

УДК 539.3, 534.2

Г.Р. ГУЛГАЗАРЯН, д-р физ.-мат. наук

Армянский государственный педагогический университет им Х. Абовяна, г. Ереван

Р.Г. ГУЛГАЗАРЯН, канд. физ.-мат. наук

ЗАО «Ментор Графикас Дивелопмент Сервисис», г. Ереван, Армения

О СВОБОДНЫХ ИНТЕРФЕЙСНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТОНКИХ УПРУГИХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Исследуются свободные интерфейсные колебания бесконечных замкнутых и незамкнутых цилиндрических оболочек, составленных из полубесконечных ортотропных тонких цилиндрических оболочек с разными упругими свойствами. Используя систему дифференциальных уравнений, соответствующих классической теории ортотропных цилиндрических оболочек, выводятся дисперсионные уравнения и асимптотические формулы для нахождения собственных частот интерфейсных колебаний составной цилиндрической оболочки. Установлены асимптотические связи между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и аналогичных задач для бесконечной составной пластинки и пластинки-полосы соответственно. Приводится механизм, с помощью которого расчленяются возможные типы интерфейсных колебаний. На примерах цилиндрических оболочек с разными радиусами приведены приближенные значения безразмерной характеристики собственной частоты и характеристики затухания соответствующих форм колебаний.

Ключевые слова: интерфейсные колебания, собственные частоты, дисперсионные уравнения, цилиндрические оболочки

Введение. Начало исследования упругих поверхностных волн связано с работой Рэлея [1], в которой установлено существование упругих поверхностных волн, распространяющихся вдоль свободной границы полупространства с амплитудой, быстро убывающей с глубиной. Такие волны, возникающие у свободного края упругих тел различной геометрии, обычно называются поверхностными волнами типа Рэлея [2], [3]. Вопрос существования собственных колебаний, затухающих от свободного торца безмоментной цилиндрической оболочки вдоль направления ее образующих, изучены в [4–8]. Аналогичные задачи для тонких упругих (моментных) цилиндрических оболочек изучены в [9–15]. Начало исследования собственных интерфейсных колебаний связаны с работами [16], [17], в которых исследуются аналоги волн Стоунли [18]. В работе [16] изучаются поперечные колебания, бегущие по линии контакта двух полубесконечных пластин, и сосредоточенных вблизи нее. В работе [17] численно исследованы плоские интерфейсные колебания у границы раздела двух состыкованных полуполос с различными упругими свойствами. Вопрос существования собственных интерфейсных и краевых колебаний безмоментных замкнутых и незамкнутых составных цилиндрических оболочек переменной кривизны изучены в [19–21]. В работах [22], [23], используя специальный асимптотический метод, изучены собственные интерфейсные колебания составных круговых цилиндрических оболочек [22] и оболочек вращения [23].

В настоящей работе изучаются собственные интерфейсные колебания тонких упругих замкнутых и незамкнутых цилиндрических оболочек, со-

ставленных из полубесконечных ортотропных цилиндрических оболочек с разными упругими коэффициентами. Предполагается, что у линии раздела свойств материала имеется полный контакт. В случае незамкнутой цилиндрической оболочки предполагается, что граничные образующие шарнирно закреплены.

Получены дисперсионные уравнения для определения собственных частот возможных типов интерфейсных колебаний для замкнутых и незамкнутых составных цилиндрических оболочек. Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и аналогичных задач для бесконечной составной пластинки и пластинки-полосы.

Постановка задачи и основные уравнения. Рассматриваются свободные интерфейсные колебания замкнутых и незамкнутых цилиндрических оболочек, составленных из полубесконечных ортотропных тонких упругих цилиндрических оболочек с разными упругими коэффициентами. Введем на срединной поверхности оболочки криволинейные координаты (α, β) , где α ($-\infty < \alpha < \infty$) и β ($0 \leq \beta \leq s$) являются соответственно ориентированной переменной длиной образующей и длиной дуги направляющей окружности (s — полная длина направляющей окружности, $\alpha = 0$ — соответствует границе раздела свойств материала). Все величины, относящиеся к правой оболочке ($0 \leq \alpha < \infty$), отмечаются верхним индексом (1), к левой оболочке ($-\infty < \alpha \leq 0$) индексом (2) (рисунки 1, 2).

