

УДК 539.3

Д.В. ЛЕОНЕНКО, д-р физ.-мат. наук
Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК В УПРУГОЙ СРЕДЕ ПАСТЕРНАКА

Рассмотрены свободные колебания трехслойной цилиндрической оболочки в упругой инерционной среде. В тонких изотропных несущих слоях приняты гипотезы Лява. В толстом заполнителе учитывается работа поперечного сдвига и обжатие по толщине, изменение перемещений принято линейным по поперечной координате. Деформации малые. Инерционная среда описывается моделью Пастернака. Исследованы собственные частоты системы «оболочка — среда» в зависимости от характеристик среды.

Ключевые слова: трехслойная оболочка, собственные частоты, упругая среда Пастернака

Введение. Широкое применение трехслойных элементов конструкций в современных отраслях промышленности обуславливает необходимость разработки методов их расчета. Динамическое и статическое деформирование трехслойных стержней и пластин на упругом основании Винклера исследовано в монографии [1]. В статье [2] рассмотрены радиальные собственные колебания трехслойных цилиндрических оболочек. Динамика слоистых оболочек при нестационарных нагрузках исследована в [3]. Здесь рассматриваются свободные колебания упругой трехслойной оболочки, контактирующей с упругой средой Пастернака.

Общая постановка задачи. В тонких изотропных несущих слоях толщины h_k приняты гипотезы Лява, в относительно толстом заполнителе ($h_3 = 2c$) учитывается работа поперечного сдвига и обжатие по толщине. Для него справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией зависимости перемещений точек от поперечной координаты. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Деформации малые. Проводя постановку начально-краевой задачи для трехслойной цилиндрической оболочки, за искомые функции принимаем u_α^k , w^k — тангенциальные перемещения и прогибы точек срединной поверхности несущих слоев в направлении осей x_α , отнесенной к линиям главных кривизн срединной поверхности заполнителя и к внешней нормали, соответственно. К наружной поверхности второго несущего слоя действует реакция упругой среды $q_{\alpha r}^2$, q_{3r}^2 .

Уравнения движения трехслойной оболочки следуют из вариационного принципа Лагранжа с учетом вариации работы сил инерции:

$$\delta A_q - \delta W = \delta A_I, \quad (1)$$

где $\delta A_q = \delta A_{q_1} + \delta A_{q_2}$ — вариация работы внешних сил δA_{q_1} и контурных усилий δA_{q_2} ; δW — вариация работы внутренних сил упругости; δA_I — вариация работы сил инерции.

На границу контакта второго слоя действует реакция упругой инерционной среды Пастернака:

$$q_{3r}^1 = -\kappa_0 w^1 - m_f \ddot{w}^1 + t_f \Delta w^1, \quad q_{\alpha r}^k = 0, \quad q_{3r}^2 = 0, \quad (2)$$

где Δ — оператор Лапласа; κ_0 — коэффициент сжатия среды, формально совпадающий с коэффициентом жесткости модели Винклера; t_f — коэффициент сдвига среды; m_f — инерционный член среды.

Разрешающие уравнения в перемещениях свободных колебаний круговой цилиндрической трехслойной оболочки в упругой среде следуют из соотношений (1), после выражения внутренних усилий через величины u_α^m , w^m с учетом реакций среды (2):

$$\sum_{k=1}^2 \left[a_{m\alpha 1}^k u_{\alpha}^k + a_{m\alpha 2}^k u_{\alpha}^k + a_{m\alpha 3}^k u_{\alpha}^k + a_{m\alpha 4}^k u_{\alpha}^k + a_{m\alpha 5}^k w^k + a_{m\alpha 6}^k w^k + a_{m\alpha 7}^k w^k \right] - b_\alpha^m \ddot{u}_\alpha^m = 0;$$

$$\sum_{\gamma=1}^2 \sum_{k=1}^2 \left[a_{m31}^{\gamma k} w_{\gamma\gamma\gamma}^k + a_{m32}^k w_{1122}^k + (a_{m33}^{\gamma k} + R^{3-2\gamma} m_f \delta_{mk} \delta_{1m}) w_{\gamma\gamma}^k + (a_{m34}^k - R m_m \kappa_0 \delta_{mk}) w^k + a_{m35}^{\gamma k} u_{\gamma\gamma\gamma}^k + a_{m36}^{\gamma k} u_{\gamma\gamma}^k + a_{m37}^{\gamma k} u_{\gamma\gamma\beta\beta}^k \right] - (b_3^m + R m_m m_f \delta_{1m}) \ddot{w}^m = 0 \quad (m, \alpha, \beta = 1, 2; \alpha \neq \beta), \quad (3)$$

где δ_{mk} — символы Кронекера; R — радиус оболочки; ρ_k — плотность материала k -го слоя (запятая в нижнем индексе обозначает производную по следующей за ней координате).

