

УДК 539.3

Г.И. МИХАСЕВ, д-р физ.-мат. наук; А.Н. ШЕЙКО

Белорусский государственный университет, г. Минск

МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ МНОГОСТЕННОЙ УГЛЕРОДНОЙ НАНОТРУБКИ, ОСНОВАННОЕ НА НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ТОНКИХ УПРУГИХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

Предлагается математическая модель, предсказывающая формы свободных колебаний предварительно напряженной многостенной углеродной нанотрубки, внедренной в упругую среду. В качестве исходных уравнений используются уравнения движения тонкой ортотропной цилиндрической оболочки типа Флюгге. Для учета наноразмерных эффектов вводится закон физического состояния Эрингена. В качестве примера исследованы собственные формы колебаний двустенной нанотрубки.

Ключевые слова: многостенная углеродная нанотрубка, нелокальная теория упругости, силы Ван-дер-Ваальса, уравнения движения, свободные колебания

Введение. Разнообразные применения углеродных нанотрубок (УНТ), в том числе в качестве наполнителей в композиционных материалах, возбудили огромный интерес к исследованию их механических свойств. Существуют два основных подхода к исследованиям УНТ: на основе атомарных или молекулярных моделей, а также моделей классической механики сплошных сред. Широко известно, что оба подхода имеют свои недостатки [1]. Атомистическое моделирование требует чрезвычайно больших вычислительных ресурсов и для анализа объектов относительно больших размеров (например, композиционных материалов, содержащих в качестве наполнителей УНТ) неприемлемо [2, 3]. В то же время, применимость методов классической механики сплошных сред к наноразмерным объектам вызывает сомнения [4], что частично объясняется тем, что классические континуальные модели не учитывают эффекты масштаба на наноразмерном уровне. В течение последних десяти лет появилось много работ, в которых предлагаются новые подходы, основанные на нелокальной теории упругости Эрингена [5]. По-видимому, Пиддиэсон [2] был первый, кто применил нелокальную теорию упругости и предложил простейшую балочную модель Эйлера-Бернулли для изучения ее изгиба. Позже появилось огромное количество исследований, в которых были предложены различные подходы, основанные на нелокальной теории тонких оболочек и учитывающие анизотропию механических свойств, обусловленную ее хиральностью, а также зависимость упругих характеристик трубки от ее размеров и характера нагружения [6–9]. В связи с этим, укажем на важную работу Пенга и др. [10], в которой выведены оценки погрешности неклассических моделей теории тонких изотропных и ортотропных оболочек при исследовании механических свойств УНТ. Впоследствии данные оценки были использованы в статье [11] при выводе разрешающей системы уравнений движения многостен-

ной углеродной нанотрубки (МУНТ), основанной на нелокальной теории ортотропных оболочек и гипотез Кирхгофа-Лява. Автором показано, что погрешность принятой модели зависит от соотношения радиуса внутренней трубки, межатомного расстояния $a = 0,14$ нм и эффективной толщины внешней стенки трубки.

Несмотря на огромное число работ, посвященных исследованию механических свойств УНТ, в подавляющем количестве случаев были предложены континуальные модели, которые не учитывают зависимость механических свойств каждой стенки МУНТ от направлений на ее поверхности. В известных работах отсутствует частотный анализ взаимных форм движения стенок МУНТ и, как правило, не принимаются во внимание начальные напряжения, обусловленные действием внешних сил и реакцией окружающей внешней среды. Вместе с тем, как показано в статье [12], растягивающие осевые силы могут быть причиной аномального свойства, выражающегося в сильной локализации форм собственных колебаний УНТ, внедренной в неоднородную упругую матрицу.

Целью данной работы является вывод разрешающих уравнений движения МУНТ, учитывающих наноразмерный эффект, свойство ортотропии упругих свойств стенок, имеющих armchair- или zigzag-конфигурацию, а также наличие мембранных усилий в стенках и исследование на их основе форм собственных колебаний.

Исходные обозначения и предположения. МУНТ будем моделировать механической системой, состоящей из N концентрически вложенных цилиндрических оболочек (рисунок). Пусть L, R_n, h_n ($n = \overline{1, N}$) — длина, радиус срединной поверхности и эффективная толщина n -ой трубки. На срединной поверхности n -ой трубки введем местную ортогональную систему координат x, φ , где x — осевая координата, отнесенная к характерному размеру R , а φ — угловая координата (см. рисунок).

