

УДК 539.3+612.311

С.М. БОСЯКОВ, канд. физ.-мат. наук; А.Ф. МСЕЛАТИ

Белорусский государственный университет, г. Минск

## АНАЛИЗ УСЛОВИЙ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ КОРНЯ ЗУБА В ЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ ПЕРИОДОНТАЛЬНОЙ ОБОЛОЧКЕ

*В настоящей работе определены условия начального поступательного смещения корня зуба в периодонтальной линейно-упругой оболочке. Геометрическая форма зуба описывается уравнением кругового гиперboloида. Наружная поверхность корня зуба жестко закреплена в костной ткани зубной альвеолы. Внутренняя поверхность периодонтальной связки совпадает с наружной поверхностью корня зуба. Соотношения между перемещением и деформацией периодонта сформулированы с учетом несжимаемости тканей периодонтальной связки. Определены координаты центра сопротивления корня зуба, а также угол ориентации сосредоточенной нагрузки для корпусного перемещения зуба. Проведен сравнительный анализ результатов расчета координат центра сопротивления корня зуба на основе аналитической и конечно-элементной моделей.*

**Ключевые слова:** конечно-элементная модель, свойства тканей, периодонт, поля напряжений, костная ткань, биология

**Введение.** В зависимости от направления действующей силы выделяют наклонно-вращательное, корпусное (поступательное), к которому относят вертикальное, и вращательное относительно продольной оси перемещение зубов [1, 2]. Для корпусного перемещения зуба необходимо, чтобы линия действия силы проходила через центр сопротивления корня зуба. На практике этого добиваются одновременным приложением к зубу сосредоточенной нагрузки и пары сил [1]. Ввиду этого, расчет начальных перемещений в случае поступательного движения корня зуба осуществляется с учетом положения центра сопротивления или соотношения момент / сила [3–5]. Варианты действия на зуб негоризонтально ориентированной сосредоточенной нагрузки, которые приводят к начальному корпусному движению корня зуба, не рассматриваются.

Прогнозирование начального и долговременно го смещения зубов, в первую очередь их начальных перемещений, после приложения силы или момента является одной из основных целей ортодонтических исследований [6, 7]. Начальные перемещения зуба возникают при кратковременном действии нагрузки, после снятия которой зуб возвращается на прежнее место [8, 9]. Основываясь на высокой упругости тканей периодонтальной связки (расположенной между корнем зуба и костной тканью зубной альвеолы) по сравнению с костями и зубами, большинство авторов указывают на то, что именно периодонт определяет начальные перемещения зуба [10–13]. На расчет начальной подвижности однокоренных и многокоренных зубов направлены многочисленные конечно-элементные исследования, в частности [13–19]. При математическом моделировании напряженно-деформированного состояния системы «зуб — периодонтальная связка», в большинстве случаев корень зуба аппроксимируется круговым или эллиптическим параболоидом [20, 21]. Как показано в работе [22] на основании сравни-

тельного конечно-элементного анализа, результаты расчета начальных перемещений корня зуба в периодонтальной связке, проведенные для параболоида и реальной формы однокоренного зуба, отличаются незначительно. В то же время, более точно геометрическую форму зуба можно описать с помощью уравнения эллиптического гиперboloида за счет параметра, характеризующего закругление вершины корня зуба [23].

В настоящей работе представлены результаты определения условий приложения сосредоточенной силы к однокоренному зубу, геометрическая форма которого описывается уравнением кругового гиперboloида, соответствующие поступательному перемещению корня в периодонтальной связке.

**Уравнения равновесия корня зуба.** Внешняя поверхность корня зуба и прилегающая к нему внутренняя поверхность периодонтальной связки (считаем, что корень зуба является абсолютно твердым телом) описывается уравнением кругового гиперboloида

$$F(x, y, z) = y - \frac{h}{\sqrt{1+p^2-p}} \left( \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2 + p^2 - p} \right) = 0, \quad (1)$$

где  $h$  — высота корня зуба;  $a$  — радиус сечения корня зуба на уровне альвеолярного гребня;  $p$  — параметр, характеризующий закругление вершины корня зуба.

