



# БИОМЕХАНИКА

УДК 531.3

А.В. ЧИГАРЕВ, д-р физ.-мат. наук

Белорусский национальный технический университет, г. Минск

А.В. БОРИСОВ, канд. техн. наук

Московский энергетический институт, г. Смоленск, Россия

## СИНХРОНИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕВЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

*В работе рассмотрена модель синхронизации звеньев эндо- и экзоскелета в виде стержневой многозвеной системы. Показано, что подобное явление действительно имеет место, и оно частично объясняет стабильность установившейся походки человека.*

**Ключевые слова:** экзоскелет, синхронизация движений, опорно-двигательный аппарат, управление движением, устойчивость

При решении задач управления движением экзоскелета и синтеза его устойчивых периодических походок, возник вопрос об исследовании возможной синхронизации движения нижних конечностей при ходьбе. Это необходимо для того, чтобы упростить систему управления движением при устоявшейся походке человека в экзоскелете, и, следовательно, снизить энергозатраты вычислительной системы экзоскелета на управление.

Синхронизация — это свойство материальных объектов самой различной природы вырабатывать единый ритм совместного существования, несмотря на различие индивидуальных ритмов и на подчас крайне слабые взаимные связи [1]. Математически явление синхронизации следует из свойства нелинейных дифференциальных уравнений определенного вида допускать устойчивые периодические решения.

Рассмотрим модель нижних конечностей человека и корпус для исследования вопроса о возможной синхронизации ног при ходьбе. Здесь возникает слабая связь между нижними конечностями, совершающими колебательные периодические движения и их точкой подвеса, связанной с корпусом, на которую они воздействуют и которая осуществляет некоторую передачу воздействия от одной ноги к другой и обратно. Сами ноги непосредственно между собой не связаны.

Пусть два маятника с сосредоточенными массами  $m_1$  и  $m_2$  подвешены в общей точке на основании массой  $m_0$  (рисунок 1) [1, 2].

В модели маятники колеблются в разных плоскостях, параллельных между собой, но они связа-

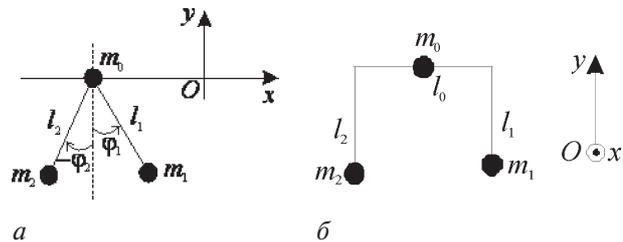


Рисунок 1 — Два звена, близких друг к другу по параметрам, совершающих колебания в противофазе:  
а — вид в профиль; б — вид в анфас

ны между собой с помощью стержня. Если рассматривать движение в плоскости, проходящей через центр масс, то эта связь не влияет на движение в плоскости, а только синхронизирует.

На рисунке 1 угол отсчитывается от вертикали против часовой стрелки. Длины звеньев  $l_1$  и  $l_2$ . Каждое звено имеет одну степень свободы. Это углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , которые примем за обобщенные координаты. Основание имеет также одну степень свободы для поступательного движения в горизонтальном направлении — координату  $x$ , которую также примем за обобщенную координату. Предполагаем, что все обобщенные координаты являются функциями времени:  $x = x(t)$ ,  $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2 = \varphi_2(t)$ .

Координаты сосредоточенных масс в выбранной системе координат записываются так:

$$\begin{aligned} C_0 &= (-x; 0), & C_1 &= (-x + l_1 \sin \varphi_1; -l_1 \cos \varphi_1), \\ C_2 &= (-x + l_2 \sin \varphi_2; -l_2 \cos \varphi_2). \end{aligned} \quad (1)$$

Тогда кинетическая энергия данной системы тел имеет вид:

$$T = \frac{1}{2}((m_1 + m_2 + m_0)\dot{x}^2 + l_1^2 m_1 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 m_2 \dot{\varphi}_2^2) - \dot{x}(l_1 m_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + l_2 m_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2). \quad (2)$$

Потенциальная энергия складывается из энергии силы тяжести и энергии упругости основания:

$$\Pi = -g(l_1 m_1 \cos \varphi_1 + l_2 m_2 \cos \varphi_2) + \frac{1}{2} c_x x^2, \quad (3)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения;  $c_x$  — жесткость упругой системы.

