



# МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.375

А.Б. МУСТАФАЕВ, канд. физ.-мат. наук  
Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку

## ЗАКРЫТИЕ ИСКРИВЛЕННОЙ ТРЕЩИНЫ В ЛИСТОВОМ ЭЛЕМЕНТЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЛОКАЛЬНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

*Рассмотрены локальные изменения температуры вблизи конца криволинейной трещины. Задача о равновесии криволинейной трещины с частично контактирующими берегами при действии внешних растягивающих нагрузок, наведенного термоупругого поля напряжений и усилий на контактирующих поверхностях трещины в каждом приближении сводится к системе сингулярных интегральных уравнений. Найдены нормальные и касательные контактные напряжения, значения размеров концевой контактной зоны, где берега трещины смыкаются.*

**Ключевые слова:** искривленная трещина, листовый элемент, локальное температурное поле, контактная зона, контактные напряжения

Как известно [1, 2], одним из эффективных средств торможения развития трещин могут быть температурные и термоупругие поля. В механике разрушения важное значение имеет проблема о «залечивании» существующей в конструкции трещины. Первым этапом в решении этой проблемы является задача о закрытии вскрытой трещины.

Как видно из результатов [3], воздействие теплового источника уменьшает деформацию растягиваемой плоскости в направлении, перпендикулярном трещине, и в связи с этим снижается коэффициент интенсивности напряжений в окрестности конца трещины. При некотором соотношении физических и геометрических параметров листового элемента и теплового источника будут появляться зоны сжимающих напряжений, в которых берега трещины на некотором участке войдут в контакт. Это приведет к появлению контактных напряжений на данном участке берегов трещины.

Рассмотрим неограниченную упругую плоскость, ослабленную одной трещиной в начале координат. В реальных материалах из-за структурных и технологических факторов поверхности трещины имеют неровности и искривления. Рассмотрим задачу механики разрушения о трещине в плоскости, полагая, что контур трещины имеет неровности (малые отклонения от прямолинейной формы). Уравнение контура трещины принимается в виде  $y = f(x)$ . Берега трещины свободны от внешних нагрузок. Для торможения роста трещины на пути ее распространения с помощью нагрева тепловым

источником области  $S$  до температуры  $T_0$  создается зона сжимаемых напряжений. Приняты следующие допущения: все термоупругие характеристики материала плоскости не зависят от температуры; материал плоскости представляет собой однородное и изотропное тело.

Считается, что в момент  $t = 0$  произвольная область  $S$  на пути роста трещины в плоскости мгновенно нагревается до постоянной температуры  $T = T_0$ . Остальная часть плоскости в начальный момент имеет температуру  $T = 0$ .

Для многих металлических материалов (сталей, алюминиевых сплавов и др.) в диапазоне изменения температуры до 300–400 °С зависимость термоупругих характеристик слабо меняется с температурой. Это экспериментально установленный факт [4, 5]. Следовательно, для всех конструкционных материалов существует такой диапазон температур, в котором допущение о постоянстве термоупругих характеристик материала является корректным, он устанавливается на основании зависимости модуля упругости от температуры. Опыты [1] показывают, что при нагреве трассы пути трещины до 70–100 °С наблюдается замедление и торможение трещины. Можно привести другие публикации [6, 7], где дается положительный ответ о наблюдаемом эффекте закрытия трещины. В работе [7] исследовано поведение напряжений вблизи концов трещины и определены коэффициенты интенсивности напряжений. Показано, что при некоторых значениях параметров задачи, ко-

эффиценты интенсивности напряжений оказываются отрицательными. Это означает, что берега трещины входят в контакт. Наличие отрицательных коэффициентов интенсивности напряжений, по крайней мере вблизи края трещины, приводит к необходимости учета частичного контакта берегов в некоторой окрестности конца трещины.

В упомянутых выше работах не было исследовано взаимодействие берегов трещин. В настоящей статье исследовано влияние неровности поверхности трещины и взаимодействие берегов трещин на торможение роста трещины локальными температурными полями. Область практического применения результатов заключается в возможности предотвратить развитие трещины и разрушение конструкций и избежать катастроф, связанных с внезапным разрушением.