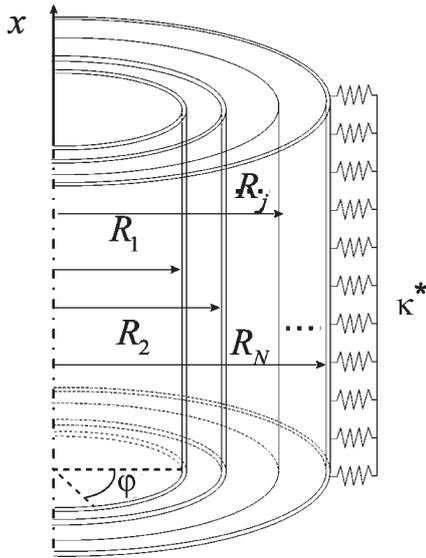


Рисунок — Модель многостенной УНТ в упругой среде

Считаем, что МУНТ лежит в упругой винклеровской среде (в общем случае неоднородной) с коэффициентом постели $k^*(x, \varphi)$. Взаимное влияние стенок МУНТ учтем посредством введения сил Ван-дер-Ваальса (vdW -силы).

Известно, что механические свойства УНТ зависят как от линейных размеров, так и от ее хиральности [4, 6–9, 13, 14]. На основе молекулярного моделирования Чанг [15] вывел упругие постоянные одностенной углеродной трубки, моделируемой анизотропной упругой оболочкой в зависимости от строения ее решетчатой структуры; в частности показано, что для зигзагообразной трубки имеет место свойство ортотропии с главными направлениями упругости, совпадающими с криволинейными линиями $x = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$. Еще ранее в работе [10] было показано, что независимо от хиральности, одностенная УНТ радиуса R может моделироваться ортотропной упругой оболочкой с погрешностью порядка $O[(a/R)^2]$, где $a \approx 0,14$ нм — характерный внутренний размер решетки. Следуя работам [10, 15], далее считаем, что каждый слой, составляющий многостенную нанотрубку, может быть представлен упругой ортотропной цилиндрической оболочкой, характеризующейся параметрами $E_{n,i}$, $\nu_{n,i}$, G_n ($i = 1, 2; n = \overline{1, N}$), где $E_{n,1}$, $E_{n,2}$ — модули Юнга в направлениях x и φ срединной поверхности соответственно, $\nu_{n,1}$, $\nu_{n,2}$ — коэффициенты Пуассона, характеризующие поперечное сокращение (растяжение) при растяжении (сжатии) в направлениях x и φ , а G_n — модуль сдвига в плоскости n -ой трубки, параллельной срединной поверхности. При этом в силу симметрии, $E_{n,2}\nu_{n,1} = E_{n,1}\nu_{n,2}$ для любого n . Соотношения для вычисления данных параметров в зависимости от диаметра и хиральности одностенной трубки приведены в работе [15].

Уравнения движения в усилиях. Пусть $T_{n,i}^0, S_n^0$ — начальные мембранные усилия в срединной поверхнос-