В системе действуют вращающие моменты  $M_1$  и  $M_2$  в точках подвеса звеньев, которые, аналогично работе [3], будем задавать в виде:

$$M_1 = E_1 \text{sign} \dot{\varphi}_1; \quad M_2 = E_2 \text{sign} \dot{\varphi}_2. \quad (4)$$

Имеются и силы сопротивления движению  $K_0$ ,  $K_1$ ,  $K_2$ , которые будем аппроксимировать, следуя работе [1], следующим образом:

$$K_0 = -k_0 \dot{x}, \quad K_1 = -k_1 \dot{\varphi}_1, \quad K_2 = -k_2 \dot{\varphi}_2, \quad (5)$$

где  $k_0$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  — коэффициенты вязкого сопротивления колебаниям основания и звеньев соответственно.

Используя формализм Лагранжа, получаем уравнения движения для рассматриваемой модели:

$$(m_1 + m_2 + m_0)\ddot{x} - \dot{\varphi}_1 l_1 m_1 \cos \varphi_1 - \dot{\varphi}_2 l_2 m_2 \cos \varphi_2 + \dot{\varphi}_1^2 l_1 m_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_2^2 l_2 m_2 \sin \varphi_2 + c_x x = -k_0 \dot{x}; \quad (6)$$

$$m_1 l_1^2 \ddot{\varphi}_1 - \dot{x} l_1 m_1 \cos \varphi_1 + l_1 m_1 g \sin \varphi_1 = E_1 \text{sign} \dot{\varphi}_1 - k_1 \dot{\varphi}_1; \quad (7)$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 - \dot{x} l_2 m_2 \cos \varphi_2 + l_2 m_2 g \sin \varphi_2 = E_2 \text{sign} \dot{\varphi}_2 - k_2 \dot{\varphi}_2. \quad (8)$$

Полученная система дифференциальных уравнений даже в такой простейшей постановке является существенно нелинейной и ее аналитическое решение получить не представляется возможным [4]. Также на практике весьма затруднительно ее исследование на устойчивость. Поэтому, проведем ее численное решение в СКМ Mathematica [5].

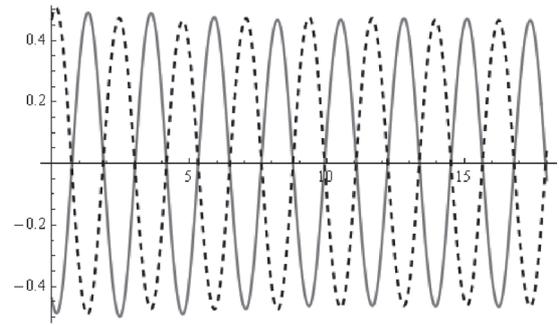
Для численного решения используем значения соответствующих звеньев для человека, определенные нами ранее [6, 7]. Масса звена предполагается равной массе всей ноги, т. е. сумме масс стопы, голени и бедра, длина — сумме длин указанных звеньев. Масса точки крепления ног — это масса корпуса и рук.

Синхронизация имеет место при совместных колебаниях в противофазе, что реализуется при ходьбе человека (рисунок 2 а, б). При этом взяты, в согласии с теорией синхронизации, незначительно отличающиеся начальные условия для звеньев.

Как видно по графику, колебания практически сразу синхронизируются и далее происходят согласованно.

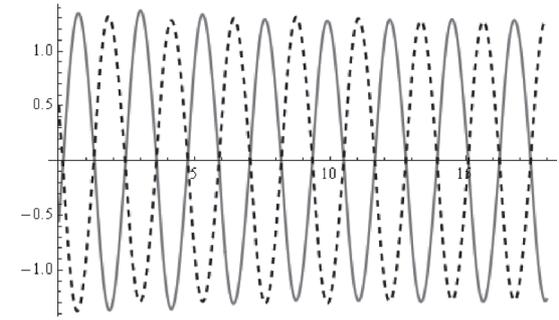
В одной фазе визуальную синхронизацию оценить легче (рисунок 3), но при этом подобные движения нельзя реализовать при ходьбе.

This is  $\varphi 1 = \varphi 1[t]$  and  $\varphi 2 = \varphi 2[t]$



а

This is  $\varphi 1' = \varphi 1'[t]$  and  $\varphi 2' = \varphi 2'[t]$



б

Рисунок 2 — Зависимости угла поворота звена (а) и угловой скорости (б) от времени при колебаниях в противофазе (пунктиром обозначены зависимости для первого звена)

Как видно по рисункам, после начала движения имеются небольшие различия в угловой координате и угловой скорости, связанные с заданием различных начальных условий. Затем, с течением времени, наступает практически полная синхронизация, которая может длиться неограниченное время.

