УДК 539.3

Т.Б. МАМЕДОВА
Бакинский славянский университет, Азербайджанская Республика

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ РАДИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ СФЕРЫ МАЛОЙ ТОЛЩИНЫ СО СМЕШАННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ НА БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости исследовано трехмерное напряженно-деформированное состояние радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферы малой толщины. Построены неоднородные и однородные решения. Получены асимптотические разложения однородных решений и проведен анализ напряженно-деформированных состояний, соответствующих однородным решениям.

Ключевые слова: *неоднородные решения, однородные решения, пограничный слой, краевой эффект*

Введение. Сложная природа явлений, возникающих при деформации неоднородных конструкций, привела к созданию многих прикладных теорий, каждая из которых построена на основе определенной системы допущений. Сам факт существования различных прикладных теорий для неоднородных конструкций требует их критического анализа на основе строгого математического подхода, т. е. с позиции трехмерных уравнений теории упругости. Кроме того, целый ряд вопросов, связанных с изучением напряженно-деформированного состояния для неоднородных конструкций, может быть решен только в рамках теории упругости.

Постановка задачи. 1. Рассмотрим осесимметричную задачу теории упругости для радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферы малой толщины. В сферической системе координат область, занятую сферой, обозначим через $\Gamma = \{r \in [r_1, r_2],\ \theta \in [\theta_1, \theta_2],\ \varphi \in [0, 2\pi]\}$. Предположим, что сфера не содержит ни один из полюсов 0; π.

Система уравнений равновесия при отсутствии массовых сил в сферической системе координат имеет вид [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \\ + \dfrac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{r\theta} ctg\theta}{r} = 0, \\ \dfrac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \\ + \dfrac{(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) ctg\theta + 3\ {}_{r\theta}}{r} = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{\theta\theta}$ — компоненты тензора напряжений, которые выражаются через векторы перемещений $u_r = u_r(r, \theta)$, $u_\theta = u_\theta(r, \theta)$ следующим образом [2]:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = b_{11}\dfrac{\partial u_r}{\partial r} + b_{12}\left(\dfrac{u_\theta}{r} ctg\theta + \dfrac{2u_r}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} = b_{12}\dfrac{\partial u_r}{\partial r} + (b_{22} + b_{23})\dfrac{u_r}{r} + b_{22}\dfrac{u_\theta}{r} ctg\theta + \dfrac{b_{23}}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \\ \sigma_{\theta\theta} = b_{12}\dfrac{\partial u_r}{\partial r} + (b_{22} + b_{23})\dfrac{u_r}{r} + b_{23}\dfrac{u_\theta}{r} ctg\theta + \dfrac{b_{22}}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \\ \sigma_{r\theta} = b_{44}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} - \dfrac{u_\theta}{r}\right). \end{cases} \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получаем уравнения равновесия в перемещениях:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \rho}\left\{e^{-\varepsilon\rho}\left[b_{11}\dfrac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \varepsilon b_{12}\left(u_\theta ctg\theta + 2u_\rho + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right)\right]\right\} + \\ + \varepsilon e^{-\varepsilon\rho}\left[\varepsilon(2b_{12} - b_{22} - b_{23} - b_{44})\left(\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_\theta ctg\theta\right) + \right. \\ + 2(b_{11} - b_{12})\dfrac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + 2(2b_{12} - b_{22} - b_{23})\varepsilon u_\rho + \\ \left. + b_{44}\left(\dfrac{\partial^2 u_\theta}{\partial \rho \partial \theta} + \varepsilon\dfrac{\partial^2 u_\rho}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial \rho} ctg\theta + \varepsilon\dfrac{\partial u_\rho}{\partial \theta} ctg\theta\right)\right] = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho}\left\{b_{44}e^{-\varepsilon\rho}\left(\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \rho} + \varepsilon\dfrac{\partial u_\rho}{\partial \theta} - \varepsilon u_\theta\right)\right\} + \varepsilon e^{-\varepsilon\rho}\left[b_{12}\dfrac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho \partial \theta} + \right. \\ + \varepsilon(b_{22} + b_{23} + 3b_{44})\dfrac{\partial u_\rho}{\partial \theta} - \varepsilon(b_{23} + 3b_{44})u_\theta + \\ \left. + \varepsilon b_{22} \times \left(\dfrac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} ctg\theta - u_\theta ctg^2\theta\right) + 3b_{44}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \rho}\right] = 0, \end{cases} \qquad (3)$$

где $\rho = \dfrac{1}{\varepsilon}\ln\left(\dfrac{r}{r_0}\right)$ — новая радиальная переменная; $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)$ — малый параметр, характеризующий толщину сферы; $r_0 = \sqrt{r_1 r_2}$, $\rho \in [-1; 1]$; $b_{ij} = b_{ij}(\rho)$ — упругие характеристики, рассматриваемые как произвольные кусочно-непрерывные функции переменной ρ, значения которой могут меняться в пределах одного порядка (многослойная сфера рассматривается как частный случай).