В качестве исходных уравнений, описывающих колебания левых и правых цилиндрических оболочек, используются уравнения, которые соответ-

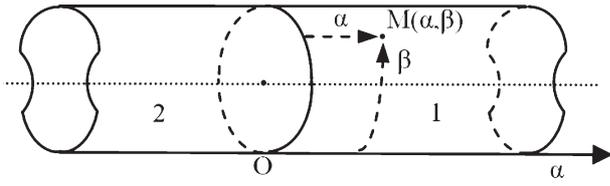


Рисунок 1 — Замкнутая цилиндрическая оболочка

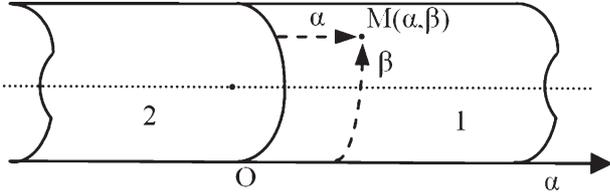


Рисунок 2 — Незамкнутая цилиндрическая оболочка

ствуют классической теории ортотропных цилиндрических оболочек и записываются в выбранных криволинейных координатах α, β [24]:

$$\begin{aligned}
 & -B_{11}^{(r)} \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial \alpha^2} - B_{66}^{(r)} \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial \beta^2} - (B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)}) \frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial \alpha \partial \beta} + \\
 & + \frac{B_{12}^{(r)}}{R} \frac{\partial u_3^{(r)}}{\partial \alpha} = \rho^{(r)} \omega^2 u_1^{(r)}; \\
 & -(B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)}) \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial \alpha \partial \beta} - B_{66}^{(r)} \frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial \alpha^2} - B_{22}^{(r)} \frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial \beta^2} + \\
 & + \frac{B_{22}^{(r)}}{R} \frac{\partial u_3^{(r)}}{\partial \beta} - \frac{\mu^4}{R^2} \left(4B_{66}^{(r)} \frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial \alpha^2} + B_{66}^{(r)} \frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial \beta^2} \right) - \\
 & - \frac{\mu^4}{R} \left(B_{22}^{(r)} \frac{\partial^3 u_3^{(r)}}{\partial \beta^3} + (B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)}) \frac{\partial^3 u_3^{(r)}}{\partial \beta \partial \alpha^2} \right) = \rho^{(r)} \omega^2 u_2^{(r)}; \quad (1) \\
 & \mu^4 \left(B_{11}^{(r)} \frac{\partial^4 u_3^{(r)}}{\partial \alpha^4} + 2(B_{12}^{(r)} + 2B_{66}^{(r)}) \frac{\partial^4 u_3^{(r)}}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + B_{22}^{(r)} \frac{\partial^4 u_3^{(r)}}{\partial \beta^4} \right) + \\
 & + \frac{\mu^4}{R} \left(B_{22}^{(r)} \frac{\partial^3 u_2^{(r)}}{\partial \beta^3} + (B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)}) \frac{\partial^3 u_2^{(r)}}{\partial \beta \partial \alpha^2} \right) - \\
 & - \frac{B_{12}^{(r)}}{R} \frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial \alpha} - \frac{B_{22}^{(r)}}{R} \frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial \beta} + \frac{B_{22}^{(r)}}{R^2} u_3^{(r)} = \rho^{(r)} \omega^2 u_3^{(r)},
 \end{aligned}$$

где $u_1^{(r)}, u_2^{(r)}, u_3^{(r)}$ ($r = 1, 2$) — проекции вектора смещения соответственно в направлениях α, β и нормали к срединной поверхности оболочки; R — радиус направляющей окружности срединной поверхности; $\mu^4 = h^2 / 12$ (h — толщина оболочки); ω — угловая частота собственных интерфейсных колебаний; $\rho^{(r)}$ ($r = 1, 2$) — плотности материалов; $B_{ij}^{(r)}$ ($r = 1, 2$) — коэффициенты упругости полубесконечных оболочек.