Считаем, что закрепление кромок несущих слоев осуществляется мембраной, установленной на срезах торцов, абсолютно жесткой на растяжение и сдвиг и свободно деформирующейся из своей плоскости. Силовые граничные условия формулируются из требования выполнения в каждой точке координатной линии равенства заданных обобщенных усилий и моментов внутренним силовым факторам. Кинематические условия свободного опирания торцами на жесткие неподвижные опоры будут:

$$w^k = u_{1,1}^k = w_{,11}^k = 0 \quad (k = 1, 2), \quad (4)$$

где начальные условия принимаются нулевыми.

Система уравнений движения (3) является линейной. Для получения решения воспользуемся

методом Бубнова–Галеркина [4], который предполагает разложение искомым перемещений в ряды по системам базисных функций. При граничных условиях (4) искомые перемещения представляются в виде:

$$u_1^k = \sum_{m,n=0}^{\infty} \cos \frac{\pi mx}{L} \cos(n\varphi) T_{1mn}^k(t);$$

$$u_2^k = \sum_{m,n=0}^{\infty} \sin \frac{\pi mx}{L} \sin(n\varphi) T_{2mn}^k(t); \quad (5)$$

$$w^k = \sum_{m,n=0}^{\infty} \sin \frac{\pi mx}{L} \cos(n\varphi) T_{3mn}^k(t), \quad (k=1,2).$$

Подставив выражения (5) в систему (3), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функции времени $T_{lmn}^k(t)$. В матричном виде она будет следующей:

$$[P]\{\dot{T}\} - [B]\{\ddot{T}\} = 0, \quad (6)$$

где $[P]$ — квадратная матрица шестого порядка, составленная из коэффициентов p_{ij} , зависящих от волновых параметров m и n , которые характеризуют форму колебаний и связаны с числом узловых линий; $[B]$ — диагональная матрица шестого порядка с элементами B_{mnn} ; $\{T\}$ и $\{\ddot{T}\}$ — векторы, сформированные из искомым функций времени $T_{lmn}^k(t)$ и их вторых производных.

Решение системы (6) можно принять в виде

$$T_{lmn}^k(t) = A_{lmn}^k \sin(\omega_{mn}t + \alpha_{mn}), \quad (7)$$

где A_{lmn}^k , ω_{mn} — амплитуды и частоты колебаний; α_{mn} — начальные фазы.

Подставив выражения для перемещений (5) и функции (7) в систему уравнений (3), приходим к обобщенной задаче на собственные значения:

$$[P]\{A\} = -\omega^2 [B]\{A\}, \quad (8)$$

где $\{A\}$ — вектор, сформированный амплитудами A_{lmn}^k .

Обозначив $\lambda = -\omega^2$ и обратив матрицу $[B]$, т. к. она не является вырожденной, осуществим переход от (8) к стандартной задаче на собственные значения:

$$[R]\{A\} = \lambda \{A\}, \quad [R] = [B]^{-1}[P]. \quad (9)$$

Переход от (9) к (8) и вычисление собственных значений λ легко реализуются с помощью стандартных программ, входящих в математическое обеспечение любого компьютера.

Численное исследование. Численное исследование проводилось для свободно опертой оболочки с материалами слоев «Д16Т — фторопласт — Д16Т» и относительными толщинами $h_1 = h_2 = 0,02$, $c = 0,025$. Предполагается, что оболочка находится в упругой среде, которая моделирует поведение грунтов и представляет собой сжимаемый слой толщиной H_p расположенный на бесконечно жестком основании. В этом случае расчетные параметры материала среды вычислялись по методике, предложенной в мо-

нографии В.З. Власова, Н.Н. Леонтьева [5]. Параметры среды (2) принимались следующими $\kappa_0 = 50$ МПа/м, $t_f = 4,7$ МПа·м, $m_f = 641$ кг/м². Коэффициент жесткости для модели Винклера принимался численно равным аналогичному параметру в модели Пастернака для сред толщиной $H_f = 5$, т. к. в [2] показано, что при $H_f \geq 5$ параметры, описывающие деформирование среды, остаются постоянными. Частоты ω_{mnp} на графиках измеряются в с⁻¹.