Предположим, что на боковых поверхностях сферы заданы следующие смешанные граничные условия:

$$\begin{cases} u_\rho(\rho,\theta)\Big|_{\rho=\pm1} = d^\pm(\theta), \\ \sigma_{\rho\theta}\Big|_{\rho=\pm1} = \dfrac{b_{44}e^{-\varepsilon\rho}}{\varepsilon}\left(\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\rho} + \varepsilon\dfrac{\partial u_\rho}{\partial\theta} - \varepsilon u_\theta\right)\Bigg|_{\rho=\pm1} = h^\pm(\theta). \end{cases} \tag{4}$$

Считаем, что $d^\pm(\theta)$, $h^\pm(\theta)$ достаточно гладкие функции.

Допустим, что на торцах сферы заданы произвольные граничные условия, оставляющие сферу в равновесии.

2. Рассмотрим построение частных решений (3), удовлетворяющих граничным условиям (4), т. е. неоднородных решений.

Неоднородные решения отыскиваем в виде

$$u_\rho = u_{\rho0} + \varepsilon u_{\rho1} + \ldots; \qquad u_\theta = \varepsilon^{-1}\left(u_{\theta0} + \varepsilon u_{\theta1} + \ldots\right). \tag{5}$$

Подстановка (5) в (3), (14) приводит к системе, последовательное интегрирование которой дает соотношения для коэффициентов разложения (5):

$$u_{\rho0} = -\left[g_1'(\theta) + g_1(\theta)ctg\theta\right]\int_{-1}^{\rho}\frac{b_{12}}{b_{11}}dx + g_2(\theta)\int_{-1}^{\rho}\frac{1}{b_{11}}dx + d^-(\theta),$$

$$u_{\theta0} = g_1(\theta),\ \ u_{\theta1} = (\rho+1)g_1(\theta) + g_3(\theta),$$

$$\begin{aligned} u_{\rho1} = g_2(\theta)\Bigg[&\int_{-1}^{\rho}\frac{1}{b_{11}}\left(\int_{-1}^{y}\frac{2(b_{12}-b_{11})}{b_{11}}dx\right)dy + \int_{-1}^{\rho}\frac{x}{b_{11}}dx - \\ &-2\int_{-1}^{\rho}\frac{b_{12}}{b_{11}}\left(\int_{-1}^{y}\frac{1}{b_{11}}dx\right)dy\Bigg] - 2d^-(\theta)\int_{-1}^{\rho}\frac{b_{12}}{b_{11}}dx + \\ &+g_4(\theta)\int_{-1}^{\rho}\frac{1}{b_{11}}dx - \left[g_1'(\theta) + g_1(\theta)ctg\theta\right]\times \\ &\times\Bigg[\int_{-1}^{\rho}\frac{b_{12}}{b_{11}}(x+1)dx - 2\int_{-1}^{\rho}\frac{b_{12}}{b_{11}}\left(\int_{-1}^{y}\frac{b_{12}}{b_{11}}dx\right)dy + \\ &+\int_{-1}^{\rho}\frac{1}{b_{11}}\left(\int_{-1}^{y}\frac{2b_{12}^2 - b_{11}b_{22} - b_{11}b_{23}}{b_{11}}dx\right)dy\Bigg] - \\ &-\left[g_3'(\theta) + g_3(\theta)ctg\theta\right]\int_{-1}^{\rho}\frac{b_{12}}{b_{11}}dx, \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} &\frac{\left(t_0q_0 - p_0^2 - q_0b_{22}^{(0)}\right)}{q_0}\left[g_1''(\theta) + ctg\theta\cdot g_1'(\theta) - \frac{g_1(\theta)}{\sin^2\theta}\right] + \\ &+\left(b_{23}^{(0)} - b_{22}^{(0)}\right)g_1(\theta) = h(\theta) + \frac{p_0}{q_0}d'(\theta); \end{aligned} \tag{7}$$

$$g_2(\theta) = \frac{p_0}{q_0}\left[g_1'(\theta) + ctg\theta\cdot g_1(\theta)\right] + \frac{d(\theta)}{q_0};$$