Рассматриваются следующие граничные условия

$$\begin{aligned}
 T_1^{(1)} \Big|_{\alpha=0} &= T_1^{(2)} \Big|_{\alpha=0}; \quad S_{12}^{(1)} + \frac{H^{(1)}}{R} \Big|_{\alpha=0} = S_{12}^{(2)} + \frac{H^{(2)}}{R} \Big|_{\alpha=0}; \\
 M_1^{(1)} \Big|_{\alpha=0} &= M_1^{(2)} \Big|_{\alpha=0}; \quad N_1^{(1)} + \frac{\partial H^{(1)}}{\partial \beta} \Big|_{\alpha=0} = N_1^{(2)} + \frac{\partial H^{(2)}}{\partial \beta} \Big|_{\alpha=0}; \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_1^{(1)} \Big|_{\alpha=0} &= u_1^{(2)} \Big|_{\alpha=0}; \quad u_2^{(1)} \Big|_{\alpha=0} = u_2^{(2)} \Big|_{\alpha=0}; \\
 u_3^{(1)} \Big|_{\alpha=0} &= u_3^{(2)} \Big|_{\alpha=0}; \quad \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}; \\
 u_i^{(r)}(\alpha, \beta) &= u_i^{(r)}(\alpha, \beta + s), \quad i = 1, 2, 3; \quad (3)
 \end{aligned}$$

$$T_2^{(r)} \Big|_{\beta=0, s} = u_1^{(r)} \Big|_{\beta=0, s} = u_3^{(r)} \Big|_{\beta=0, s} = M_2^{(r)} \Big|_{\beta=0, s} = 0, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned}
 T_1^{(r)} &= h B_{11}^{(r)} \left[\frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \left(\frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial \beta} - \frac{u_3^{(r)}}{R} \right) \right]; \\
 M_1^{(r)} &= \frac{h^3}{12} B_{11}^{(r)} \left[\frac{\partial^2 u_3^{(r)}}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \left(\frac{\partial^2 u_3^{(r)}}{\partial \beta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial \beta} \right) \right];
 \end{aligned}$$

$$T_2^{(r)} = h B_{22}^{(r)} \left[\frac{B_{12}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} \frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial \beta} - \frac{u_3^{(r)}}{R} \right];$$

$$M_2^{(r)} = \frac{h^3}{12} B_{22}^{(r)} \left[\frac{B_{12}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} \frac{\partial^2 u_3^{(r)}}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u_3^{(r)}}{\partial \beta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial \beta} \right];$$

$$\begin{aligned}
 S_{12}^{(r)} + \frac{H^{(r)}}{R} &= h B_{66}^{(r)} \left[\frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial \beta} + \frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial \alpha} + \right. \\
 & \left. + \frac{h^2}{3R} \left(\frac{\partial^2 u_3^{(r)}}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial \alpha} \right) \right]; \\
 N_1^{(r)} + \frac{\partial H^{(r)}}{\partial \beta} &= \frac{h^3}{12} B_{11}^{(r)} \left[\frac{\partial^3 u_3^{(r)}}{\partial \alpha^3} + \right. \\
 & \left. + \frac{B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \left(\frac{\partial^3 u_3^{(r)}}{\partial \alpha \partial \beta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial \alpha \partial \beta} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Граничные условия (2)–(3) соответствуют замкнутой цилиндрической оболочке: соотношения (2) выражают условия полного контакта при $\alpha = 0$, а (3) — условия периодичности колебания, где s — полная длина направляющей окружности срединной поверхности (см. рисунок 1). Граничные условия (2), (4) соответствуют цилиндрической оболочке открытого профиля: соотношения (4) являются условиями шарнирного закрепления по образующим $\beta = 0$ и $\beta = s$, где s — длина дуги окружности срединной поверхности между шарнирно закрепленными образующими (см. рисунок 2).