ти n -ой трубки, вызванные действием внешних сил и/или реакцией внешней среды. Обозначим через $u_{n,1}$, $u_{n,2}$ и $u_{n,3}$ тангенциальные и нормальное перемещения, соответственно, точек срединной поверхности n -ой трубки, а через $T_{n,i}$, S_n и $M_{n,1}$, $M_{n,2}$, H_n дополнительные мембранные усилия и моменты, обусловленные этими перемещениями. В качестве исходных уравнений пример уравнения движения типа Флюгге, учитывающие наличие начальных напряжений [16]:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial T_{1,1}}{\partial x} + \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} + \frac{T_{1,2}^0}{R_1} \left(\frac{\partial^2 u_{1,1}}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial u_{1,3}}{\partial x} \right) + \frac{T_{1,1}^0}{R_1} \frac{\partial^2 u_{1,1}}{\partial x^2} + \\
 & + 2 \frac{\partial S_1^0}{R_1} \frac{\partial^2 u_{1,1}}{\partial x \partial \varphi} - R_1 \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 u_{1,1}}{\partial t^2} = 0; \\
 & \frac{\partial T_{1,2}}{\partial \varphi} + \frac{\partial S_1}{\partial x} - \frac{1}{R_1} \frac{M_{1,2}}{\partial \varphi} - \frac{1}{R_1} \frac{\partial H_1}{\partial x} + \\
 & + \frac{T_{1,2}^0}{R_1} \left(\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial u_{1,3}}{\partial \varphi} \right) + \frac{T_{1,1}^0}{R_1} \frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial x^2} + \\
 & + 2 \frac{S_1^0}{R_1} \left(\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial u_{1,3}}{\partial x} \right) - R_1 \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial t^2} = 0; \\
 & \frac{\partial^2 M_{1,2}}{\partial \varphi^2} + 2 \frac{\partial^2 H_1}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial^2 M_{1,1}}{\partial x^2} + R_1 T_{1,2} - \\
 & - T_{1,2}^0 \left(\frac{\partial u_{1,1}}{\partial x} - \frac{\partial u_{1,2}}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u_{1,3}}{\partial \varphi^2} \right) - T_{1,1}^0 \frac{\partial^2 u_{1,3}}{\partial x^2} + \\
 & + 2 S_1^0 \left(\frac{\partial u_{1,2}}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_{1,3}}{\partial x \partial \varphi} \right) - R_1^2 p_{12}^*(x, \varphi) + R_1 \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 u_{1,3}}{\partial t^2} = 0; \\
 & \frac{\partial T_{j,1}}{\partial x} + \frac{\partial S_j}{\partial \varphi} + \frac{T_{j,2}^0}{R_j} \left(\frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial u_{j,3}}{\partial x} \right) + \\
 & + \frac{T_{j,1}^0}{R_j} \frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial S_j^0}{R_j} \frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial x \partial \varphi} - R_j \rho_j h_j \frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial t^2} = 0; \\
 & \frac{\partial T_{j,2}}{\partial \varphi} + \frac{\partial S_j}{\partial x} - \frac{1}{R_j} \frac{M_{j,2}}{\partial \varphi} - \frac{1}{R_j} \frac{\partial H_j}{\partial x} + \\
 & + \frac{T_{j,2}^0}{R_j} \left(\frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial u_{j,3}}{\partial \varphi} \right) + \frac{T_{j,1}^0}{R_j} \frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial x^2} + \\
 & + 2 \frac{S_j^0}{R_j} \left(\frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial u_{j,3}}{\partial x} \right) - R_j \rho_j h_j \frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial t^2} = 0; \\
 & \frac{\partial^2 M_{j,2}}{\partial \varphi^2} + 2 \frac{\partial^2 H_j}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial^2 M_{j,1}}{\partial x^2} + \\
 & + R_j T_{j,2} - T_{j,2}^0 \left(\frac{\partial u_{j,1}}{\partial x} - \frac{\partial u_{j,2}}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial \varphi^2} \right) - \\
 & - T_{j,1}^0 \frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial x^2} + 2 S_j^0 \left(\frac{\partial u_{j,2}}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial x \partial \varphi} \right) - \\
 & - R_j^2 \left[p_{j,j+1}^*(x, \varphi) - \frac{R_{N-1}}{R_N} p_{(j-1)j}^*(x, \varphi) \right] + \\
 & + R_j \rho_j h_j \frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial t^2} = 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где $p_{(j-1)j}^* = c^*(u_{j,3} - u_{j-1,3})$ — нормальные составляющие wdW -сил; $p_{N,N+1}^* = p_N^* = -\kappa^*(x, \varphi)u_{N,3}$ — сила реакции винклеровского основания; $j = \overline{2, N}$; ρ_n — удельная масса n -ой трубки; t — время; $c^* = \frac{200}{0,16\pi a^2} \text{erg/cm}^2$; $a = 0,142 \text{ нм}$ — внутренний характерный размер решетки УНТ. Группа уравнений (1) описывает движение внутренней (1-ой) стенки, а система уравнения (2) — j -ой стенки МУНТ; при этом, если $j = N$, то уравнения (2) соответствуют внешней стенке. В уравнениях (1), (2) не учтены тангенциальные составляющие wdW -сил (в виду их малости) подобно тому, как это было сделано в [11].