$$\begin{aligned} g_4(\theta) = &\left[\frac{1}{p_0}\left(p_1 + p_0 - 2n_{11} + G_0\right) + \frac{1}{q_0}\left(2n_{10} - \alpha_0 - q_1\right)\right]g_2(\theta) + \\ &+p_0\left[g_3'(\theta) + ctg\theta\cdot g_3(\theta)\right] + \frac{2p_1}{q_0}d^-(\theta) - \frac{d(\theta)}{p_0q_0}\left(p_1 + p_0 - 2n_{11} + G_0\right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left(t_0 - p_0^2 - b_{22}^{(0)}\right)\left[g_3''(\theta) + ctg\theta\cdot g_3'(\theta)\right] + \\ &+\left[p_0^2 + b_{23}^{(0)} - t_0 + \left(b_{22}^{(0)} + p_0^2 - t_0\right)ctg^2\theta\right]g_3(\theta) = \\ &=\Bigg[\frac{q_0}{p_0}\left(2n_{21} + 2t_0 - 3t_1 - -G_1 - w_1 + 3b_{22}^{(1)} - 2b_{22}^{(0)}\right) + \\ &+\alpha_1 - 2n_{20} + w_0 - 2n_{11} + G_0 - 4p_1 - 2p_0 + \frac{p_0}{q_0}\left(2n_{10} - \alpha_0 - q_1\right)\Bigg]g_2(\theta) + \\ &+\left(\frac{3q_0\gamma_0}{p_0} - 3l_0\right)g_2(\theta) + \left(2b_{23}^{(0)} - 3b_{23}^{(1)} - 2b_{22}^{(0)} + 3b_{22}^{(1)}\right)g_1(\theta) + \\ &+\left[\frac{3t_1 - 2t_0 - 2n_{21} + G_1 + w_1 + 2b_{22}^{(0)} - 3b_{22}^{(1)}}{p_0} + \frac{2n_{11} - f_0 - p_1 - p_0}{q_0}\right]d'(\theta) + \\ &+\left(d^-(\theta)\right)'\left(b_{22}^{(0)} + b_{23}^{(0)} + 3b_{44}^{(0)} - 2t_0 + \frac{2p_0p_1}{q_0}\right) + 6h^-(\theta) - \frac{3d(\theta)}{p_0}\gamma_0; \end{aligned}$$

$$h(\theta) = h^+(\theta) - h^-(\theta);\ \ d(\theta) = d^+(\theta) - d^-(\theta);\ \ q_k = \int_{-1}^{1}\frac{\rho_k}{b_{11}}d\rho;$$

$$p_k = \int_{-1}^{1}\frac{b_{12}}{b_{11}}\rho^k d\rho;\ \ t_k = \int_{-1}^{1}\frac{b_{12}^2}{b_{11}}\rho^k d\rho;\ \ l_k = \int_{-1}^{1}\frac{b_{44}}{b_{11}}\rho^k d\rho;$$

$$\gamma_k = \int_{-1}^{1}\frac{b_{44}b_{12}}{b_{11}}\rho^k d\rho;\ \ b_{44}^{(k)} = \int_{-1}^{1}b_{44}\rho^k d\rho;\ \ b_{23}^{(k)} = \int_{-1}^{1}b_{23}\rho^k d\rho;$$

$$b_{22}^{(k)} = \int_{-1}^{1}b_{22}\rho^k d\rho;\ \ n_{ks} = \int_{-1}^{1}\frac{b_{12}^k}{b_{11}}\left(\int_{-1}^{\rho}\frac{b_{12}^s}{b_{11}}dx\right)d\rho;$$

$$G_k = \int_{-1}^{1}\frac{b_{12}^k}{b_{11}}\left(\int_{-1}^{\rho}\frac{2b_{12}^2 - b_{11}b_{22} - b_{11}b_{23}}{b_{11}}dx\right)d\rho;$$

$$w_k = \int_{-1}^{1}\left(b_{22} + b_{23} + 3b_{44}\right)\left(\int_{-1}^{\rho}\frac{b_{12}^k}{b_{11}}dx\right)d\rho;$$

$$\alpha_k = \int_{-1}^{1}\frac{b_{12}^k}{b_{11}}\left(\int_{-1}^{\rho}\frac{2(b_{12} - b_{11})}{b_{11}}dx\right)d\rho.$$

Компоненты тензора напряжений, соответствующие решениям (5), имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} = \frac{1}{\varepsilon}\Bigg\{&g_2(\theta) + \varepsilon\Bigg[\int_{-1}^{\rho}\frac{2(b_{12} - b_{11})}{b_{11}}dx\, g_2(\theta) - \left(g_1'(\theta) + ctg\theta\cdot g_1(\theta)\right)\times \\ &\times\int_{-1}^{\rho}\frac{\left(2b_{12}^2 - b_{11}b_{22} - b_{11}b_{23}\right)}{b_{11}}dx + g_4(\theta)\Bigg] + O\left(\varepsilon^2\right)\Bigg\}; \end{aligned}$$

$$\sigma_{\rho\theta} = \left[g_1'(\theta) + g_1(\theta)ctg\theta\right]'\int_{-1}^{\rho}\frac{b_{12}^2}{b_{11}}dx - g_2'(\theta)\int_{-1}^{\rho}\frac{b_{12}}{b_{11}}dx +$$