Вывод дисперсионных уравнений. В первом, втором и третьем уравнениях системы (1) угловую частоту ω формально заменяются на $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ соответственно.

Вводятся обозначения: $k = 2\pi n_0 / s$, $n_0 \in N$ для замкнутой цилиндрической оболочки, и $k = \pi / s$ для цилиндрической оболочки открытого профиля. Пусть $R^{-1} = kr_0 / 2$, где r_0 — безразмерный параметр. Решение системы (1), с указанными изменениями, ищется в виде

$$(u_1^{(r)}, u_2^{(r)}, u_3^{(r)}) = (u_m^{(r)} \sin km\beta, v_m^{(r)} \cos km\beta, \sin km\beta) \times \exp((-1)^r \chi^{(r)} k\alpha), \quad m=1, 2, \dots, \quad (5)$$

где m — волновое число; $u_m^{(r)}, v_m^{(r)}$ — неопределенные коэффициенты; $\chi^{(r)}$ — неопределенный коэффициент затухания. При этом условия (3) и (4) выполняются автоматически и поставленные задачи решаются аналогичным образом, если придавать параметру k разные значения. Подставляя выражения (5) в систему (1), с указанными изменениями, получим

$$(c_m^{(r)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_m^{(r)} d_m^{(r)}) u_m^{(r)} = \frac{(-1)^r \chi^{(r)} r_0}{2} \times \left[a_m^{(r)} - a^2 m^2 \frac{B_{22}^{(r)} (B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)})}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} l_m^{(r)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 \frac{B_{12}^{(r)} B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} d_m^{(r)} \right]; \quad (6)$$

$$(c_m^{(r)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_m^{(r)} d_m^{(r)}) v_m^{(r)} = \frac{r_0 m}{2} \{ b_m^{(r)} - a^2 g_m^{(r)} l_m^{(r)} \}; \quad (7)$$

$$R_{mm}^{(r)} c_m^{(r)} + \frac{r_0^2}{4} \left\{ c_m^{(r)} + m^2 b_m^{(r)} - \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} (\chi^{(r)})^2 a_m^{(r)} + a^2 (R_{mm}^{(r)} g_m^{(r)} d_m^{(r)} - 2m^2 l_m^{(r)} b_m^{(r)}) + \frac{r_0^2}{4} a^2 d_m^{(r)} \left(b_m^{(r)} + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\chi^{(r)})^2 \right) + a^4 m^2 g_m^{(r)} (l_m^{(r)})^2 \right\} = 0; \quad (8)$$

$$a_m^{(r)} = \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\chi^{(r)})^2 + \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_2^{(r)})^2;$$

$$b_m^{(r)} = B_{11}^{(r)} (\chi^{(r)})^2 - \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 + \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_1^{(r)})^2, \quad a^2 = \mu^4 k^2;$$

$$c_m^{(r)} = (\chi^{(r)})^4 - B_{22}^{(r)} (\chi^{(r)})^2 m^2 + \left(\frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_1^{(r)})^2 + (\eta_2^{(r)})^2 \right) (\chi^{(r)})^2 + (m^2 - (\eta_1^{(r)})^2) \left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_2^{(r)})^2 \right);$$

$$B_1^{(r)} = \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}};$$

$$B_2^{(r)} = \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - 2B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}}; \quad (9)$$

$$d_m^{(r)} = \frac{4B_{66}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} (\chi^{(r)})^2 - m^2;$$

$$g_m^{(r)} = \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{66}^{(r)}} (\chi^{(r)})^2 - \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (m^2 - (\eta_1^{(r)})^2);$$