Для ходьбы человека в экзоскелете необходима модель с двухзвенными нижними конечностями, состоящими из бедра и голени каждая. Рассмотрим модель, соответствующую двум двухзвенным ногам человека (рисунок 4). Подобной модели ранее в литературе нами встречено не было.

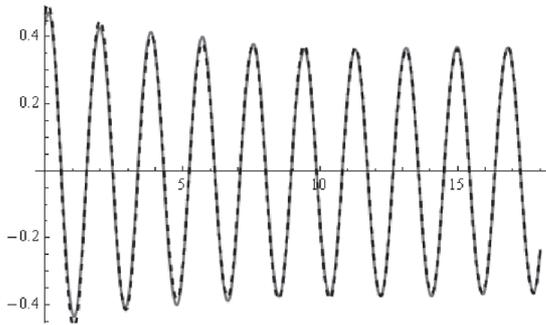
Составляя уравнения движения описанным выше способом и следуя обозначениям (см. рисунок 4), получаем следующую систему дифференциальных уравнений, описывающих движения в данной системе тел:

$$(m_0 + 2(m_1 + m_2))\ddot{x} - \dot{\varphi}_1 l_1 (m_1 + m_2) \cos \varphi_1 - \dot{\varphi}_2 l_2 m_2 \cos \varphi_2 - \dot{\varphi}_3 l_1 (m_1 + m_2) \cos \varphi_3 - \dot{\varphi}_4 l_2 m_2 \cos \varphi_4 + \dot{\varphi}_1^2 l_1 (m_1 + m_2) \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_2^2 l_2 m_2 \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_3^2 l_1 (m_1 + m_2) \sin \varphi_3 + \dot{\varphi}_4^2 l_2 m_2 \sin \varphi_4 + c_x x = -k_0 \dot{x}; \quad (9)$$

$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\varphi}_1 - \dot{x} l_1 (m_1 + m_2) \cos \varphi_1 + l_2 m_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_2 + l_2 m_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_2^2 + l_1 (m_1 + m_2) g \sin \varphi_1 = E_1 \text{sign} \dot{\varphi}_1 - k_1 \dot{\varphi}_1; \quad (10)$$

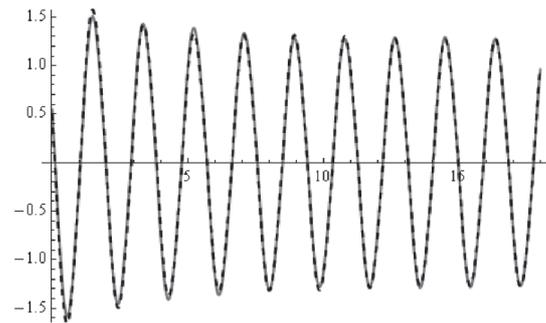
$$m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 - \dot{x} l_2 m_2 \cos \varphi_2 + l_1 l_2 m_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 - l_1 l_2 m_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1^2 + l_2 m_2 g \sin \varphi_2 = E_2 \text{sign} \dot{\varphi}_2 - k_2 \dot{\varphi}_2; \quad (11)$$

This is  $\varphi_1=\varphi_1[t]$  and  $\varphi_2=\varphi_2[t]$



a

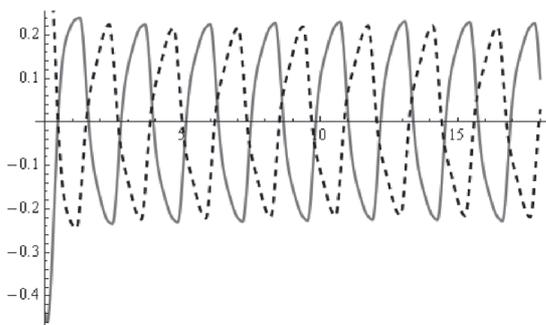
This is  $\varphi_1'=\varphi_1'[t]$  and  $\varphi_2'=\varphi_2'[t]$