Внешняя поверхность периодонтальной связки, прилегающая к костной ткани зубной альвеолы, смещена по нормали по отношению к поверхности корня зуба на величину  $\delta$  (толщина периодонтальной связки постоянна). Ее уравнение имеет вид

$$F_1(x, y, z) = y + n_y \delta - \frac{h}{\sqrt{1+p^2-p}} \times \left( \sqrt{\left(\frac{1}{a}(x + n_x \delta)\right)^2 + \left(\frac{1}{a}(z + n_z \delta)\right)^2 + p^2 - p} \right) = 0, \quad (2)$$

где  $n_x, n_y, n_z$  — компоненты единичного вектора нормали к поверхности (1),  $i = \overline{1, 3}$ , которые с учетом уравнения (1) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} n_x &= -\frac{1}{\Delta} \frac{hx}{A}; n_y = \frac{1}{\Delta}; n_z = -\frac{1}{\Delta} \frac{hz}{A}; \\ A &= a(\sqrt{1+p^2} - p)\sqrt{x^2+z^2+(ap)^2}; \\ \Delta &= \sqrt{1 + \frac{h^2(x^2+z^2)}{a^2(\sqrt{1+p^2} - p)((ap)^2 + x^2 + z^2)}}. \end{aligned} \quad (3)$$

При действии на зуб сосредоточенной силы  $\vec{f} = (f_x, f_y, f_z)$ , точки периодонта, прилегающие к поверхности корня (1) зуба, получают перемещения, равные перемещению корня. Внешняя поверхность корня является жестко закрепленной. Отметим, что согласно результатам работы [24] не выявлено существенных различий между результатами расчета моделей, учитывающих костную ткань и жесткую заделку внешней поверхности периодонтальной связки, а также указано, что при расчете начальных перемещений зубов в периодонте зубы и костная ткань могут задаваться как абсолютно твердые тела.

В соответствии с работами [20, 21], будем считать периодонт несжимаемым материалом с коэффициентом Пуассона равным 0,49. Это означает, что при смещении корня зуба к стенке зубной альвеолы, периодонт начинает растекаться вокруг поверхности корня зуба [20]. Поэтому деформации и относительные сдвиги в системе координат, связанной с нормалью, образующей и направляющей к внешней поверхности корня зуба, можно представить в следующем виде [20, 21]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{nn} &= -\frac{u_n}{\delta}; \varepsilon_{tt} = \varepsilon_{\theta\theta} = 0; \\ \gamma_{n\theta} &= -\frac{u_\theta}{\delta}; \gamma_{nt} = -\frac{u_t}{\delta}; \gamma_{n\theta} = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $u_n, u_t, u_\theta$  — перемещения точек периодонта вдоль нормали, образующей и направляющей к поверхности корня зуба;  $\delta$  — ширина периодонтальной связки в направлении нормали к поверхности (1). Нормаль, образующая и направляющая к поверхности корня зуба, а также его геометрические размеры показаны на рисунке.

Условия равновесия корня зуба (равенство нулю главного вектора и главного момента сил, действующих на зуб) представим в виде:

$$\iint_F (\vec{n} \cdot \sigma) dF - \vec{P} = 0, \quad \iint_F \vec{r} \times (\vec{n} \cdot \sigma) dF - \vec{m} = 0, \quad (5)$$

где  $\vec{m} = (m_x, m_y, m_z)$  — главный момент внешних сил;  $\vec{f} = (f_x, f_y, f_z)$  — главный вектор внешних сил;  $\vec{r}$  — радиус-вектор;  $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$  — единичный вектор нормали к поверхности  $F(x, y, z) = 0$ ;  $\sigma$  — тензор напряжений.