В случае, когда характерный линейный размер области  $S$  считается малым по сравнению с длиной трещины или с каким-либо другим характерным линейным размером  $L$  плоскости в плане, возможно эффективное асимптотическое решение этой задачи, основанное на представлении о тонкой структуре конца трещины. Задачу о тонкой структуре конца трещины (т. е. о распределении напряжений и деформаций на расстояниях  $r$  от конца трещины, удовлетворяющих условию  $L \gg r \gg \rho$ , здесь  $\rho$  — радиус кривизны конца трещины) можно ставить [8] следующим образом.

Рассмотрим окрестность конца искривленной трещины (рисунок 1), которая мала по сравнению с характерным линейным размером в плане пластины, но больше по сравнению с характерным линейным размером области  $S$ . Тогда трещина на плоскости  $Oxy$  представится полубесконечным сквозным криволинейным разрезом вдоль  $y = f(x)$ ,  $-\infty < x < 0$ . При этом в части разреза длиной  $d$  (концевая зона, примыкающая к ее вершине) берега трещины будут взаимодействовать (войдут в контакт). Это способствует появлению контактных

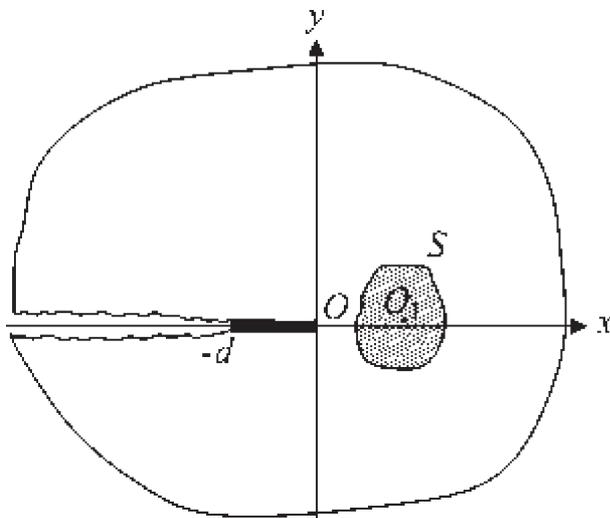


Рисунок 1 — Расчетная схема задачи

напряжений на данном участке. Вне этого участка берега трещины будут свободны от нагрузок. Область  $S$  может иметь любые (но конечные) размеры и конфигурацию. На бесконечности реализуется напряженное поле, характерное для тонкой структуры конца трещины. Это поле считается заданным и имеет следующий вид при  $z \rightarrow \infty$

$$\Phi(z) = \frac{K_I - iK_{II}}{2\sqrt{2\pi z}}; \quad \Omega(z) = \frac{(K_I - iK_{II})}{2\sqrt{2\pi z}},$$

где  $z = x + iy = re^{i\theta}$ ;  $r, \theta$  — полярные координаты;  $i = \sqrt{-1}$ ;  $\Phi(z)$  и  $\Omega(z)$  — комплексные потенциалы [9].

В рассматриваемой задаче параметрами нагружения являются коэффициенты интенсивности напряжений  $K_I, K_{II}$ , представляющие собой некоторые функции формы тела и граничных условий. Они определяются из решения задачи «в целом» при отсутствии теплового воздействия.

Поставленная задача состоит в определении контактных напряжений на участке  $-d \leq x \leq 0$ , размера контактной зоны, а также напряженно-деформированного состояния вне трещины при воздействии наведенного тепловым источником поля напряжений. Концевая область, примыкающая к вершине трещины, мала по сравнению с остальной частью плоскости. Принято, что при налегании берегов трещины предельное равновесие не достигнуто, и проскальзывание берегов трещины отсутствует. При действии силовой и тепловой нагрузок на плоскость на некотором участке берега трещины взаимодействуют между собой, что приводит к появлению нормальных  $p_y(x)$  и касательных  $p_{xy}(x)$  напряжений. Величины этих напряжений заранее неизвестны и подлежат определению.