б

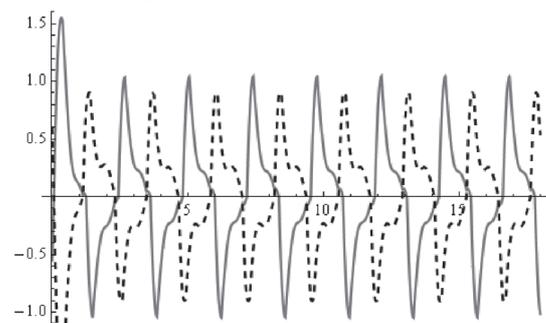
Рисунок 3 — Зависимости угла поворота звена (а) и угловой скорости (б) от времени при колебаниях в одной фазе (пунктиром обозначены зависимости для первого звена)

This is  $\varphi_1=\varphi_1[t]$  and  $\varphi_3=\varphi_3[t]$



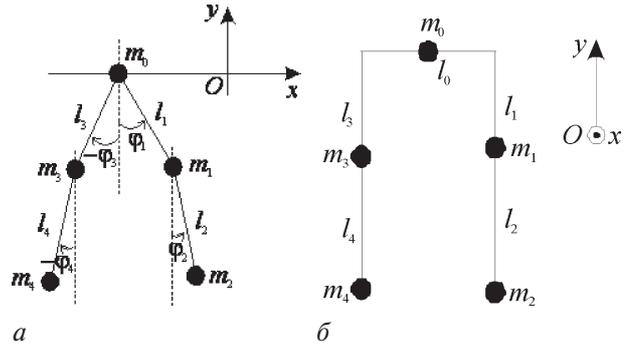
a

This is  $\varphi_1'=\varphi_1'[t]$  and  $\varphi_3'=\varphi_3'[t]$



б

Рисунок 5 — Зависимости угла поворота звена (а) и угловой скорости (б) от времени при колебаниях в противофазе (пунктиром обозначены зависимости для первого звена)



a

б

Рисунок 4 — Два двухзвенных звена, близких к друг другу по параметрам, совершающих колебания в противофазе: а — вид в профиле; б — вид в анфас

$$(m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_3 - \ddot{x}l_1(m_1 + m_2)\cos\varphi_3 + +l_2m_2\cos(\varphi_3 - \varphi_4)\ddot{\varphi}_4 + l_2m_2\sin(\varphi_3 - \varphi_4)\dot{\varphi}_4^2 + (12)$$

$$+l_1(m_1 + m_2)g\sin\varphi_3 = E_1\text{sign}\dot{\varphi}_3 - k_1\dot{\varphi}_3;$$

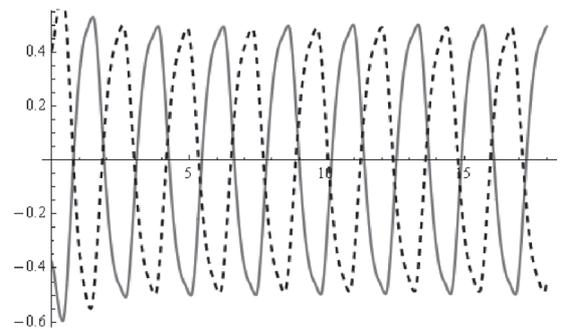
$$m_2l_2^2\ddot{\varphi}_4 - \ddot{x}l_2m_2\cos\varphi_4 + l_1l_2m_2\cos(\varphi_3 - \varphi_4)\ddot{\varphi}_3 - -l_1l_2m_2\sin(\varphi_3 - \varphi_4)\dot{\varphi}_3^2 + l_2m_2g\sin\varphi_4 = (13)$$

$$= E_2\text{sign}\dot{\varphi}_4 - k_2\dot{\varphi}_4.$$

Полученная система дифференциальных уравнений также является существенно нелинейной и ее аналитическое решение получить не представляется возможным. Поэтому, проведем ее численное решение в СКМ Mathematica.