$$+g_1(\theta)\left[\int_{-1}^{\rho} b_{23}dx+ctg^2\theta\int_{-1}^{\rho} b_{22}dx\right]-\left[g_1''(\theta)+g_1'(\theta)ctg\theta\right]\times$$

$$\times\int_{-1}^{\rho} b_{22}dx+h^-(\theta)+O(\varepsilon);$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}=\frac{1}{\varepsilon}\Big[b_{23}g_1'(\theta)+b_{22}ctg\theta\cdot g_1(\theta)+$$

$$+\left(\frac{b_{12}}{b_{11}}-\frac{q_0}{p_0}\frac{b_{12}^2}{b_{11}}\right)g_2(\theta)+\frac{b_{12}^2}{p_0b_{11}}d(\theta)+O(\varepsilon)\Big]; \qquad (8)$$

$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{1}{\varepsilon}\Big[b_{22}g_1'(\theta)+b_{23}ctg\theta\cdot g_1(\theta)+$$

$$+\left(\frac{b_{12}}{b_{11}}-\frac{q_0}{p_0}\frac{b_{12}^2}{b_{11}}\right)g_2(\theta)+\frac{b_{12}^2}{p_0b_{11}}d(\theta)+O(\varepsilon)\Big].$$

3. Однородным решением будем называть всякое решение уравнений (3), удовлетворяющее условию:

$$u_\rho=0,\ \ \sigma_{\rho\theta}=0 \ \text{ при } \ \rho=\pm1. \qquad (9)$$

Решение задачи. Решение (3), (9) ищем в виде:

$$u_\rho(\rho;\theta)=a(\rho)m(\theta);\ \ u_\theta(\rho,\theta)=c(\rho)m'(\theta), \qquad (10)$$

где функция $m(\theta)$ удовлетворяет уравнению Лежандра [3]:

$$m''(\theta)+ctg\theta\cdot m'(\theta)+\left(z^2-\frac{1}{4}\right)m(\theta)=0. \qquad (11)$$

Подставляя (10) в (3), (9), с учетом (11) получаем следующие граничные задачи:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{d\rho}\left\{e^{-\varepsilon\rho}\left[b_{11}\dfrac{da}{d\rho}+\ \varepsilon b_{12}\left(2a-\left(z^2-\dfrac{1}{4}\right)c\right)\right]\right\}+\\ +\varepsilon e^{-\varepsilon\rho}\left\{2(b_{11}-b_{12})\dfrac{da}{d\rho}+2(2b_{12}-b_{22}-b_{23})\,\varepsilon a-\left(z^2-\dfrac{1}{4}\right)\times\right.\\ \left.\times\left[\varepsilon\,(2b_{12}-b_{22}-b_{23}-b_{44})c+\ \varepsilon b_{44}a+b_{44}\dfrac{dc}{d\rho}\right]\right\}=0,\\ \dfrac{d}{d\rho}\left\{b_{44}e^{-\varepsilon\rho}\left[\dfrac{dc}{d\rho}+\varepsilon(a-c)\right]\right\}+\\ +\varepsilon e^{-\varepsilon\rho}\left[b_{12}\dfrac{da}{d\rho}+\varepsilon(b_{22}+b_{23}+3b_{44})a+\right.\\ \left.+3b_{44}\dfrac{dc}{d\rho}-\varepsilon(b_{23}+3b_{44})c+\varepsilon b_{22}\left(\dfrac{5}{4}-z^2\right)c\right]=0,\\ a(\rho)\big|_{\rho=\pm1}=0,\\ b_{44}\left[c'(\rho)+\varepsilon\big(a(\rho)-c(\rho)\big)\right]\Big|_{\rho=\pm1}=0.\end{cases} \qquad (12)$$

Для решения (12) при $\varepsilon\to0$ воспользуемся асимптотическим методом, основанном на трех итерационных процессах [4]. Однородные решения, соответствующие первому итерационному процессу, можно получить из (5—7), если в них положить $d^{\pm}(\theta)=0$, $h^{\pm}(\theta)=0$. В результате получим, что первому итерационному процессу соответствуют тривиальные однородные решения.

Решения, имеющие характер краевого эффекта, соответствующие второму асимптотическому процессу для радиально-неоднородной трансверсально-изотропной сферы со смешанными однородными краевыми условиями на боковой поверхности, не существуют.