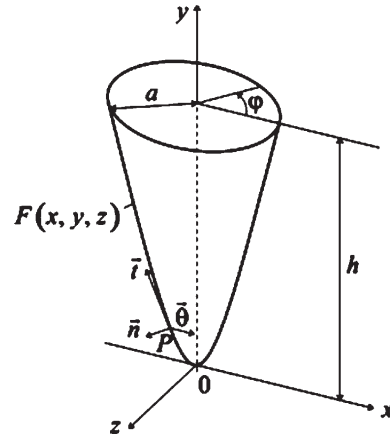


Рисунок — Корень зуба в форме кругового гиперboloида:  $\vec{n}$  — нормаль;  $\vec{t}$  — образующая;  $\vec{\theta}$  — направляющая к поверхности кругового гиперboloида в точке P

На основании закона Гука для однородной изотропной среды компоненты тензора напряжений  $\sigma$  представим в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( (1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \right); \\ \tau_{xy} &= \frac{E\varepsilon_{xy}}{1+\nu}; \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( (1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}) \right); \\ \tau_{xz} &= \frac{E\varepsilon_{xz}}{1+\nu}; \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( (1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \right); \\ \tau_{yz} &= \frac{E\varepsilon_{yz}}{1+\nu}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $E$  — модуль упругости тканей периодонтальной связки;  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Моделирование периодонтальной ткани линейно упругой изотропной средой обусловлено тем, что линейно упругие свойства периодонта отражают те же жесткости, что возникают на начальной стадии деформирования нелинейного периодонта [17]. К тому же тип движения зубов в периодонтальной связке не зависит от материальной нелинейности тканей периодонта [22].

Компоненты тензора деформаций в декартовой системе координат  $(x, y, z)$  выразим через компоненты тензора деформаций в системе координат  $(n, t, \theta)$  следующим образом [20]:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} &= \\ &= T_2 \cdot T_1 \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{nn} & \varepsilon_{nt} & \varepsilon_{n\theta} \\ \varepsilon_{nt} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{n\theta} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot T_1^T \cdot T_2^T; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\varepsilon_m = \frac{1}{2}\gamma_m; \quad \varepsilon_{\theta_n} = \frac{1}{2}\gamma_{\theta_n}.$$

Выполним преобразование вектора перемещения  $(u_n, u_\theta, u_t)$  точки  $P$ , находящейся на внешней поверхности корня зуба (внутренней поверхности периодонтальной связки) из системы координат  $(n, t, \theta)$  в систему координат  $(x, y, z)$ :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_t \\ u_\theta \end{pmatrix} = T_1^T \cdot T_2^T \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix};$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ -\cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} H & 0 & -G \\ 0 & 1 & 0 \\ G & 0 & H \end{pmatrix};$$

$$H = \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}; \quad G = \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}},$$

где  $T_1$  — матрица поворота относительно направляющей  $\bar{\theta}$  на угол  $\alpha$ ;  $T_2$  — матрица поворота относительно оси  $0z$  на угол  $\varphi$ ;  $T_1^T, T_2^T$  — транспонированные матрицы  $T_1$  и  $T_2$  соответственно. В матрице  $T_1$  угол  $\alpha$  между образующей к поверхности корня зуба  $t$  и плоскостью, параллельной плоскости  $x0z$  и проходящей через точку  $P$ , такой, что

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{h\sqrt{x^2 + z^2}}{a(\sqrt{1 + p^2} - p)\sqrt{(ap)^2 + x^2 + z^2}}.$$