Граничные условия рассматриваемой задачи имеют вид

$$\sigma_n - i\tau_{nt} = 0 \quad \text{при } y = f(x), \quad -\infty < x < -d;$$

$$\sigma_n - i\tau_{nt} = p_y - ip_{xy} \quad \text{при } y = f(x), \quad -d \leq x \leq 0.$$

Напряженное состояние в плоскости с трещиной представим в виде

$$\sigma_x = \sigma_{x_0} + \sigma_{x_1}; \quad \sigma_y = \sigma_{y_0} + \sigma_{y_1}; \quad \tau_{xy} = \tau_{xy_0} + \tau_{xy_1},$$

где  $\sigma_{x_0}, \sigma_{y_0}, \tau_{xy_0}$  — решение задачи термоупругости для плоскости без трещины.

Для нахождения напряжений  $\sigma_{x_0}, \sigma_{y_0}, \tau_{xy_0}$  решаем задачу термоупругости для сплошной плоскости. В начале определяем распределение температуры в плоскости. Для этого решаем граничную задачу теории теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\Delta T; \quad T = \begin{cases} T_0 & (x, y \in S) \\ 0 & (x, y \notin S) \end{cases} \quad \text{при } t = 0,$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа;  $a$  — коэффициент температуропроводности материала плоскости.

Решение уравнения теории теплопроводности для сплошной плоскости имеет вид [10]

$$T(x, y, t) = \frac{T_0}{4\pi at} \iint_S \exp\left(-\frac{R^2}{4at}\right) d\xi d\eta,$$

где

$$R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2.$$

Для термоупругого потенциала перемещений имеем

$$F(x, y, t) = \frac{(1 + \nu)\alpha T_0}{4\pi} \left\{ \int_0^t \frac{1}{\tau} \left[ \iint_S \exp\left(-\frac{R^2}{4a\tau}\right) d\xi d\eta \right] d\tau - 2 \iint_S \ln\left(\frac{1}{R}\right) d\xi d\eta \right\}.$$

Напряжения  $\sigma_{x_0}$ ,  $\sigma_{y_0}$ ,  $\tau_{xy_0}$  выражаем через термоупругий потенциал перемещений в виде [10]

$$\sigma_{x_0} = -2\mu \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right); \quad \sigma_{y_0} = -2\mu \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right); \quad \tau_{xy_0} = 2\mu \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right),$$

где  $\mu$  — модуль сдвига материала плоскости;  $\alpha$  — коэффициент линейного температурного расширения материала;  $\nu$  — коэффициент Пуассона материала плоскости.

Рассмотрим некоторую произвольную реализацию неровной (с малыми отклонениями от прямолинейной формы) поверхности берегов трещины. Так как функции  $f(x)$  и  $f'(x)$  являются малыми величинами, функцию  $f(x)$  можно представить в виде  $f(x) = \varepsilon H(x)$ ,  $-\infty < x < 0$ , где  $\varepsilon$  — малый параметр.

Напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $p_y$ ,  $p_{xy}$  ищем в виде разложений по малому параметру

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^{(0)} + \varepsilon \sigma_x^{(1)} + \dots; & \sigma_y &= \sigma_y^{(0)} + \varepsilon \sigma_y^{(1)} + \dots; \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}^{(0)} + \varepsilon \tau_{xy}^{(1)} + \dots; & p_y &= p_y^{(0)} + \varepsilon p_y^{(1)} + \dots; \\ p_{xy} &= p_{xy}^{(0)} + \varepsilon p_{xy}^{(1)} + \dots \end{aligned}$$

Значения напряжений при  $y = f(x)$  найдем, разлагая в ряд выражения для напряжений в окрестности  $y = 0$ .