Согласно третьему итерационному процессу, решение (12) отыскиваем в виде:

$$\begin{aligned}a^{(3)}(\rho)&=a_{30}(\rho)+\varepsilon a_{31}(\rho)+....,\\ c^{(3)}(\rho)&=\frac{\varepsilon}{\beta_0}\big(c_{30}(\rho)+\varepsilon c_{31}(\rho)+...\big),\\ z&=i\varepsilon^{-1}(\beta_0+\varepsilon\beta_1+...).\end{aligned} \qquad (13)$$

После подстановки (13) в (12) для первых членов получаем:

$$T(\beta_0)\mathbf{f}_0=\left\{t(\beta_0)\mathbf{f}_0;\ \ l(\beta_0)\mathbf{f}_0=\mathbf{0}\ \text{при}\ \rho=\pm1\right\}=\mathbf{0}, \qquad (14)$$

$$t(\beta_0)\mathbf{f}_0=\left(B_0+\beta_0B_1+\beta_0^2B_2\right)\mathbf{f}_0,\ \ l(\beta_0)\mathbf{f}_0=\left(C_0+\beta_0C_1\right)\mathbf{f}_0,$$

$$B_0=\begin{Vmatrix}\partial(b_{11}\partial) & 0\\ 0 & \partial(b_{44}\partial)\end{Vmatrix},\ B_1=\begin{Vmatrix}0 & b_{44}\partial+\partial(b_{12})\\ \partial(b_{44})+b_{12}\partial & 0\end{Vmatrix},$$

$$B_2=\begin{Vmatrix}b_{44} & 0\\ 0 & b_{22}\end{Vmatrix},\ C_0=\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & b_{44}\partial\end{Vmatrix},\ C_1=\begin{Vmatrix}0 & 0\\ b_{44} & 0\end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{f}_0=(a_{30};c_{30})^T,\ \partial=\frac{d}{d\rho}.$$

Спектральная задача (14) описывает потенциальное решение неоднородной по толщине трансверсально-изотропной плиты. В отличие от изотропного случая, для неоднородной по толщине трансверсально-изотропной плиты β_{0k} могут принимать и чисто мнимые значения [5].

При помощи замены [5]:

$$\begin{cases}a_{30}=-\beta_0^{-3}\left(e_0\psi''\right)'+\beta_0^{-1}b_{44}^{-1}\psi'+\beta_0^{-1}\left(e_1\psi\right)',\\ c_{30}=\beta_0^{-2}e_0\psi''-e_1\psi,\end{cases}$$

$$e_0=b_{11}\chi,\ e_1=b_{12}\chi,\ \ e_{22}=b_{22}\chi,\ \ \chi=\left(b_{12}^2-b_{11}b_{22}\right)^{-1}$$

спектральная задача (14) сводится к следующей:

$$\begin{cases}\left(e_0\psi''(\rho)\right)''-\\ -\beta_0^2\left[\left(e_1\psi(\rho)\right)''+e_1\psi''(\rho)+\left(b_{44}^{-1}\psi'(\rho)\right)'\right]+\beta_0^4e_2\psi(\rho)=0,\\ \left[\beta_0^{-2}\left(e_0\psi''(\rho)\right)'-b_{44}^{-1}\psi'(\rho)-\left(e_1\psi(\rho)\right)'\right]\Big|_{\rho=\pm1}=0,\\ \psi'(\rho)\big|_{\rho=\pm1}=0.\end{cases} \qquad (15)$$

Выражение (15) является обобщением спектральной задачи П.Ф. Папковича [5—8] на неоднородный трансверсально-изотропный случай.

На следующем этапе получаем краевую задачу для определения $\mathbf{f}_1=(a_{31};c_{31})^T$ и β_1:

$$\begin{cases} \left(B_0+\beta_0 B_1+\beta_0^2 B_2\right)\mathbf{f}_1=\left(\rho\left(B_0+\beta_0 B_1+\beta_0^2 B_2\right)-\right. \\ \left.-2\beta_0\beta_1 B_2+A_0+\beta_0 A_1+\beta_1 A_2\right)\mathbf{f}_0, \\ \left(C_0+\beta_0 C_1\right)\mathbf{f}_1\big|_{\rho=\pm 1}=\left(C_2+\rho\beta_0 C_1\right)\mathbf{f}_0\big|_{\rho=\pm 1}, \end{cases} \tag{16}$$

$$A_0=\begin{Vmatrix} -2\partial\left(b_{12}\right)+\left(2b_{12}-b_{11}\right)\partial & 0 \\ 0 & \partial\left(b_{44}\right)-2b_{44}\partial \end{Vmatrix};$$

$$A_1=\begin{Vmatrix} 0 & \left(b_{44}+b_{23}+b_{22}-b_{12}\right) \\ -\left(b_{22}+b_{23}+2b_{44}\right) & 0 \end{Vmatrix};$$

$$A_2=\begin{Vmatrix} 0 & -2\left(\partial\left(b_{12}\right)+b_{44}\partial\right) \\ 0 & 0 \end{Vmatrix};\ C_2=\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_{44}+\rho b_{44}\partial \end{Vmatrix}.$$

Задача (16) разрешима при условии, что правая часть ортогональна решению сопряженной задачи

$$T^*\left(\beta_0\right)\mathbf{f}_0^*=T\left(-\bar{\beta}_0\right)\mathbf{f}_0^*=\mathbf{0}, \tag{17}$$

где $\mathbf{f}_0^*=\left(a_{30}^*;c_{30}^*\right)^T$.