Рисунок 1 иллюстрирует зависимость частоты ω_{111} от относительной толщины заполнителя: $a — L = 2R$; $b — L = 10R$. Кривые соответствуют различным моделям упругих сред. При увеличении толщины заполнителя собственные частоты обеих оболочек падают по всем рассматриваемым моделям, при этом соответствующие результаты по моделям Винклера и Пастернака для короткой оболочки практически совпадают между собой. В длинной оболочке среда Пастернака дает более высокие частоты. Учет инерции внешней среды приводит к максимальному уменьшению частоты собственных колебаний короткой оболочки в 2 раза, длинной — в 1,5 раза.

На рисунке 2 представлены зависимости частоты ω_{111} от толщины заполнителя (a) и первого не-

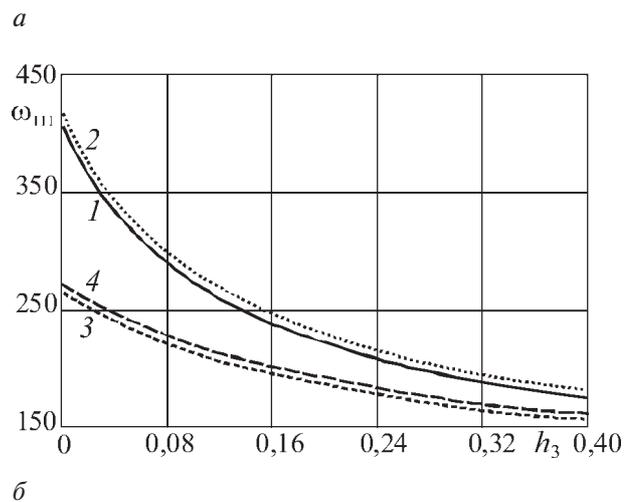
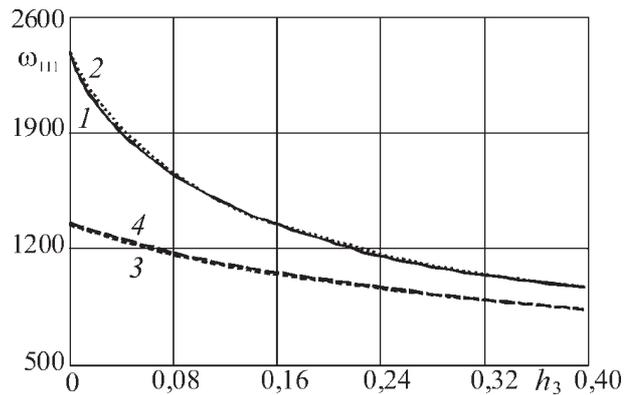


Рисунок 1 — Изменение частоты собственных колебаний в зависимости от толщины заполнителя в короткой (*a*) и длинной (*б*) оболочках: 1 — безынерционная среда Винклера; 2 — безынерционная среда Пастернака; 3 — инерционная среда Винклера; 4 — инерционная среда Пастернака

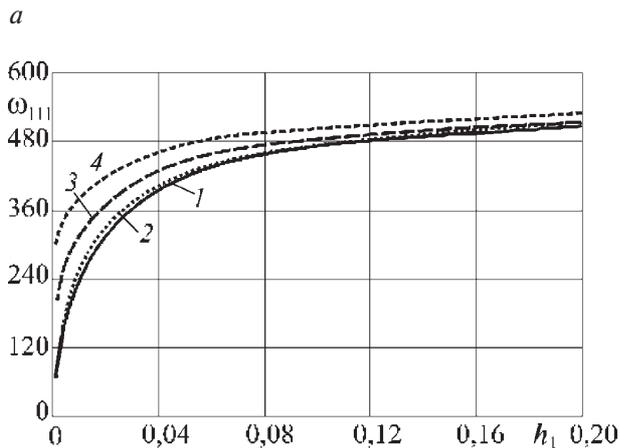
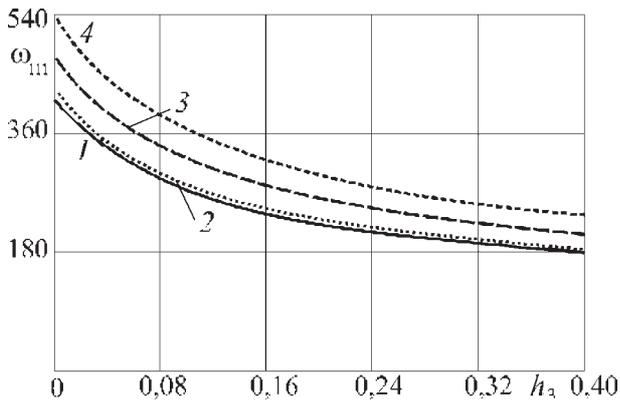