Уравнения физического состояния. Фигурирующие в (1), (2) усилия и моменты суть микроскопические величины, учитывающие наноразмерные эффекты. В соответствии с нелокальной теорией упругости Эрингена [5] данные величины связаны со своими макроскопическими аналогами соотношениями [17]: $\mathfrak{S}_n(T_{n,i}, S_n, M_{n,2}, H_n) = (T_{n,i}^{(m)}, S_n^{(m)}, M_{n,2}^{(m)}, H_n^{(m)})$, где \mathfrak{S}_n — дифференциальные операторы, действующие по формулам:

$$\mathfrak{S}_n = 1 - \left(\frac{e_0 d}{R_n} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) = 1 - e_0^2 \mu_n^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), \quad (3)$$

$$\mu_n = \frac{d}{R_n}; \quad n = \overline{1, N},$$

где $e_0 \approx 0,39$ — материальная константа нелокальности [5]. Макроскопические напряжения введем в соответствии с теорией тонких ортотропных оболочек [18]. В частности,

$$T_{j,1}^{(m)} = \frac{h_j E_{j,1}}{(1 - \nu_{j,1} \nu_{j,2}) R_j} \left(\frac{\partial u_{j,1}}{\partial x} + \nu_{j,2} \frac{\partial u_{j,2}}{\partial \varphi} + \nu_{j,2} u_{j,3} \right);$$

$$S_j^{(m)} = \frac{h_j G_j}{R_j} \left(\frac{\partial u_{j,1}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{j,2}}{\partial x} \right); \quad (4)$$

$$M_{j,1}^{(m)} = \frac{h_j^3 E_{j,1}}{12(1 - \nu_{j,1} \nu_{j,2}) R_j^2} \left[\frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial x^2} + \nu_{j,2} \left(\frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial u_{j,2}}{\partial \varphi} \right) \right].$$

Уравнения для остальных составляющих усилий и моментов в виду их громоздкости здесь не выписаны [18, 19].

Уравнения движения МУНТ в перемещениях. Подставим усилия и моменты (4) в уравнения (1), (2), предварительно подействовав на них соответствующим (n -ому слою) оператором (4). В результате получим систему дифференциальных уравнений в перемещениях, описывающую свободные колебания МУНТ:

$$L_{j,i}(u_{j,s}) + \mathfrak{S}_j \left[N_{j,i}(u_{j,s}) - I_{j,i} \frac{\partial^2 u_{j,i}}{\partial t^2} \right] = 0; \quad (5)$$

$$L_{j,3}(u_{j,s}) + \mathfrak{S}_j \left[N_{j,3}(u_{j,s}) - p_{j(j+1)} + \delta_j p_{(j-1)j} + I_{j,3} \frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial t^2} \right] = 0,$$

где $j = \overline{1, N}$; $i = 1, 2$; $s = 1, 2, 3$; $\delta_j = R_{j-1}/R_j$; $p_{(j-1)j} = c_j^*(u_{j,3} - u_{j-1,3})$; $p_{01} = 0$; $p_{N(N+1)} = -\kappa(x, \varphi)u_{N,3}$, а операторы $L_{j,s}$, $N_{j,3}$ вводятся по формулам:

$$L_{j,1}(u_{j,s}) = \frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial x^2} + \nu_{j,2} \left(\frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial u_{j,3}}{\partial x} \right) + k_{j,112} \left(\frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial x \partial \varphi} \right);$$

$$N_{j,1}(u_{j,s}) = t_{j,21}^0 \left(\frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial u_{j,3}}{\partial x} \right) + t_{j,11}^0 \frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial x^2} + 2s_{j,1}^0 \frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial x \partial \varphi};$$

$$L_{j,2}(u_{j,s}) = \frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial u_{j,3}}{\partial \varphi} + \nu_{j,1} \frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial x \partial \varphi} + k_{j,212} \left(\frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial x^2} \right) - \zeta_j^4 \left(\frac{\partial^3 u_{j,3}}{\partial \varphi^3} + \nu_{j,1} \frac{\partial^3 u_{j,3}}{\partial x^2 \partial \varphi} \right) - \zeta_j^4 k_{j,212} \frac{\partial^3 u_{j,3}}{\partial x^2 \partial \varphi}; \quad (6)$$

$$N_{j,2}(u_{j,s}) = t_{j,22}^0 \left(\frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial u_{j,3}}{\partial \varphi} \right) + t_{j,12}^0 \frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial x^2} + 2s_{j,2}^0 \left(\frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial u_{j,3}}{\partial x} \right);$$