Из (16), (17) для β_1 имеем:

$$\beta_1=E_2/\,E_1,$$

$$E_1=\int_{-1}^{1}\left\{\bar{a}_{30}^*\left[\partial\left(b_{12}c_{30}\right)+b_{44}\partial c_{30}\right]+\beta_0\left(b_{44}a_{10}\bar{a}_{10}^*+b_{22}c_{10}\bar{c}_{10}^*\right)\right\}d\rho;$$

$$E_2=\int_{-1}^{1}\left\{\beta_0\left[\bar{a}_{30}^*\left(\partial\left(\rho b_{12}c_{30}\right)+\rho b_{44}\partial c_{30}\right)-\rho b_{44}a_{30}\partial\bar{c}_{30}^*-a_{30}\partial\left(\rho b_{12}\bar{c}_{30}^*\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\left(b_{44}+b_{23}+b_{22}-2b_{12}\right)c_{30}\bar{a}_{30}^*-\left(b_{22}+b_{23}+3b_{44}\right)a_{30}\bar{c}_{30}^*\right]+$$

$$+\beta_0^2\rho\left(b_{44}a_{30}\bar{a}_{30}^*+b_{22}c_{30}\bar{c}_{30}^*\right)+\bar{c}_{30}^*\partial\left(b_{44}c_{30}\right)+\bar{a}_{30}^*\partial\left(\rho b_{11}\partial a_{30}\right)+$$

$$+\bar{c}_{30}^*\partial\left(\rho b_{44}\partial c_{30}\right)-3b_{44}\bar{c}_{30}^*\partial c_{30}-2\left(b_{11}-b_{12}\right)\bar{a}_{30}^*\partial a_{30}+$$

$$\left.+2b_{12}a_{30}\partial\bar{a}_{30}^*\right\}d\rho.$$

Перемещения и напряжения, соответствующие третьему итерационному процессу, имеют вид:

$$u_\rho\left(\rho;\theta\right)=\sum_{k=1}^{\infty}D_k\left[-\beta_{0k}^{-3}\left(e_0\psi_k''\right)'+\beta_{0k}^{-1}b_{44}^{-1}\psi_k'+\right.$$

$$\left.+\beta_{0k}^{-1}\left(e_1\psi_k\right)'+O\left(\varepsilon\right)\right]m_k\left(\theta\right), \tag{18}$$

$$u_\theta\left(\rho;\theta\right)=\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}D_k\left[\beta_{0k}^{-3}e_0\psi_k''-\beta_{0k}^{-1}e_1\psi_k+O\left(\varepsilon\right)\right]m_k'\left(\theta\right),$$

$$\sigma_{\rho\rho}=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}D_k\left[-\beta_{0k}\psi_k+O\left(\varepsilon\right)\right]m_k\left(\theta\right),$$

$$\sigma_{\rho\theta}=\sum_{k=1}^{\infty}D_k\left[\beta_{0k}^{-1}\psi_k'+O\left(\varepsilon\right)\right]m_k'\left(\theta\right),$$

$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}D_k\left[-\beta_{0k}^{-1}\psi_k''+O\left(\varepsilon\right)\right]m_k\left(\theta\right), \tag{19}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}D_k\left[\beta_{0k}^{-1}\chi\left(b_{11}b_{23}-b_{12}^2\right)\psi_k''+\right.$$

$$\left.+\beta_{0k}\chi b_{12}\left(b_{22}-b_{23}\right)\psi_k+O\left(\varepsilon\right)\right]m_k\left(\theta\right).$$

Для третьего итерационного процесса главный член асимптотического решения уравнения (11) имеет вид:

$$m_k\left(\theta\right)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\sin\theta}}\beta_{0k}^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\varepsilon^{-1}\sqrt{\ _{0k}^{2}}\left(\theta-\theta_1\right)\right]\left(1+O\left(\varepsilon\right)\right) \\ \text{в окрестности}\quad \theta=\theta_1; \\ \dfrac{1}{\sqrt{\sin\theta}}\beta_{0k}^{-\frac{1}{2}}\exp\left[\varepsilon^{-1}\sqrt{\beta_{0k}^2}\left(\theta-\theta_2\right)\right]\left(1+O\left(\varepsilon\right)\right) \\ \text{в окрестности}\quad \theta=\theta_2; \end{cases}$$

Решение (18), соответствующее третьему асимптотическому процессу, имеет характер пограничного слоя и первые члены (18) эквивалентны краевому эффекту Сен-Венана неоднородной трансверсально-изотропной плиты. Для мнимых β_{0k} погранслой Сен-Венана затухает весьма слабо, и решения (18) следует причислить к проникающим решениям.