$$l_m^{(r)} = \frac{B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} (\chi^{(r)})^2 - m^2;$$

$$R_{mm}^{(r)} = a^2 \left(\frac{B_{11}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} (\chi^{(r)})^4 - \frac{2(B_{12}^{(r)} + 2B_{66}^{(r)})}{B_{22}^{(r)}} (\chi^{(r)})^2 + m^4 \right) -$$

$$- \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} (\eta_3^{(r)})^2; \quad (\eta_i^{(r)})^2 = \frac{\rho^{(r)} \omega_i^2}{B_{66}^{(r)} k^2}, \quad i=1, 2, 3.$$

Пусть $\chi_j^{(r)}$ ($j=1, 2, 3, 4$) — попарно различные нули уравнения (8) с положительными действительными частями, тогда $\chi_{j+4}^{(r)} = -\chi_j^{(r)}$, $j=1, 2, 3, 4$ — также попарно различные нули этого уравнения. Пусть $(u_{1j}^{(r)}, u_{2j}^{(r)}, u_{3j}^{(r)})$ нетривиальные решения вида (5) системы (1) при $\chi^{(r)} = \chi_j^{(r)}$, ($j=1, 2, \dots, 8$) соответственно. Представляя решения задач (1)–(3) и (1)–(2), (4) в виде

$$u_i^{(r)} = \sum_{j=1}^8 w_j^{(r)} u_{ij}^{(r)}, \quad i=1, 2, 3; \quad r=1, 2$$

и учитывая граничные условия (2), получим систему уравнений

$$\sum_{j=1}^4 \frac{M_{ij}^{(1)} w_j^{(1)}}{c_{mj}^{(1)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_{mj}^{(1)} d_{mj}^{(1)}} - \frac{c M_{ij}^{(2)} w_j^{(2)}}{c_{mj}^{(2)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_{mj}^{(2)} d_{mj}^{(2)}} = 0, \quad i=1, 2, 3, 4; \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^4 \frac{M_{ij}^{(1)} w_j^{(1)}}{c_{mj}^{(1)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_{mj}^{(1)} d_{mj}^{(1)}} - \frac{M_{ij}^{(2)} w_j^{(2)}}{c_{mj}^{(2)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_{mj}^{(2)} d_{mj}^{(2)}} = 0, \quad i=5, 6, 7, 8;$$

$$M_{1j}^{(r)} = (\chi_j^{(r)})^2 a_{mj}^{(r)} - \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 b_{mj}^{(r)} - \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} c_{mj}^{(r)} +$$

$$+ \frac{r_0^2}{4} a^2 \frac{B_{12}^{(r)} B_{22}^{(r)}}{(B_{11}^{(r)})^2} d_{mj}^{(r)} (m^2 - (\eta_1^{(r)})^2) -$$

$$- a^2 m^2 \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} l_{mj}^{(r)} \left((\chi_j^{(r)})^2 + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 - \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_1^{(r)})^2 \right);$$

$$M_{2j}^{(r)} = (-1)^r \chi_j^{(r)} m \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \{ a_{mj}^{(r)} + b_{mj}^{(r)} +$$

$$+ a^2 \left[4c_{mj}^{(r)} - l_{mj}^{(r)} \left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{66}^{(r)}} (\chi_j^{(r)})^2 + \frac{B_{12}^{(r)} B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} m^2 + \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_1^{(r)})^2 \right) \right] +$$

$$+ \frac{r_0^2}{4} a^2 \left(4b_{mj}^{(r)} + \frac{B_{12}^{(r)} B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} d_{mj}^{(r)} - 4a^2 \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} (\chi_j^{(r)})^2 g_{mj}^{(r)} \right);$$

$$M_{3j}^{(r)} = \left((\chi_j^{(r)})^2 - \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 \right) c_{mj}^{(r)} +$$

$$+ \frac{r_0^2}{4} \left[a^2 (\chi_j^{(r)})^2 g_{mj}^{(r)} \left(\frac{4B_{66}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} (\chi_j^{(r)})^2 -$$