$$L_{j,3}(u_{j,s}) = \zeta_j^4 \left\{ \left(\frac{\partial^4 u_{j,3}}{\partial x^4} + 2\nu_{j,2} \frac{\partial^4 u_{j,3}}{\partial x^2 \partial \varphi^2} \right) + e_{j,21} \frac{\partial^4 u_{j,3}}{\partial \varphi^4} + 4k_{j,112} \frac{\partial^4 u_{j,3}}{\partial x^2 \partial \varphi^2} \right\} + e_{j,21} \left(\frac{\partial u_{j,3}}{\partial \varphi} + u_{j,3} + \nu_{j,1} \frac{\partial u_{j,1}}{\partial x} \right);$$

$$N_{j,3}(u_{j,s}) = -t_{j,21}^0 \left(\frac{\partial u_{j,1}}{\partial x} - \frac{\partial u_{j,2}}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial \varphi^2} \right) - t_{j,11}^0 \frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial x^2} + 2s_{j,1}^0 \left(\frac{\partial u_{j,2}}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial x \partial \varphi} \right);$$

где приняты следующие обозначения:

$$\zeta_j^4 = \frac{h_j^2}{12R_j^2}; \quad c_j = \frac{R_j^2(1 - \nu_{j,1} \nu_{j,2})}{h_j E_{j,1}}; \quad (7)$$

$$k_{j,i12} = \frac{G_j(1 - \nu_{j,1} \nu_{j,2})}{E_{j,i}}; \quad \varepsilon_j = \frac{E_{j,2}}{E_{j,1}} \leq 1;$$

$$t_{j,i1}^0 = \frac{T_{j,i}^0}{h_j E_{j,1}}; \quad s_{j,1}^0 = \frac{S_j^0}{h_j E_{j,1}}; \quad I_{j,1} = \frac{R_j^2 \rho_j (1 - \nu_{j,1} \nu_{j,2})}{E_{j,1}};$$

$$t_{j,i2}^0 = \frac{t_{j,i1}^0}{\varepsilon_j}; \quad s_{j,2}^0 = \frac{s_{j,1}^0}{\varepsilon_j}; \quad I_{j,2} = \frac{I_{j,1}}{\varepsilon_j}.$$

Погрешность теории ортотропных оболочек имеет порядок $\sim h_N/R^2$ [18, 19], а погрешность при-

нятой континуальной модели УНТ равна $\sim (e_0 d / R_1)^2$ [10]. Отсюда, погрешность выведенных уравнений (5) в моделировании свободных колебаний МУНТ есть величина порядка $\sim \max_{j=1,N} \{h_j / R_j^2, (e_0 d / R_1)^2\}$.

Пример. В качестве примера изучим свободные колебания шарнирно опертой двустенной УНТ ($N = 2$), свободной от начальных напряжений и реакции окружающей упругой среды. С целью упрощения вычислений, будем моделировать каждую стенку изотропной оболочкой. В данном случае решение уравнений (5), удовлетворяющих условиям шарнирного опирания краев, можно представить в виде:

$$u_{j,1} = A_{j,1} \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \sin(m\phi) \cos(\Omega t);$$

$$u_{j,2} = A_{j,2} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \cos(m\phi) \cos(\Omega t); \quad (8)$$

$$u_{j,3} = A_{j,3} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \sin(m\phi) \cos(\Omega t), \quad l = \frac{L}{R_2}, \quad j = 1, 2.$$

Подстановка (8) в уравнения движения (5) приводит к системе $3N$ алгебраических уравнений относительно неизвестных величин $A_{j,s}$ ($s = 1, 2, 3$). Из условия существования нетривиального решения данной системы получаем уравнение относительно искомой частоты Ω .