4. Предполагаем, что на торцах сферы заданы следующие граничные условия:

$$\sigma_{\theta\theta}\big|_{=\theta_j}=f_{1j}\left(\rho\right),\quad \sigma_{\rho\theta}\big|_{\theta=\theta_j}=f_{2j}\left(\rho\right), \tag{20}$$

где $f_{1j}(\rho), f_{2j}(\rho)$ $(j = 1, 2)$ — достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям равновесия.

Для определения констант D_k воспользуемся вариационным принципом Лагранжа [1]. Поскольку однородные решения удовлетворяют уравнению равновесия и граничным условиям на боковой поверхности, вариационный принцип принимает следующую форму:

$$\sum_{j=1}^{2}\int_{-1}^{1}\left[\left(\sigma_{\theta\theta}-f_{1j}\right)\delta u\ +\left(\sigma_{\rho\theta}-f_{2j}\right)\delta u_\rho\right]\Big|_{\theta=\theta_j}\times e^{2\varepsilon\rho}d\rho=0. \tag{21}$$

Перемещения представим в виде:

$$\begin{aligned} u_\rho\left(\rho;\theta\right)&=\sum_{k=1}^{\infty}D_k a_k\left(\rho\right)m_k\left(\theta\right); \\ u_\theta\left(\rho;\theta\right)&=\sum_{k=1}^{\infty}D_k c_k\left(\rho\right)m_k'\left(\theta\right). \end{aligned} \tag{22}$$

Для напряжений имеем:

$$\sigma_{\theta\theta}=\sum_{k=1}^{\infty}D_k\left[\sigma_{1k}^{(1)}\left(\rho\right)m_k\left(\theta\right)+\sigma_{1k}^{(2)}\left(\rho\right)m_k'\left(\theta\right)ctg\theta\right]; \tag{23}$$

$$\sigma_{\rho\theta}=\sum_{k=1}^{\infty}D_k\sigma_{2k}\left(\rho\right)m_k'\left(\theta\right),$$

где

$$\sigma_{1k}^{(1)}\left(\rho\right)=\frac{e^{-\varepsilon\rho}}{\varepsilon}\left[b_{12}a_k'\left(\rho\right)+\varepsilon\left(b_{22}+b_{23}\right)a_k\left(\rho\right)-\right.$$

$$\left.-\varepsilon b_{22}\left(z_k^2-\frac{1}{4}\right)c_k\left(\rho\right)\right];$$

$$\sigma_{1k}^{(2)}\left(\rho\right)=e^{-\varepsilon\rho}\left(b_{23}-b_{22}\right)c_k\left(\rho\right);$$

$$\sigma_{2k}\left(\rho\right)=\frac{e^{-\varepsilon\rho}}{\varepsilon}b_{44}\left[c_k'\left(\rho\right)+\varepsilon\left(a_k\left(\rho\right)-c_k\left(\rho\right)\right)\right].$$

Подставляя (22), (23) в (21) и считая δD_k независимыми вариациями, из (21) получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_{jk} D_k = y_{0j}, \quad \left(j=\overline{1,\infty}\right); \tag{24}$$

$$F_{jk} = \int_{-1}^{1} \sigma_{1k}^{(1)}(\rho) c_j(\rho) e^{2\varepsilon\rho} d\rho \cdot \sum_{s=1}^{2} m_k(\theta_s) m_j'(\theta_s) +$$
$$+\int_{-1}^{1} \sigma_{1k}^{(2)}(\rho) \cdot c_j(\rho) \cdot e^{2\varepsilon\rho} d\rho \cdot \sum_{s=1}^{2} m_k'(\theta_s) m_j'(\theta_s) ctg\theta_s +$$
$$+\int_{-1}^{1} \sigma_{2k}(\rho) \cdot a_j(\rho) \cdot e^{2\varepsilon\rho} d\rho \cdot \sum_{s=1}^{2} m_k'(\theta_s) m_j(\theta_s);$$

$$y_{0j} = \sum_{s=1}^{2} \left[m_j'(\theta_s) \int_{-1}^{1} f_{1s}(\rho) c_j(\rho) e^{2\varepsilon\rho} d\rho + \right.$$
$$\left. + m_j(\theta_s) \int_{-1}^{1} f_{2s}(\rho) a_j(\rho) e^{2\varepsilon\rho} d\rho \right].$$

В [9] была доказана разрешимость и сходимость метода редукции для системы (24).