$$- \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2}{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)}} m^2 \right) - \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 b_{mj}^{(r)} \right];$$

$$M_{4j}^{(r)} = (-1)^r \chi_j^{(r)} \left\{ \left((\chi_j^{(r)})^2 - \frac{B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 \right) c_{mj}^{(r)} +$$

$$+ \frac{r_0^2}{4} \left[a^2 (\chi_j^{(r)})^2 g_{mj}^{(r)} d_{mj}^{(r)} - \frac{B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 b_{mj}^{(r)} + \right. \quad (11)$$

$$\left. + a^2 m^2 \frac{B_{12}^{(r)} (B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)})}{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)}} g_{mj}^{(r)} (\chi_j^{(r)})^2 \right\}, \quad c = \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}};$$

$$M_{5j}^{(r)} = (-1)^r \chi_j^{(r)} \left\{ a_{mj}^{(r)} - a^2 m^2 \frac{B_{22}^{(r)} (B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)})}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} l_{mj}^{(r)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 \frac{B_{12}^{(r)} B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} d_{mj}^{(r)} \right\};$$

$$M_{6j}^{(r)} = b_{mj}^{(r)} - a^2 g_{mj}^{(r)} l_{mj}^{(r)}; M_{7j}^{(r)} = c_{mj}^{(r)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_{mj}^{(r)} d_{mj}^{(r)};$$

$$M_{8j}^{(r)} = (-1)^r \chi_j^{(r)} \left(c_{mj}^{(r)} + \frac{r_0^2}{4} a^2 g_{mj}^{(r)} d_{mj}^{(r)} \right);$$

Нижний индекс j означает, что соответствующая функция взята при $\chi^{(r)} = \chi_j^{(r)}$. Чтобы система (10) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель равнялся нулю

$$\Delta = \text{Det} \begin{vmatrix} T_{11}^{(1)} & T_{12}^{(2)} \\ T_{21}^{(1)} & T_{22}^{(2)} \end{vmatrix} = 0; \quad (12)$$

$$T_{11}^{(1)} = \|M_{ij}^{(1)}\|_{ij=1}^4; T_{12}^{(2)} = -c \|M_{ij}^{(2)}\|_{ij=1}^4;$$

$$T_{21}^{(1)} = \|M_{ij}^{(1)}\|_{i=5, j=1}^{8,4}; T_{22}^{(2)} = -\|M_{ij}^{(2)}\|_{i=5, j=1}^{8,4}.$$

Численный анализ показывает, что левая часть равенства (12) становится малой, когда любые два корня уравнения (8) становятся близкими друг к другу. Это сильно усложняет расчеты и может привести к появлению ложных решений. Оказывается, что множитель в левой части равенства (12), стремящийся к нулю при сближении корней, можно выделить.

Выполняя элементарные действия над столбцами определителя (12), получаем

$$\Delta = m^{35} K^{(1)} K^{(2)} \text{Det} \begin{vmatrix} t_{11}^{(1)} & t_{12}^{(2)} \\ t_{21}^{(1)} & t_{22}^{(2)} \end{vmatrix} = 0; \quad (13)$$

$$K^{(r)} = (x_1^{(r)} - x_2^{(r)})(x_1^{(r)} - x_3^{(r)})(x_1^{(r)} - x_4^{(r)}) \times (x_2^{(r)} - x_3^{(r)})(x_2^{(r)} - x_4^{(r)})(x_3^{(r)} - x_4^{(r)}), x_j^{(r)} = \chi_j^{(r)} / m;$$

$$t_{11}^{(1)} = \|m_{ij}^{(1)}\|_{ij=1}^4; t_{12}^{(2)} = c \|m_{ij}^{(2)}\|_{ij=1}^4;$$

$$t_{21}^{(1)} = \|m_{ij}^{(1)}\|_{i=5, j=1}^{8,4}; t_{22}^{(2)} = \|m_{ij}^{(2)}\|_{i=5, j=1}^{8,4}, \quad r = 1, 2. \quad (14)$$