Последовательно подставляя в выражение (7) соотношения (4) и (8), получим

$$\varepsilon_{xx} = -\frac{H(G^2 + H^2)u_x \sin(\alpha)}{\delta}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{u_y \cos(\alpha)}{\delta};$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{G(G^2 + H^2)u_z \sin(\alpha)}{\delta};$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{(G^2 + H^2)u_x \cos(\alpha) - Hu_y \sin(\alpha)}{2\delta};$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{(G^2 + H^2)u_z \cos(\alpha) - Gu_y \sin(\alpha)}{2\delta};$$

$$\varepsilon_{xz} = -\frac{(G^2 + H^2)(u_z H + Gu_x) \sin(\alpha)}{2\delta}.$$

Любое перемещение корня зуба может быть описано посредством комбинации поступательных перемещений  $u_{0x}, u_{0y}$  и  $u_{0z}$  вдоль соответствующих координатных осей и углами поворота вершины корня  $\theta_x, \theta_y$  и  $\theta_z$  относительно этих же осей. Поскольку толщина периодонта очень мала (0,2–0,3 мм) [6], углы поворота очень малы. Это позволяет использовать следующие линеаризованные формулы [21]

$$u_x = u_{0x} + z\theta_y - y\theta_z; \quad u_y = u_{0y} - z\theta_x + x\theta_z;$$

$$u_z = u_{0z} + y\theta_x - x\theta_y.$$

Подставим выражения (3), (6), (9) и (10) в уравнения равновесия (5). В результате получим систему однородных алгебраических уравнений относительно поступательных перемещений и углов поворота корня зуба следующего вида

$$c_x u_{0x} + c_{\theta_{xy}} \theta_z = f_x; \quad c_y u_{0y} = f_y;$$

$$c_z u_{0z} + c_{\theta_{yz}} \theta_x = f_z; \quad c_{\theta_{xz}} u_{0z} + \mu_x \theta_x = y_f f_z - z_f f_y;$$

$$\mu_y \theta_y = z_f f_x - x_f f_z; \quad c_{\theta_{xy}} u_{0x} + \mu_z \theta_z = x_f f_y - y_f f_x,$$

где  $c_x, c_y, c_z$  — жесткости периодонтальной связки при поступательном перемещении корня зуба вдоль координатных осей;  $c_{\theta_{xy}}, c_{\theta_{yz}}$  — статические моменты жесткостей;  $c_{\theta_{xz}}, c_{\theta_z}$  — жесткости периодонта при повороте корня зуба относительно оси  $0x, 0z$  при действии силы вдоль этой координатной оси;  $\mu_x, \mu_y, \mu_z$  — жесткости периодонта при поворотах корня зуба относительно координатных осей  $0x, 0y, 0z$  — соответственно;  $(x_f, y_f, z_f)$  — координаты точки приложения нагрузки.

**Условия корпусного перемещения.** Определим ориентацию линии действия нагрузки в плоскости  $x0y$  из условия корпусного перемещения корня зуба в этой плоскости. В этом случае углы поворота  $\theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$ , поступательное перемещение  $u_{0z} = 0$ . Будем считать, что сила также приложена в плоскости  $x0y$  на уровне альвеолярного гребня и координаты точки приложения нагрузки  $(a, 0, h)$ . Тогда из системы (11) получим:

$$c_x u_{0x} = f_x; \quad c_y u_{0y} = f_y; \quad c_{\theta_x} u_{0x} = f_x h - f_z a.$$

Из системы уравнений (12) следует, что линия действия силы, приводящей к корпусному перемещению корня, ориентирована по отношению к плоскости  $x0z$  под углом  $\alpha_1$  таким, что

$$\operatorname{tg}(\alpha_1) = \frac{c_{\theta_x} + c_x h}{c_x a}.$$

Расчет угла  $\alpha_1$  выполнен для центрального резца, геометрические размеры которого  $h = 13$  мм,  $a = 3,9$  мм,  $p = 0,4$  (те же геометрические размеры принимались в последующих расчетах) [20, 21]. Здесь и далее при вычислениях толщина периодонтальной связки составляет  $\delta = 0,229$  мм; модуль упругости  $E = 680$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,49$  [8, 20, 21]. Численное интегрирование коэффициентов системы (10) выполнено по методу Гаусса–Кронрода. В результате получено значение угла  $\alpha_1 \approx 47,7^\circ$ . Ввиду симметрии корня зуба относительно плоскостей  $x0y$  и  $z0y$ , добиться его корпусного перемещения можно, прикладывая нагрузку под углом  $\alpha_1$  по отношению к плоскости  $x0z$  в любой точке, находящейся на контуре сечения корня плоскостью  $y = h$ .