Используя метод возмущений с учетом предыдущих формул, находим граничные условия при  $y = 0$ ,  $-\infty < x < 0$ :

- в нулевом приближении

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(0)} &= -\sigma_{y_0}; & \tau_{xy}^{(0)} &= -\tau_{xy_0} & \text{при } y=0, & -\infty < x < -d_0; \\ \sigma_y^{(0)} &= p_y^{(0)} - \sigma_{y_0}; & \tau_{xy}^{(0)} &= p_{xy}^{(0)} - \tau_{xy_0} & \text{при } y=0, & -d_0 \leq x \leq 0; \end{aligned} \quad (1)$$

- в первом приближении

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(1)} &= N; & \tau_{xy}^{(1)} &= T & \text{при } y=0, & -\infty < x < -d_1; \\ \sigma_y^{(1)} &= p_y^{(1)} + N; & \tau_{xy}^{(1)} &= p_{xy}^{(1)} + T & \text{при } y=0, & -d_1 \leq x \leq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} N &= 2\tau_{xy}^{(0)} \frac{dH}{dx} - H \frac{\partial \sigma_y^{(0)}}{\partial y}; \\ T &= (\sigma_x^{(0)} - \sigma_y^{(0)}) \frac{dH}{dx} - H \frac{\partial \tau_{xy}^{(0)}}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для решения краевых задач в каждом приближении используем комплексные потенциалы Колосова-Мусхелишвили.

Решение граничной задачи (1) запишется в виде

$$\Phi_0(z) = \Omega_0(z) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{z}} \int_{-\infty}^0 \frac{\sqrt{t} f_0(t) dt}{t-z} + \frac{K_I - iK_{II}}{2\sqrt{2\pi z}},$$

где

$$f_0(x) = \begin{cases} f_1(x) - if_2(x), & \text{на свободных берегах трещины;} \\ f_1(x) - if_2(x) + p_y^{(0)} - ip_{xy}^{(0)}, & \text{на берегах контактной зоны трещины;} \end{cases}$$

$$f_1(x) = -\sigma_{y_0}(x, 0); \quad f_2(x) = -\tau_{xy_0}(x, 0).$$

Для окончательного определения потенциалов  $\Phi_0(z)$  и  $\Omega_0(z)$  необходимо еще найти контактные напряжения  $p_y^{(0)}$  и  $p_{xy}^{(0)}$  на участке контакта между кромками трещины в нулевом приближении.

На участке контакта между берегами трещины раскрытие трещины должно быть равно нулю, т. е.

$$(u^+ - u^-) + i(v^+ - v^-) = 0. \quad (4)$$

Это комплексное уравнение служит для определения контактных напряжений  $p_y(x)$  и  $p_{xy}(x)$ .

Для определения перемещений в нулевом приближении имеем соотношение [8]:

$$2\mu(u_0 + iv_0) = k_0 \Phi_0(z) - \omega_0(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi_0(z)}. \quad (5)$$

Здесь  $k_0 = 3 - 4\nu$  для плоской деформации,  $k_0 = (3 - \nu) / (1 + \nu)$  для плоского напряженного состояния.

Для функций  $\Phi_0(z)$  и  $\omega_0(z)$  после интегрирования находим

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 f(t) \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{z}}{\sqrt{t} - \sqrt{z}} dt + \frac{K_I - iK_{II}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{z}; \\ \omega_0(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 f(t) \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{z}}{\sqrt{t} - \sqrt{z}} dt + \frac{K_I - iK_{II}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{z}. \end{aligned} \quad (6)$$

На основании соотношений (5), (6) имеем

$$\begin{aligned} (u_0^+ - u_0^-) + i(v_0^+ - v_0^-) &= \\ = \frac{1 + k_0}{2\mu} \left[ -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^0 f(t) \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt + \frac{2(K_I - iK_{II})}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{x} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Используя уравнение (7), получим комплексное интегральное уравнение относительно неизвестных функций  $p_y^{(0)}(x)$  и  $p_{xy}^{(0)}(x)$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^0 (f_1 - if_2) \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt - \frac{1}{\pi i} \int_{-d_0}^0 (p_y^{(0)} - ip_{xy}^{(0)}) \times \\ \times \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt + \frac{2(K_I - iK_{II})}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{x} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$(-d_0 \leq x \leq 0).$$

