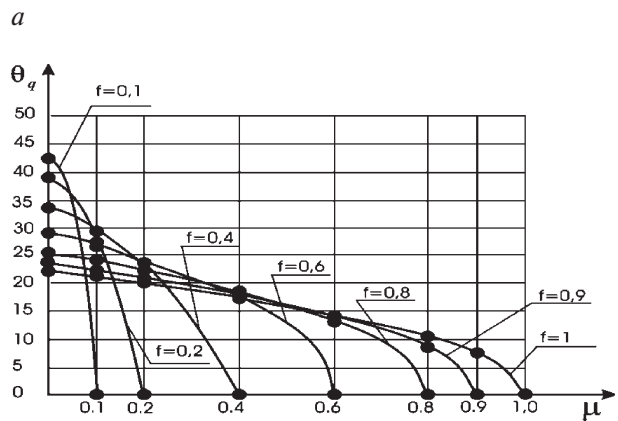
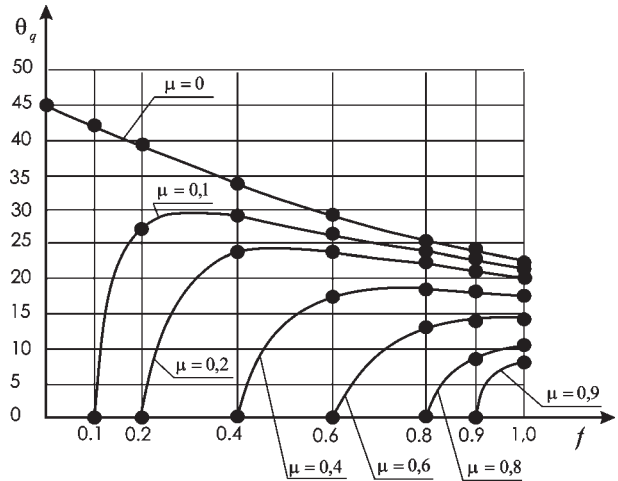


Рисунок 3 — Влияние коэффициентов межчастичного трения f (а), внешнего трения μ (б), а также их отношения μ/f (в) на расчетные значения углов ориентации площадок сдвига в хрупких дисперсных материалах по отношению к площадкам действия бокового давления q

Список обозначений

- f — коэффициент межчастичного трения;
- p — осевое давление;
- q — боковое давление;
- α — угол между главной площадкой и площадкой действия давления p ;

β — угол между главной площадкой и площадкой действия давления q ;

γ_{\max} , ϑ , λ — вспомогательные углы;

θ_q — угол между площадкой сдвига и плоскостью действия бокового давления;

θ_p — угол между площадкой сдвига и плоскостью действия осевого давления;

Θ_q — угол между площадкой сдвига и площадкой действия минимального сжимающего напряжения;

Θ_p — угол между площадкой сдвига и площадкой действия максимального сжимающего напряжения;

φ — угол межчастичного трения;

μ — коэффициент внешнего трения;

ξ — коэффициент бокового давления;

ψ — угол внешнего трения.

Список литературы

1. Друянов, Б.А. Прикладная теория пластичности пористых тел / Б.А. Друянов. — М.: Машиностроение, 1989. — 168 с.
2. Жданович, Г.М. Теория прессования металлических порошков / Г.М. Жданович. — М.: Metallurgia, 1969. — 264 с.
3. Роман, О.В. Справочник по порошковой металлургии: порошки, материалы, процессы / О.В. Роман, И.П. Габриэлов. — Минск: Беларусь, 1988. — 200 с.
4. Объемная штамповка порошковых материалов / В.М. Горохов [и др.]. — Минск: Наука и техника, 1993. — 272 с.
5. Технологические процессы пластического деформирования в машиностроении / А.В. Алифанов [и др.]. — Минск: Наука и техника, 1989. — 208 с.
6. Heift, R. Cisnieniowa aglomeracja materialow roslinnych / R. Heift. — Bialystok, Politechnika Bialostocka, Instytut technologii eksploatacji w Radomiu, 2002. — 258 p.
7. Thompson, R.A. Mechanics of Powder Pressing / R.A. Thompson // Ceramic Bulletin. — 1981(60). — № 2: I. Model for Powder Densification. — Pp. 237–243.
8. Stanley-Wood, N.G. Uniaxial powder compaction / N.G. Stanley-Wood // Tribology in particulate technology. Edd. B.J. Briscoe and M.J. Adams. — Adam Higler, Bristol and Philadelphia, 1987. — Pp. 249–272.
9. Барсуков, В.Г. Трибомеханика дисперсных материалов. Технологические приложения / В.Г. Барсуков, Б. Крупич. — Гродно: ГрГУ, 2004. — 260 с.
10. Tuzun, U. Effects of consolidation and yield history on the measured angles of friction of particulate solids / U. Tuzun. // Tribology in particulate technology Edd. B.J. Briscoe and M.J. Adams. — Adam Higler, Bristol and Philadelphia, 1987. — Pp. 38–62.
11. Mathia, T. Powder mechanics in Tribology / T. Mathia, F. Louis // Powder technology. — 1984. — № 37. — Pp. 155–167.
12. Thornton, C. Computer — simulated experiments on particulate materials / C. Thornton // Tribology in particulate technology / Edd. B.J. Briscoe and M.J. Adams. — Adam Higler, Bristol and Philadelphia. — 1987. — Pp. 292–302.
13. Справочник по сопротивлению материалов / Е.Ф. Винокуров [и др.]. — Минск: Наука и техника, 1988. — 464 с.
14. Гольдштейн, М.Н. Механика грунтов, основания и фундаменты. / М.Н. Гольдштейн, А.А. Царьков, И.И. Черкасов. — М.: Транспорт, 1981. — 240 с.
15. Зенков, Р.Л. Механика насыпных грузов. / Р.Л. Зенков. — М.: Машиностроение, 1964. — 230 с.
16. Smith, G.N. Elements of soil mechanics for civil and mining engineers / G.N. Smith. — London: Granada, 1982.
17. Барсуков, В.В. Трибомеханический метод расчета коэффициента бокового давления в хрупких дисперсных материалах / В.В. Барсуков, Б. Крупич, В.Г. Барсуков // Трение и износ. — 2011. — Т. 32, № 6. — С. 562–570.

Barsukou V.G., Barsukou V.V., Krupich B.

The determination of slip plane in compacting dispersed materials in count of interparticulate and external friction using Mohr's diagram

The method of calculation of slip plane angles in compacting dispersed materials for combined action of interparticulate and external (wall) friction with method of Mohr stresses is developed. The variation range for this angles in dependence at relationship for interparticulate and external (wall) friction is determinate.

Поступила в редакцию 05.05.2012.