Определим положение плоскости, параллельной координатной плоскости  $x0z$ , в которой мож-

но приложить сосредоточенную нагрузку, действие которой будет приводить к корпусному перемещению зуба. Линия действия силы пересекает ось  $Oy$ . В этом случае углы поворота относительно координатных осей  $\theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$ , поступательное перемещение корня  $u_{0y} = 0$ , составляющая нагрузки  $f_y = 0$  и система уравнений равновесия (11) принимает вид:

$$\begin{aligned} c_x u_{0x} &= f_x; \quad c_z u_{0z} = f_z; \\ c_{\theta_x} u_{0x} &= y_f f_z; \quad c_{\theta_x} u_{0x} = -y_f f_x. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что координата  $y_f$ , определяющая положение искомой плоскости, может определяться отношением  $y_f = -c_{\theta_x}/c_x$  или  $y_f = -c_{\theta_z}/c_z$ . Заметим, что первое соотношение аналогично определению центра сопротивления двумерного корня зуба, ограниченного плоской параболой, сформулированному в работе [20]. Проведенный расчет координаты  $y_f$  для центрального резца, показал, что  $y_f \approx 8,72$  мм, что составляет 67 % от длины корня зуба, что соответствует выводам исследования [20].

Для проведения конечно-элементного расчета координаты  $y_f$  разработана модель центрального резца с применением пакетов TetGen [25] и TOCHNOG [26]. Внешняя поверхность корня зуба и внутренняя поверхность периодонтальной связки задавались уравнением (1). На внешней поверхности периодонта, описываемой уравнением (2) и примыкающей к костной ткани зубной альвеолы, задано жесткое закрепление. Количество конечно-элементных узлов модели «корень зуба — периодонта» составляет 67 548, количество конечных элементов — 374 371. Для периодонтальной связки размер конечных элементов равен 0,05725 мм. Сосредоточенная нагрузка прикладывалась к корню зуба на этапе формирования модели к узлу, находящемуся на оси симметрии корня. Координата  $y_f$  центра сопротивления определялась из условия равенства нулю перемещений корня вдоль оси  $Oy$ .

Значение координаты центра сопротивления  $y_f$ , полученное для центрального резца, в ходе конечно-элементного расчета составило 8,425 мм. Таким образом, результаты расчетов координат  $y_f$ , выполненные на основании формулы  $y_f = -c_{\theta_x}/c_x$  и конечно-элементного моделирования, отличаются на  $\approx 4,8$  %.

**Заключение.** Постановка задачи о начальном корпусном перемещении корня зуба при действии сосредоточенной нагрузки, линия действия которой расположена под углом к координатным плоскостям и определение такого угла наклона для корня зуба в форме кругового гиперболоида выполнены впервые. Сравнительный анализ результатов расчета условий поступательного перемещения зуба в горизонтальной плоскости на основании предложенной аналитической и соответствующей конечно-элементной модели пока-

зал достаточно высокое совпадение значений координаты центра сопротивления корня.

Рассмотренная геометрическая форма корня зуба имеет преимущество по сравнению с формой в виде параболоидом вращения. В дополнение к анализу влияния размеров поперечного сечения и высоты корня, на основании предложенной модели можно выполнить исследование влияния закругления корня на начальные перемещения. В частности, анализ зависимостей координаты  $y_f$  от параметра  $p$ , характеризующего закругление корня в апексе, показывает, что для корней зубов, имеющих в апексе геометрическую форму, близкую к конусу с малым углом раствора, координата центра сопротивления удалена на большее расстояние от вершины корня по сравнению с корнями с более закругленной вершиной.