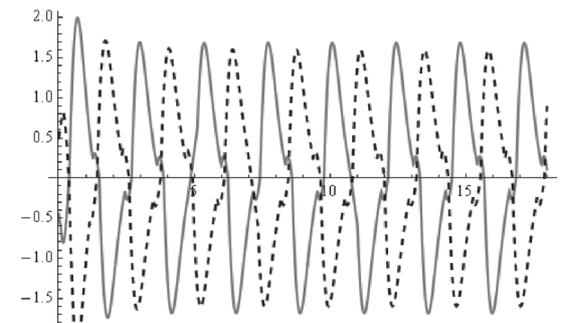
Для численного решения используем значения соответствующих звеньев для испытуемого человека, определенные ранее. Масса звена предполага-

This is  $\varphi_2=\varphi_2[t]$  and  $\varphi_4=\varphi_4[t]$



б

This is  $\varphi_2'=\varphi_2'[t]$  and  $\varphi_4'=\varphi_4'[t]$



б

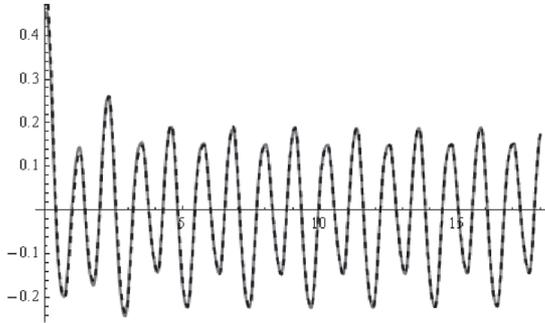
ется равной массе соответствующих звеньев ноги. Масса точки подвеса — это масса корпуса и рук.

Синхронизация многозвенной конечности имеет место при совместных колебаниях в противофазе, что реализуется при ходьбе человека (рисунок 5 а, б).

При этом взяты в согласии с теорией синхронизации незначительно отличающиеся начальные условия.

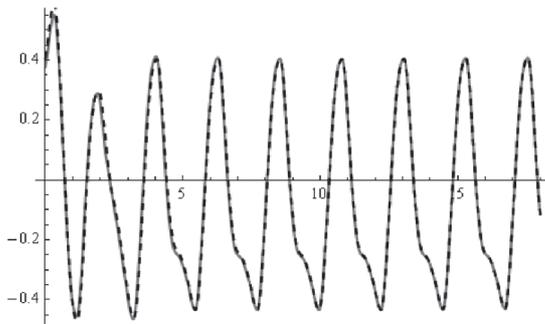
Как видно по графику, колебания практически сразу синхронизируются и далее происходят согласованно. Однако, вид колебаний изменяется, в срав-

This is  $\varphi_1=\varphi_1[t]$  and  $\varphi_3=\varphi_3[t]$



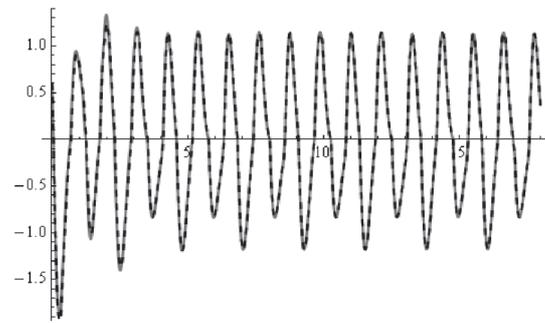
а

This is  $\varphi_2=\varphi_2[t]$  and  $\varphi_4=\varphi_4[t]$



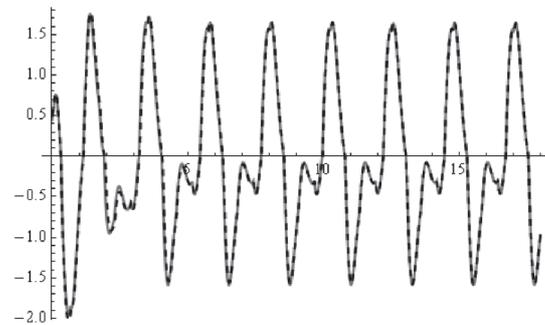
б

This is  $\varphi_1'=\varphi_1'[t]$  and  $\varphi_3'=\varphi_3'[t]$



в

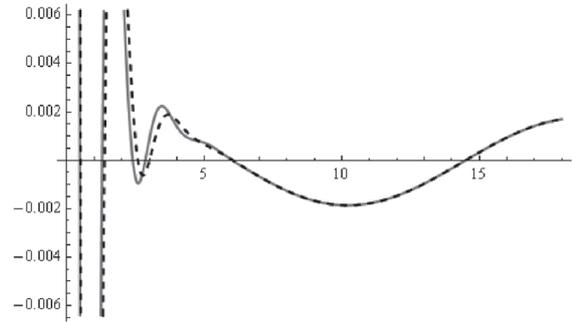
This is  $\varphi_2'=\varphi_2'[t]$  and  $\varphi_4'=\varphi_4'[t]$