В таблицах 1–3 приведены результаты расчетов собственной частоты в зависимости от числа полуволн n в осевом направлении при $m = 1$ волн в окружном направлении и различных значениях длины l МУНТ. В качестве исходных данных приняты следующие значения физических и геометрических параметров двустенной УНТ [17]: $E_1 = E_2 = 1,058$ ТПа,

Таблица 1 — Собственные частоты двустенной УНТ, соответствующие изгибным формам колебаний

a — стенки двигаются в одном направлении

<i>l</i>	Ω , ТГц				
	<i>n</i> = 1	<i>n</i> = 5	<i>n</i> = 10	<i>n</i> = 15	<i>n</i> = 20
5	3,455	15,241	39,183	82,182	118,630
10	1,184	9,559	15,241	24,510	39,183
20	0,342	4,641	9,559	12,427	15,241

b — стенки двигаются в противоположных направлениях

<i>l</i>	Ω , ТГц				
	<i>n</i> = 1	<i>n</i> = 5	<i>n</i> = 10	<i>n</i> = 15	<i>n</i> = 20
5	6,475	18,765	41,239	83,291	118,759
10	5,605	12,018	18,762	27,376	41,239
20	5,667	7,304	12,018	15,666	18,765

Таблица 2 — Собственные частоты двустенной УНТ, соответствующие крутильным формам колебаний (стенки двигаются в одном направлении)

<i>l</i>	Ω , ТГц				
	<i>n</i> = 1	<i>n</i> = 5	<i>n</i> = 10	<i>n</i> = 15	<i>n</i> = 20
5	11,791	32,770	63,010	91,965	140,308
10	8,961	18,776	32,770	47,943	63,010
20	7,815	13,146	18,776	25,399	32,770

Таблица 3 — Собственные частоты двустенной УНТ, соответствующие продольным формам колебаний (стенки двигаются в одном направлении)

<i>l</i>	Ω , ТГц				
	<i>n</i> = 1	<i>n</i> = 5	<i>n</i> = 10	<i>n</i> = 15	<i>n</i> = 20
5	19,050	54,053	104,318	152,235	196,470
10	17,880	29,498	54,053	79,339	104,318
20	17,630	20,090	29,498	41,519	54,053

$v_1 = v_2 = 0,27$, $\rho_1 = \rho_2 = 1,341 \cdot 10^3$ кг/м³, $e_0 = 0,39$, $\kappa^* = 0$, $h_1 = h_2 = 0,341$ нм, $R_1 = 1,735$ нм, $R_2 = 2,415$ нм.

Результаты, представленные в таблице 1, соответствуют изгибным формам колебаний трубки, когда ее стенки двигаются синхронно в одном направлении. Данные, приведенные в таблицах 2 и 3, соответствуют крутильным и продольным колебаниям в случае совпадения направлений движения стенок (расчеты, выполненные для форм колебаний с противоположными направлениями движения стенок, здесь не приводятся). Как видно, частоты для тангенциальных форм колебаний выше частот, при которых стенки двигаются в радиальном направлении. Как и следовало ожидать, увеличение длины трубки приводит к падению частот, а увеличение числа волн в осевом направлении — к их росту. Расчеты при больших значениях m не выполнялись, ибо число полуволн в окружном направлении должно быть согласовано с числом атомов в направлении образующей каждой стенки МУНТ. Для фиксированных значений всех параметров частоты, соответствующие однонаправленному движению стенок, меньше частот, при которых стенки двигаются в противоположных направлениях. Укажем в заключение на хорошее совпадение найденных частот с частотами, найденными в работе [17] в соответствии с нелокальной балочной моделью.

Заключение. С использованием нелокальной теории ортотропных цилиндрических оболочек выведены уравнения в перемещениях, моделирующие свободные колебания многостенной углеродной нанотрубки, внедренной в упругую матрицу. Для учета взаимного влияния стенок трубки введены силы Ван-дер-Ваальса. В качестве закона физического состояния принят закон нелокальной

теории упругости Эрингена. Рассмотрен пример о свободных колебаниях двустенной углеродной нанотрубки, проанализированы собственные частоты, соответствующие изгибным, крутильным и продольным формам колебаниям в зависимости от взаимного направления движения стенок трубки.

Работа выполнена в рамках задания 2.2.02 ГПНИ «Функциональные и машиностроительные материалы и технологии, наноматериалы и нанотехнологии в современной технике».