Отделяя в (8) действительные и мнимые части, получим два действительных интегральных уравнения относительно неизвестных функций  $p_y^{(0)}(x)$  и  $p_{xy}^{(0)}(x)$ , соответственно:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 f_1 \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-d_0}^0 p_y^{(0)} \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt - \frac{2K_I}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{-x} = 0$$

$$(-d_0 \leq x \leq 0). \quad (9)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 f_2 \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-d_0}^0 p_{xy}^{(0)} \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt - \frac{2K_{II}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{-x} = 0. \quad (10)$$

Для замкнутости каждого интегрального уравнения не хватает одного уравнения, определяющего размер концевой зоны в нулевом приближении. Условием, служащим для определения размера контактной зоны (т. е. величины  $d$ ), является условие конечности напряжений в окрестности вершины трещины. Записывая условие конечности напряжений в нулевом приближении, получаем еще одно недостающее уравнение для каждого сингулярного интегрального уравнения соответственно в следующем виде

$$-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi i}} \int_{-\infty}^0 \frac{f_1(x) dx}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi i}} \int_{-d_0}^0 \frac{p_y^{(0)}(x) dx}{\sqrt{x}} + K_I = 0. \quad (11)$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi i}} \int_{-\infty}^0 \frac{f_2(x) dx}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi i}} \int_{-d_0}^0 \frac{p_{xy}^{(0)}(x) dx}{\sqrt{x}} + K_{II} = 0. \quad (12)$$

Поставленная задача, как и следовало ожидать, распалась на две независимые задачи: для трещины нормального разрыва уравнения (9), (11) и для трещины поперечного сдвига уравнения (10), (12). Полученные сингулярные интегральные уравнения (9) и (10) с дополнительными условиями, соответственно (11) и (12), целесообразно решать численно прямыми методами [11, 12].

Сначала сделаем преобразования и замену переменных в интегральных уравнениях (9), (10) и дополнительных условиях. В результате этого получим сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши в стандартном виде. Затем, используя процедуру алгебраизации [11, 12] сингулярного интегрального уравнения, вместо каждого интегрального уравнения и одного дополнительного условия получим систему  $M+1$  алгебраических уравнений относительно приближенных значений  $p_k^0$  функции  $p_y^0(x_m)$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) в узловых точках контактной зоны  $[-d_0, 0]$  и неизвестного размера  $d_0$  концевой зоны в нулевом приближении.

Каждая полученная система в нулевом приближении из-за неизвестного размера концевой области оказалась нелинейной. Если же размер концевой зоны был бы известен, то полученная алгебраическая система была бы линейной. В связи с этим целесообразно нелинейную алгебраическую систему решать методом последовательных приближений. Решаем полученную систему из первых  $M$  уравнений при некотором определенном значении параметра  $d_*$  относительно  $M$  неизвестных  $p_y^0(x_m)$ . Значения па-

раметра  $d_*$  и найденные величины  $p_y^0(x_m)$  подставляются в неиспользованное  $M+1$  уравнение системы. Взятые значения параметра  $d_*$  и соответствующие им значения  $p_y^0(x_m)$  не будут, вообще говоря, удовлетворять  $M+1$  уравнению системы. Поэтому, подбирая новые значения параметра  $d_*$ , будем многократно повторять вычисления до тех пор, пока  $M+1$  уравнение системы не будет удовлетворяться с заданной точностью. Система  $M$  уравнений в каждом приближении решалась методом Гаусса с выбором главного элемента для разных значений  $M$  порядка до  $M=60$ . Определялись значения параметра  $d_0$ , характеризующего зону контакта берегов трещины в нулевом приближении, а также контактное напряжение  $p_y^{(0)}(x)$  в зависимости от геометрических, теплофизических и механических параметров упругой плоскости и наведенного температурного поля.