На основании предложенной модели возможно более корректное исследование геометрической формы корня зуба и периодонтальной связки на начальное движение. Это тем более важно, что сведения о начальных перемещениях могут быть использованы для определения физико-механических свойств тканей периодонта [14]. Направление дальнейших исследований также может быть связано с анализом полей напряжений во время начального нагружения, поскольку такие поля являются первичными для перестройки костной ткани во время ортодонтического движения зубов [22, 27, 28].

#### Список литературы

1. Аболмасов, Н.Г. Ортодонтия / Н.Г. Аболмасов, Н.Н. Аболмасов. — М.: МЕДпресс-информ, 2008. — 424 с.
2. Thurrow, R.C. Edgewise Orthodontics / R.C. Thurrow // Michigan: C.V. Mosby Company. 1982. — Pp. 351.
3. Viccilli, R.F. Axes of resistance for tooth movement: Does the center of resistance exist in 3-dimensional space? / R.F. Viccilli, A. Budiman, C. Burstone J. // Am. J. Orthod. Dentofacial Orthop. — 2013. — Vol. 143. — Pp. 163–172.
4. Biomechanical finite-element investigation of the position of the centre of resistance of the upper incisors / S. Reimann [et al.] // European Journal of Orthodontics. — 2007. — Vol. 29. — Pp. 219–224.
5. Analysis of stress in the periodontium of the maxillary first molar with a three-dimensional finite element model / P.D. Jeon [et al.] // Am. J. Orthod. Dentofacial Orthop. — 1999. — Vol. 115. — Pp. 267–274.
6. Biomechanical features of the periodontium: An experimental pilot study in vivo / M. Cronau [et al.] // Am. J. Orthod. Dentofacial Orthop. — 2006. — Vol. 129. — Pp. 599.e13–599.e21.
7. Ren, Y. Optimum force magnitude for orthodontic tooth movement: a systematic literature review / Y. Ren, C. Jaap, A. Kuijpers-Jagtman // Angle Orthod. — 2003. — Vol. 73. — Pp. 86–92.
8. Patterns of initial tooth displacement associated with various root lengths and alveolar bone heights / K. Tanne [et al.] // Am. J. Dentofacial Orthop. — 1991. — Vol. 100. — Pp. 66–71.
9. Numerical simulation of the biomechanical behaviour of multi-rooted teeth / A. Ziegler [et al.] // European Journal of Orthodontics. — 2005. — Vol. 27. — Pp. 333–339.
10. Simulation of orthodontic tooth movements — a comparison of numerical models / C. Bourauel [et al.] // J. Orofacial Orthoped. — 1999. — Vol. 60. — Pp. 136–151.
11. Nagerl H. Discussion: A FEM study for the biomechanical comparison of labial and palatal force application on the upper incisors / H. Nagerl, D. Kubein-Meesenburg // Fortschritt der Kieferorthopädie. — 1993. — Vol. 54. — Pp. 229–230.