Список литературы

- Xu, M. Free transverse vibrations of nano-to-micron scale beams / M. Xu. // Proc. R. Soc. Lond. A. — 2006. — Vol. 462. — Pp. 2977–2995.
- Peddieon, J. Application of nonlocal continuum models to nanotechnology / J. Peddieon, R. Buchanan, R.P. McNitt // Int. J. Eng. Sci. — 2003. — Vol. 41. — Pp. 305–312.
- Harik, V. M. Ranges of Applicability for the Continuum Beam Model in the Mechanics of Carbon Nanotubes and Nanorows / V.M. Harik // Solid State Comm. — 2001. — Vol. 120. — Pp. 331–335.
- Sun, C.T. Size-dependent elastic moduli of platelike nanomaterials / C.T. Sun, H. Zhang // J. Appl. Phys. — 2003. — Vol. 93. — Pp. 1212–1218.
- Eringen, A.C. Nonlocal continuum field theories / A.C. Eringer. — New-York: Springer, 2002.
- Chang, T. Prediction of chirality- and size-dependent elastic properties of single-walled carbon nanotubes via a molecular mechanics model / T. Chang, J. Geng, X. Guo // Proc. R. Soc. A. — 2006. — Vol. 462. — Pp. 2523–2540.
- Size dependence of the thin-shell model for carbon nanotubes / L. Wang [et al.] // Physical Review Letters. — 2005. — Vol. 95. — Pp. 105501–105504.
- Ru, C.Q. Chirality-dependent mechanical behavior of carbon nanotubes based on an anisotropic elastic shell model / C.Q. Ru // Math. Mech. Solids. — 2009. — Vol. 14. — Pp. 88–101.
- Fazelzadeh, S.A. Nonlocal anisotropic elastic shell model for vibrations of single-walled carbon nanotubes with arbitrary chirality // S.A. Fazelzadeh, E. Ghavanloo // Composite Structures. — 2012. — Vol. 94(3). — Pp. 1016–1022.
- Can a single-wall carbon nanotube be modeled as a thin shell? / J. Peng [et al.] // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. — 2008. — Vol. 56. — Pp. 2213–2224.
- Михасев, Г.И. Уравнения движения многостенной углеродной нанотрубки, основанные на нелокальной теории ортотропных оболочек / Г.И. Михасев // Докл. НАН Беларуси. — 2011. — Т. 55, № 6. — С. 119–123.
- Mikhasev, G. On localized modes of free vibrations of single-walled carbon nanotubes embedded in nonhomogeneous elastic medium / G. Mikhasev // Z. Angew. Math. Mech. — 2013 / DOI 10.1002/zamm.201200140.
- Elastic properties of C and BxCyNz composite nanotubes / E. Hernandez [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 1998. — Vol. 80. — Pp. 4502–4505.
- Popov, V. N. Elastic properties of single-walled carbon nanotubes / V.N. Popov, V.E. Van Doren, M. Balkanski // Phys. Rev. B61. — 2000. — Pp. 3078–3084.
- Chang, T. A molecular based anisotropic shell model for single-walled carbon nanotubes / T. Chang // J. Mech. Phys. Solids. — 2010. — Vol. 58. — Pp. 1422–1433.
- Flügge, W. *Stattik und Dynamik der Schalen* / W. Flügge. — Berlin: Springer, 1934.
- Usuki, T. Beam equations for multi-walled carbon nanotubes derived from Flugge shell theory / T. Usuki, K. Yogo // Proc. R. Soc. A. — 2009. — Vol. 465. — Pp. 1199–1226.
- Амбарцумян, С.А. *Общая теория анизотропных оболочек* / С.А. Амбарцумян. — М.: Наука, 1974. — 448 с.
- Михасев, Г.И. Локализованные колебания и волны в тонких оболочках / Г.И. Михасев, П.Е. Товстик // Асимптотические методы. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 292 с.

Mikhasev G.I., Sheiko A.N.

Simulation of free vibrations of multi-walled carbon nanotube based on non-local theory of thin elastic orthotropic shells

The mathematical model of multi-walled carbon nanotube embedded in an elastic matrix is proposed. The effect of the surrounding elastic medium are considered using the Winkler-type spring constant. The tube may be prestressed by external forces. The Flügge type equations for orthotropic cylindrical shells, including the initial membrane hoop and axial stresses, are used as the governing ones. The constitutive equations are formulated by considering the small-scale effects. The dependence of natural frequencies upon a number of waves in the longitudinal direction, tube length and the motion directions of walls as well is studied.

Keywords: multi-walled carbon nanotube, nonlocal theory of elasticity, van der Waals forces, equations of motion, free vibrations

Поступила в редакцию 15.10.2013.