Аналогично, по изложенной методике, решалось интегральное уравнение (10) с дополнительным условием (12) для определения контактных касательных напряжений  $p_{xy}^{(0)}(x)$  и размера зоны контакта берегов трещины поперечного сдвига.

После нахождения решения в нулевом приближении переходим к отысканию решения в первом приближении. Находим функции  $N$  и  $T$  по формулам (3).

Решение граничной задачи (2) запишется в виде

$$\Phi_1(z) = \Omega_1(z) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{z}} \int_{-\infty}^0 \frac{\sqrt{t} f_1(t) dt}{t-z}, \quad (13)$$

где

$$f_1(x) = \begin{cases} N - T, & \text{на свободных берегах трещины;} \\ N - T + p_y^{(1)} - ip_{xy}^{(1)}, & \text{на берегах контактной} \\ & \text{зоны трещины.} \end{cases}$$

Для окончательного определения потенциалов  $\Phi_1(z)$  и  $\Omega_1(z)$  необходимо найти контактные напряжения  $p_y^{(1)}(x)$  и  $p_{xy}^{(1)}(x)$  на участке контакта между кромками трещины в первом приближении.

Поступая аналогично нулевому приближению, получим комплексное интегральное уравнение относительно неизвестных функций  $p_y^{(1)}(x)$  и  $p_{xy}^{(1)}(x)$

$$-\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^0 (N - iT) \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt - \frac{1}{\pi i} \times$$

$$\times \int_{-d_1}^0 (p_y^{(1)} - ip_{xy}^{(1)}) \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt = 0 \quad (-d_1 \leq x \leq 0). \quad (14)$$

Отделяя в (14) действительные и мнимые части, получим, как и в нулевом приближении, два действительных интегральных уравнения относительно неизвестных функций  $p_y^{(1)}(x)$  и  $p_{xy}^{(1)}(x)$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-d_1}^0 p_y^{(1)} \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 N(t) \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt = 0$$

$$(-d_1 \leq x \leq 0); \quad (15)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-d_1}^0 p_{xy}^{(1)} \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 T(t) \ln \frac{\sqrt{t} + \sqrt{x}}{\sqrt{t} - \sqrt{x}} dt = 0. \quad (16)$$

Для замкнутости каждого интегрального уравнения не хватает одного уравнения, определяющего размер контактной концевой зоны в первом приближении. Записывая условие конечности напряжений в первом приближении, получаем

$$\frac{\sqrt{2}}{i\sqrt{\pi}} \int_{-d_1}^0 \frac{p_y^{(1)}(x) dx}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{2}}{i\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{N(x) dx}{\sqrt{x}} = 0; \quad (17)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{i\sqrt{\pi}} \int_{-d_1}^0 \frac{p_{xy}^{(1)}(x) dx}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{2}}{i\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{T(x) dx}{\sqrt{x}} = 0. \quad (18)$$

Дальнейший ход численного решения уравнений (15), (17) и (16), (18) аналогичен изложенному выше в случае нулевого приближения.

Окончательно находим

$$p_y = p_y^{(0)} + \varepsilon p_y^{(1)}; \quad p_{xy} = p_{xy}^{(0)} + \varepsilon p_{xy}^{(1)}; \quad d = d_0 + \varepsilon d_1.$$

Анализ закрытия трещины в плоскости с помощью наведенного температурного поля сводится в каждом приближении к параметрическому исследованию сингулярных интегральных уравнений при различных законах распределения температурных полей и напряжений в плоскости, геометрических параметров, а также механических постоянных материала. Непосредственно из решения сингулярных интегральных уравнений и дополнительных условий определяются нормальные и касательные усилия в концевой области, а также размер зоны контакта берегов трещины.

Отметим ограничения на применение полученных результатов. Необходимо, чтобы диапазон температур был такой, что упругие свойства материала не зависят от температуры, а также нагретая область  $S$  должна быть мала по сравнению с длиной трещины.