Рисунок 2 — Изменение частоты собственных колебаний ω_{111} (c^{-1}) в зависимости от толщины заполнителя (а) и первого несущего слоя (б); 1 — $t_f = 0$; 2 — $t_f = 5$ МПа·м; 3 — $t_f = 25$ МПа·м; 4 — $t_f = 50$ МПа·м

сущего слоя (б) для оболочки длиной $L = 10R$ в безынерционной среде Пастернака ($\kappa_0 = 50$ МПа/м). При увеличении сдвиговой жесткости t_f в 5 раз (3), по сравнению с (2), частоты возрастают на 15 %, его увеличение еще в 2 раза приводит к росту частот на 35 %. Влияние коэффициента сдвиговой жесткости более отчетливо проявляется в случае тонких слоев.

Выводы. Таким образом, можно сделать вывод, что коэффициент сдвига в упругой среде на частотах собственных колебаний в более толстых оболочках влияния практически не оказывает. Значительное изменение частот происходит в основном за счет учета инерционных свойств внешней среды.

Работа выполнена при финансовом содействии БРФФИ.

Список обозначений

- ρ_k — плотность материала k -го слоя ($k = 1, 2, 3$);
- h_k — толщина k -го слоя, $h_3 = 2c$ ($k = 1, 2, 3$ — номер слоя);
- u_i^k, w^k — тангенциальные перемещения в направлении оси x_α и прогибы точек срединной поверхности несущих слоев оболочки;
- R — радиус срединного слоя заполнителя оболочки;
- L — относительная длина оболочки;
- T_{jm}^k — функция времени;
- δA — вариация работы внешних сил;
- δW — вариация работы внутренних сил упругости;
- δA_I — вариация работы сил инерции;
- ω_{mnp} — частоты собственных колебаний;
- κ_0 — коэффициент сжатия среды;
- t_f — коэффициент сдвига среды;
- m_f — инерционный член среды.

Список литературы

1. Плескачевский, Ю.М. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 560 с.
2. Леоненко, Д.В. Радиальные собственные колебания упругих трехслойных цилиндрических оболочек / Д.В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. — 2010. — № 3(12). — С. 53–56.
3. Головки, К.Г. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / К.Г. Головки, П.З. Луговой, В.Ф. Мейш. — К.: Киевский ун-т, 2012. — 541 с.
4. Галеркин, Б.Г. Стержни и пластинки. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластинок / Б.Г. Галеркин // Вестн. инженеров. — 1915. — Т. 1. — С. 897–908.
5. Власов, В.З. Балки, плиты, оболочки на упругом основании / В.З. Власов, Н.Н. Леонтьев. — М.: Гос. изд-во физ.-математич. лит-ры, 1960. — 491 с.

Leonenko D.V.

Natural vibrations of the three-layered cylindrical shells in the elastic Pasternak’s medium

The natural vibrations of the three-layered cylindrical shell are considered. Love’s hypotheses are accepted for the thin isotropic bearing layers. The work of the in-plane shear, compression over thickness and variations in displacements are taken linear along the transverse coordinate for the thick filler the conditions of displacement continuity are not used on the contact boundaries. The deformations are small. Inertial medium is described by a Pasternak’s model. The natural frequencies of the «shell — medium» are investigated as dependent on characteristics of the medium.

Keywords: three-layer shell, natural frequencies, elastic Pasternak’s medium

Поступила в редакцию 15.10.2013.