г

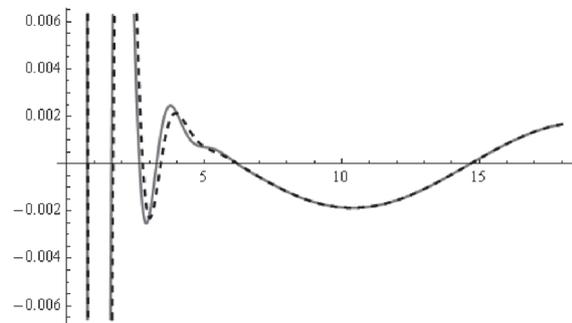
Рисунок 6 — Зависимости угла поворота звена (а) и угловой скорости (б) от времени при колебаниях в одной фазе (пунктиром обозначены зависимости для первого звена)

This is  $\varphi_1=\varphi_1[t]$  and  $\varphi_3=\varphi_3[t]$



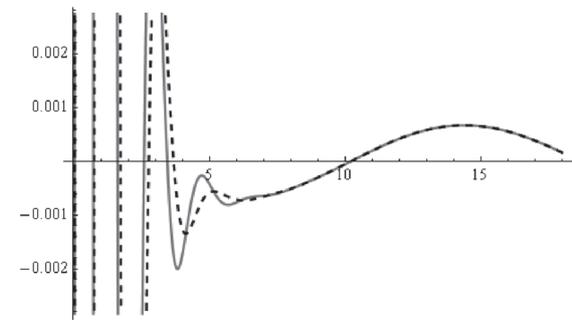
а

This is  $\varphi_2=\varphi_2[t]$  and  $\varphi_4=\varphi_4[t]$



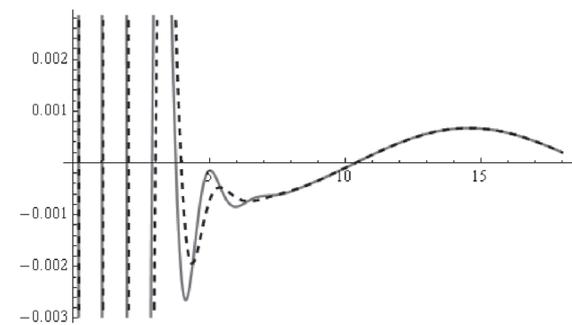
б

This is  $\varphi_1'=\varphi_1'[t]$  and  $\varphi_3'=\varphi_3'[t]$



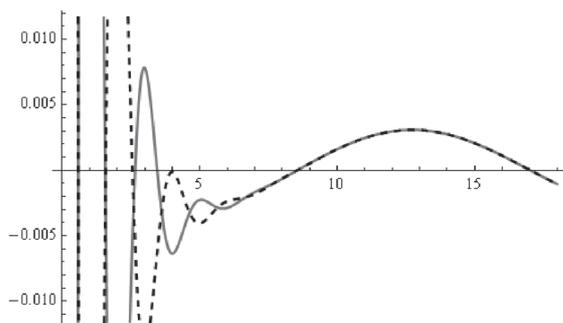
в

This is  $\varphi_2'=\varphi_2'[t]$  and  $\varphi_4'=\varphi_4'[t]$

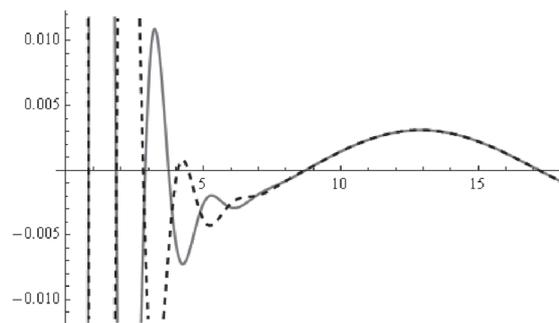


г

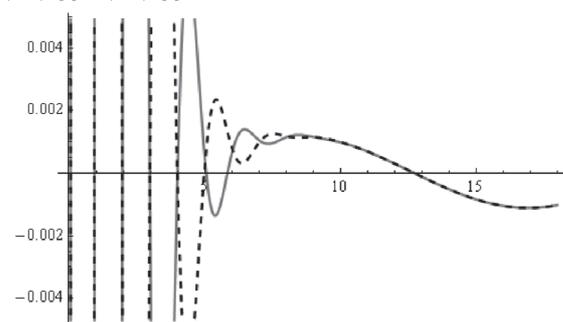
Рисунок 7 — Зависимости угла поворота звена (а, б) и угловой скорости (в, г) от времени при затухающих колебаниях для колебаний в одной фазе (пунктиром обозначены зависимости для первого звена)