В таблице приводятся значения размеров контактной зоны  $d_*^I = d_I/L$  и  $d_*^{II} = d_{II}/L$  соответственно для трещины нормального разрыва и для трещины поперечного сдвига (где  $\ell_*^I = 2K_I^2/\pi\sigma_0^2 L_0$ ;  $\ell_*^{II} = 2K_{II}^2/\pi\sigma_0^2 L_0$ ) при следующих значениях свободных параметров

$$\nu = 0,3; \quad t_* = 4at/L^2 = 10; \quad R/L_0 = 0,75; \quad b/L_0 = 0,2.$$

Здесь  $L_0$  и  $b$  — координаты центра области  $S$ ;  $R$  — радиус круговой области  $S$ .

В расчетах было принято, что поверхность трещины имеет синусоидальную форму.

Рассмотрим практический пример расчета. В качестве примера был рассмотрен неограниченный

Таблица — Численные значения размеров контактной зоны

$\ell_*^I$	0,5	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
$d_*^I$	0,0912	0,1308	0,2431	0,3107	0,3806	0,4157	0,5119
$\ell_*^{II}$	0,5	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
$d_*^{II}$	0,0903	0,1315	0,2402	0,3104	0,3809	0,4142	0,5103

листовой элемент, ослабленный трещиной длиной  $2\ell$ . На бесконечности листовый элемент подвергнут однородному растяжению вдоль оси  $y$  напряжением  $\sigma_y^\infty = \sigma_0$ . В окрестности правой вершины трещины нагрета область  $S$  до температуры  $T = 100^\circ\text{C}$ . Параметры нагружения в этом случае

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi \ell}, \quad K_{II} = \frac{\sigma_0}{\pi \sqrt{\pi \ell}} \int_{-\ell}^{\ell} \left( \frac{df}{dx} \right) \sqrt{\frac{\ell+x}{\ell-x}} dx.$$

Материал листового элемента — сплав В95:  $E = 7,1 \cdot 10^4$  МПа;  $\nu = 0,3$ ;  $\alpha \cdot 10^6 = 23,2$  1/град;  $a = 0,5$  см<sup>2</sup>/сек.

На рисунке 2 приведены графики распределения нормального контактного напряжения  $p_y/\sigma_0$  вдоль контактной зоны (кривая 1 для  $\ell = 5$  см; кривая 2 для  $\ell = 10$  см). При расчетах были использованы безразмерные координаты  $x'$ , определяющиеся соотношением  $x = \frac{d}{2}(x' - 1)$ .

Наибольшие значения контактных напряжений находятся в средней части концевой зоны, где берега криволинейной трещины смыкаются. Характер изменения касательных напряжений  $p_{xy}(x)$  вдоль контактной зоны подобен изменению нормальных напряжений, однако абсолютные значения касательных напряжений существенно меньше.

В заключение отметим, что учет возмущенного температурного поля будет усиливать тормозящий эффект наведенного температурного поля напряжений. Полученные соотношения позволяют решать обратную задачу, т. е. определить характеристики теплового источника и напряженное состояние плоскости, при которых достигается заданная область контакта берегов трещины.

Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что созданное локальное температурное поле в течение некоторого ограниченного времени с целью торможения и частичного закрытия трещины является непреодолимым барьером [1] на пути ее распространения. Последующее снятие температурного поля ( $t \rightarrow \infty$ ) будет по-

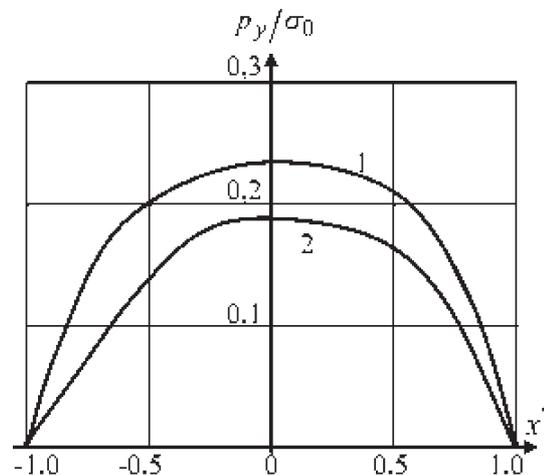


Рисунок 2 — Распределение контактных напряжений вдоль концевой зоны трещины

степенно снижать значения сжимающих напряжений и эффекту частичного закрытия трещины. Коэффициенты интенсивности напряжений, достигнув нулевого значения при закрытии трещины, постепенно будут возрастать до величины, обусловленной механической нагрузкой.