Используя малость параметра ε, можно построить асимптотическое решение системы (24). Для этого, используя асимптотические формулы (18), (19) для u_ρ, u_θ, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{\rho\theta}$, неизвестные D_k будем отыскивать в виде:

$$D_k = D_{k0} + \varepsilon D_{k1} + \ldots .$$

На основе вариационного принципа получим следующую систему уравнений относительно D_{k0}:

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_{kj} D_{k0} = \tau_j; \quad \left(j=\overline{1;\infty}\right); \tag{25}$$

$$M_{kj} = \frac{1}{\sqrt{\beta_{0j}\beta_{0k}^3}} \int_{-1}^{1} \left[-e_1\psi_k\psi_j'' + b_{44}^{-1}\psi_j'\psi_k' + \beta_{0j}^2 e_2\psi_k\psi_j \right] d\rho +$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\beta_{0k}\beta_{0j}^3}} \int_{-1}^{1} \left[e_1\psi_k\psi_j'' - \beta_{0j}^2 e_2\psi_k\psi_j \right] d\rho;$$

$$\tau_j = \frac{r_0 \sin\theta_1 \sin\theta_2}{(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)\sqrt{\beta_{0j}}} \left\{ -\frac{1}{\sqrt{\sin\theta_1}} \int_{-1}^{1} f_{11}(\rho) \left[\beta_{0j}^{-2} e_0 \psi_j'' - e_1\psi_j \right] d\rho + \right.$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\sin\theta_2}} \int_{-1}^{1} f_{12}(\rho) \left[\beta_{0j}^{-2} e_0 \psi_j'' - e_1\psi_j \right] d\rho +$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\sin\theta_1}} \int_{-1}^{1} f_{21}(\rho) \left[-\beta_{0j}^{-3} \left(e_0\psi_j''\right)' + \right.$$
$$\left. + \beta_{0j}^{-1} b_{44}^{-1} \psi_j' + \beta_{0j}^{-1} \left(e_1\psi_j\right)' \right] d\rho + \frac{1}{\sqrt{\sin\theta_2}} \int_{-1}^{1} f_{22}(\rho) \left[-\beta_{0j}^{-3} \left(e_0\psi_j''\right)' + \right.$$
$$\left. \left. + \beta_{0j}^{-1} b_{44}^{-1} \psi_j' + \beta_{0j}^{-1} \left(e_1\psi_j\right)' \right] d\rho \right\}.$$

Определение D_{kj} ($j = 1, 2, \ldots$) неизменно сводится к обращению одних и тех же матриц, которые совпадают с матрицами системы (25).

Список литературы

1. Лурье, А.И. Теория упругости / А.И. Лурье. — М.: Наука, 1970. — 939 с.
2. Лехницкий, С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. — М., Наука, 1977. — 415 с.
3. Бейтмен, Г. Высшие трасцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — М.: Наука, 1965. — Т. 1. — 394 с.
4. Гольденвейзер, А.Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости / А.Л. Гольденвейзер // Прикладная математика и механика. — 1963. — Т. 27, Вып. 4. — С. 593–608.
5. Ахмедов, Н.К. Асимптотический анализ трехмерной задачи теории упругости для радиально-неоднородного трансверсально-изотропного полого цилиндра / Н.К. Ахмедов, С.Б. Акперова // Изв. РАН, Сер. Механика твердого тела. — 2011. — № 4. — С. 170–180.
6. Устинов, Ю.А. Математическая теория поперечно-неоднородных плит / Ю.А. Устинов. — Ростов-на Дону: Изд-во ОООЦВВР, 2006. — 257 с.
7. Ахмедов, Н.К. Анализ трехмерной задачи теории упругости для неоднородного усеченного полого конуса / Н.К. Ахмедов, М.Ф. Мехтиев // Прикладная математика и механика. — 1993. — Т. 57, Вып. 5. — С. 113–119.
8. Ахмедов, Н.К. Осесимметричная задача теории упругости для неоднородной плиты переменной толщины / Н.К. Ахмедов, М.Ф. Мехтиев // Прикладная математика и механика. — 1995. — Т. 59, Вып. 3. — С. 518–523.
9. Устинов, Ю.А. О полноте системы элементарных решений бигармонического уравнения в полуполосе / Ю.А. Устинов, В.И. Юдович // Прикладная математика и механика. — 1973. — Т. 37, Вып. 4. — С. 706–714.

Mammedova T.B.

Axis-symmetric problem of elasticity theory for radial-nonhomogeneous transversal-isotropic sphere of small thickness with mixed boundary conditions on the side surface

The 3-dimensional strained-deformed state of radial-nonhomogeneous transversal-isotropic spheric shell is investigated by the method of asymptotic integration of elasticity theory equations. There built nonhomogeneous and homogeneous solutions. There are obtained asymptotic decompositions of homogeneous solutions and there is done the analysis of strained-deformed states, the corresponding homogeneous solutions.

Keywords: *nonhomogeneous solutions, homogeneous solutions, boundary layer, boundary effect*

Поступила в редакцию 12.02.2012.