This is  $\varphi_1=\varphi_1[t]$  and  $\varphi_3=\varphi_3[t]$ 

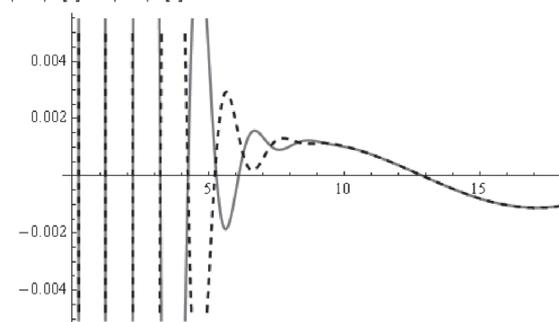
а

This is  $\varphi_2=\varphi_2[t]$  and  $\varphi_4=\varphi_4[t]$ 

б

This is  $\varphi_1'=\varphi_1'[t]$  and  $\varphi_3'=\varphi_3'[t]$ 

в

This is  $\varphi_2'=\varphi_2'[t]$  and  $\varphi_4'=\varphi_4'[t]$ 

з

Рисунок 8 — Зависимости угла поворота звена (а, б) и угловой скорости (в, з) от времени при затухающих колебаниях для колебаний в противофазе (пунктиром обозначены зависимости для первого звена)

нении с однозвенной моделью (см. рисунок 2). Особенно различия проявляются для угловых скоростей.

В одной фазе визуальную синхронизацию оценить легче (рисунок 6), но при этом подобные движения нельзя реализовать при ходьбе.

Как видно по рисункам, с течением времени наступает практически полная синхронизация колебаний.

Рассмотрим случай, когда вынуждающие воздействия отсутствуют. В этом случае имеются затухающие колебания всех звеньев, и сохраняется эффект синхронизации (рисунок 7).

Здесь также имеет место синхронизация колебаний во время их затухания.

Таким образом, исследовано явление синхронизации нижних конечностей человека при ходьбе. Показано, что синхронизация имеет место, причем в различных случаях, как от устойчивой походки с постоянным подведением энергии к системе, так и в случае затухающих колебаний. Установлен эффект возбуждения и поддержания колебаний покоящейся ноги человека, при движении только одной нижней конечности и, после некоторого времени, установления устойчивых колебаний обеих ног.

Полученные результаты частично объясняют стабильность установившейся походки человека. Они могут быть применены к созданию экзоскелетов и антропоморфных роботов со сниженным энергопотреблением и более простой системой управления в случае установившегося движения.

#### Список литературы

1. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971. — 894 с.
2. Гойгенс, Х. Три мемуара по механике / Х. Гойгенс; перевод с латин. — М.: Изд-во АН СССР, 1951.
3. Бутенин, Н.В. К теории принудительной синхронизации / Н.В. Бутенин // Памяти А.А. Андропова: сб. — М.: Изд-во АН СССР, 1955.
4. Чигарев А.В. Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред. — Минск: Технопринт, 2000. — 425 с.
5. Чигарев, А.В. Основы системы Mathematica 6.0. Задачи и решения / А.В. Чигарев. — Минск: Технопринт, 2008. — 136 с.
6. Борисов, А.В. Методы определения длин конечностей и звеньев человека с расчетом инерционных характеристик / А.В. Борисов // Науч. тр. междунар. науч.-практич. конф. ученых МАДИ(ГТУ), МСХА, ЛНАУ 5–6 янв. 2004 г. — Т. 4: Педагогика и методика. — М.-Луганск: Изд-во МАДИ(ГТУ), МСХА, ЛНАУ; Смоленск: Инга, 2004. — С. 77–90.
7. Чигарев, А.В. Биомеханика: учеб. / А.В. Чигарев, Г.И. Михасев, А.В. Борисов. — Минск: Изд-во Гревцова, 2010. — 284 с.

Chigarev A.V., Borisov A.V.

#### The modeling of synchrony of endo- and exoskeleton links in the process of motion

A model of synchronization of endo- and exoskeleton in the form of beam multilink structure is considered in this work. It is shown that such a phenomenon really takes place and it partially explains the stability of terminal human manner of walking.

Поступила в редакцию 25.07.2012.