Под действием локального температурного поля одновременно с уменьшением максимального растягивающего напряжения происходит его разворачивание по направлению теплового источника. Это приводит [1, 13] к наблюдаемому в опыте смещению плоскости разрыва. Это обстоятельство после снятия локального температурного поля будет способствовать тому, что для развития трещины понадобится увеличение внешней нагрузки.

**Заключение.** Анализ частичного закрытия искривленной трещины в листовом элементе с помощью введенного температурного поля сводится к параметрическому исследованию сингулярных интегральных уравнений при различных законах распределения температурных полей и напряжений в плоскости, геометрии поверхности параметров трещины, а также механических постоянных материала. На основе полученных результатов можно считать, что созданное локальное температурное поле является непреодолимым барьером на пути движения трещины.

Полученные соотношения позволяют решать обратную задачу, т. е. определить характеристики теплового источника и напряженное состояние листового элемента, при которых достигается на-

перед заданная область контакта берегов искривленной трещины.

#### Список литературы

1. Финкель, В.М. Физические основы торможения разрушения / В.М. Финкель. — М.: Металлургия, 1977. — 360 с.
2. Партон, В.З. Механика упругопластического разрушения / В.З. Партон, Е.М. Морозов. — М.: Наука, 1985. — 504 с.
3. Кадиев, Р.И. Влияние теплового источника на динамику роста трещины / Р.И. Кадиев, В.М. Мирсалимов // Вестн. ДГУ. — 2001. — № 4. — С. 69–73.
4. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / под ред. И.И. Гольденבלата. — М.: Машиностроение, 1965. — 567 с.
5. Тимошенко, С.П. Сопротивление материалов / С.П. Тимошенко. — М.: Наука, 1965. — Т. 2. — 480 с.
6. Бельский, В.Д. Закрытие центральной трещины в круговом диске под действием температурного поля / В.Д. Бельский // Проблемы прочности. — 1984. — № 6. — С. 35–38.
7. Кадиев, Р.И. Коэффициенты интенсивности напряжений для пластины, ослабленной трещиной, при воздействии теплового источника / Р.И. Кадиев // Вестн. ДНЦ РАН. — 2003. — № 14. — С. 15–18.
8. Черепанов, Г.П. Механика хрупкого разрушения / Г.П. Черепанов. — М.: Наука, 1974. — 640 с.
9. Мухелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мухелишвили. — М.: Наука, 1966. — 707 с.
10. Паркус, Г. Неуставившиеся температурные напряжения / Г. Паркус. — М.: Физматгиз, 1963. — 252 с.
11. Каландия, А.И. Математические методы двумерной упругости / А.И. Каландия. — М.: Наука, 1973. — 304 с.
12. Мирсалимов, В.М. Неоднородные упругопластические задачи / В.М. Мирсалимов. — М.: Наука, 1987. — 256 с.
13. Морозов, Е.М. О расчете на прочность по стадии разрушения / Е.М. Морозов // Деформация и разрушение при термических и механических воздействиях. — М.: Атомиздат, 1969. — Вып. 3. — С. 87–90.

Mustafayev A.B.

#### Closing curved crack in the sheet element under action the local temperature field

Local changes of temperature near to the end of a curvilinear crack are considered. The problem about balance of a curvilinear crack with in part contacting beach at action of the external stretching loadings, induced thermoelastic fields of stresses and efforts on contacting surfaces of a crack in each approach, is reduced to system singular the integrated equations. Contact stresses, values of the sizes of end contact zone where beach of a crack are closed are found normal and tangents.

**Keywords:** curved crack, sheet element, local temperature field, contact zone, contact stresses

Поступила в редакцию 28.03.2013.