12. Nikolai, R. J. Investigation of Root-Periodontium Interface Stresses and Displacements for Orthodontic Application / R.J. Nikolai, J.W. Schweiker // *Experimental Mechanics*. — 1972. — Pp. 406–413.
13. Dorow, C. Development of a model for the simulation of orthodontic load on lower first premolars using the finite element method / C. Dorow, F.G. Sander // *J. Orofac. Orthop.* — 2005. — Vol. 66. — Pp. 208–218.
14. Kavarizadeh, A. Experimental and numerical determination of initial tooth mobility and material properties of the periodontal ligament in rat molar specimens / A. Kavarizadeh, C. Bourauel, A. Jager // *Eur. J. Orthodont.* — 2003. — Vol. 25. — Pp. 569–578.
15. Provatidis, C.G. A comparative FEM-study of tooth mobility using isotropic and anisotropic models of the periodontal ligament / C.G. Provatidis // *Med. Eng. Physics*. — 2000. — Vol. 22. — Pp. 359–370.
16. A validated finite element method study of orthodontic tooth movement in the human subject / M.L. Jones [et al.] // *J. Orthod.* — 2001. — Vol. 28. — Pp. 29–38.
17. Cattaneo, P.M. The finite element method: a tool to study orthodontic tooth movement / P.M. Cattaneo, M. Dalstra, B. Melsen // *J. Dent. Res.* — 2005. — Vol. 84. — Pp. 428–433.
18. A nonlinear elastic model of the periodontal ligament and its numerical calibration for the study of tooth mobility / G. Pietrzak [et al.] // *Comput. Methods Biomech. Biomed. Eng.* — 2002. — Vol. 5. — Pp. 91–100.
19. Quasi-automatic 3D finite element model generation for individual single-rooted teeth and periodontal ligament / R. Clement [et al.] // *Comput. Methods Programs Biomed.* — 2004. — Vol. 73. — Pp. 135–144.
20. Provatidis C.G. An analytical model for stress analysis of a tooth in translation / C.G. Provatidis // *Int. J. Eng. Sci.* — 2001. — Vol. 39. — Pp. 1361–1381.
21. Van Schepdael, A. Analytical determination of stress patterns in the periodontal ligament during orthodontic tooth movement / A. Van Schepdael, L. Geris, J. Van der Sloten // *Med. Eng. Phys.* — 2013. — Vol. 35. — Pp. 403–410.
22. Determination of the center of resistance in an upper human canine and idealized tooth model / D. Vollmer [et al.] // *Eur. J. Orthod.* — 1999. — Vol. 21. — Pp. 633–648.
23. Наумович, С.А. Биомеханика системы «зуб – периодонт» / С. А. Наумович, А. Е Крушевский. — Минск: Экономич. технологии, 2000. — 132 с.
24. Influence of different modeling strategies for the periodontal ligament on finite element simulation results / A. Hohmann [et al.] // *Am. J. Orthod. Dentofacial. Orthop.* — 2011. — Vol. 139. — Pp. 775–783.
25. TetGen. A Quality Tetrahedral Mesh Generator and a 3D Delaunay Triangulator [Electronic resource] / ed. Hang Si. — Research Group: Numerical Mathematics and Scientific Computing, Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics (WIAS). — Mode of access: <http://tetgen.berlios.de/>. — Date of access: 06.06.2013.
26. TOCHNOG User's manual — a free explicit/implicit FE program [Electronic resource] / ed. Dennis Roddeman. — Mode of access: <http://tochnog.sourceforge.net/tnu/tnu.html>. — Date of access: 06.06.2013.
27. Middleton, J. The role of the periodontal ligament in bone modeling: the initial development of a time-dependent finite element model / J. Middleton, M. Jones, A. Wilson // *Am. J. Orthod. Dentofacial Orthop.* — 1996. — Vol. 109. — Pp. 155–162.
28. De Pauw, G. The value of the centre of rotation in initial and longitudinal tooth and bone displacement / G. De Pauw, L. Dermaut, H. De Bruyn // *Eur. J. Orthodont.* — 2003. — Vol. 25. — Pp. 285–291.

Bosiakov S.M., Mselati A.F.

#### **Analysis of tooth root translation in linear elastic periodontal ligament**

In present paper the simulation of the initial tooth translational displacement on the periodontal linearly elastic shell are performed. The geometric shape of the tooth root is described by equations of the circular hyperboloid. The outer surface of the periodontal ligament fixed in the dental alveoli. The inner surface of the periodontal ligament coincides with the outer surface of the tooth root. The relationship between displacement and deformation of periodont is defined taking into account the incompressibility of the periodontal tissues. The coordinates of the root center of resistance and the line a concentrated load angles of orientation action is defined for a of single-root tooth. A comparative analysis of the results of the calculation coordinates of the centers of resistance on the basis of analytical and finite-element model.

**Keywords:** *finite-element model, properties of tissues, periodont, stress field, bony tissue, biology*

*Поступила в редакцию 15.10.2013.*