Выражения для $m_j^{(r)}$, $r = 1, 2$ из (14) не приводятся. Уравнение (13) эквивалентно уравнению

$$\nabla = \text{Det} \begin{vmatrix} t_{11}^{(1)} & t_{12}^{(2)} \\ t_{21}^{(1)} & t_{22}^{(2)} \end{vmatrix} = 0. \quad (15)$$

Учитывая возможные соотношения между $\eta_{1m}^{(r)}, \eta_{2m}^{(r)}, \eta_{3m}^{(r)}$ заключаем, что уравнение (15) определяет частоты соответствующих типов интерфейсных колебаний.

При $\eta_{1m}^{(r)} = \eta_{2m}^{(r)} = \eta_{3m}^{(r)} = \eta_m^{(r)}$ уравнение (8) является характеристическим уравнением системы (1). Уравнение (15) при $k = 2\pi n_0 / s$, $n_0 \in N$ является

дисперсионным уравнением задачи (1)–(3), а при $k = \pi / s$ — дисперсионным уравнением задачи (1)–(2), (4).

Асимптотика дисперсионного уравнения (15) при $R^{-1} \rightarrow 0$. При использовании формулы из § 2 будем полагать, что $\eta_1^{(r)} = \eta_2^{(r)} = \eta_3^{(r)} = \eta^r$ ($r = 1, 2$). Тогда при $R^{-1} \rightarrow 0$ ($r_0 \rightarrow 0$) уравнение (8) преобразуется в совокупность уравнений

$$c_m^{(r)} = (\chi^{(r)})^4 - B_2^{(r)} (\chi^{(r)})^2 m^2 + \frac{B_{11}^{(r)} + B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta^{(r)})^2 (\chi^{(r)})^2 - (m^2 - (\eta^{(r)})^2) \left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta^{(r)})^2 \right) = 0; \quad (16)$$

$$R_{mm}^{(r)} = a^2 \left(\frac{B_{11}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} (\chi^{(r)})^4 - \frac{2(B_{12}^{(r)} + 2B_{66}^{(r)})}{B_{22}^{(r)}} (\chi^{(r)})^2 + m^4 \right) - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} (\eta^{(r)})^2 = 0, \quad r = 1, 2; \quad (17)$$

которые являются характеристическими уравнениями для уравнений планарных и изгибных колебаний пластины соответственно. Корни $\chi^{(r)} / m$ уравнений (16) и (17) с положительными действительными частями обозначим через $y_1^{(r)}, y_2^{(r)}$ и $y_3^{(r)}, y_4^{(r)}$ соответственно.

Аналогичным образом как в [10] доказываются, что при условии

$$\varepsilon_m \ll 1; y_j^{(r)} \neq y_i^{(r)}; i \neq j; \varepsilon_m = r_0 / (2m) \quad (18)$$

корни $(\chi^{(r)})^2 / m^2$ уравнения (8) можно представить в виде

$$(x_j^{(r)})^2 = (y_j^{(r)})^2 + \alpha_{jm}^{(r)} \varepsilon_m^2 + \beta_{jm}^{(r)} \varepsilon_m^4 + \dots, \quad j = \overline{1, 4}. \quad (19)$$

При условии (18), учитывая соотношения (11) и (19) и тот факт, что

$$\frac{M_{3j}^{(r)}}{m^6} = \frac{M_{4j}^{(r)}}{m^7} = \frac{M_{7j}^{(r)}}{m^4} = \frac{M_{8j}^{(r)}}{m^5} = O(\varepsilon_m^2), \quad (20)$$

уравнение (15) приводится к виду

$$\nabla = \frac{B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} N^{(1)}(\eta_m^{(1)}) N^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \times \{ K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)}) K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)}) G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) \} + O(\varepsilon_m^2) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}; \quad (21)$$

$$N^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = (y_1^{(r)} + y_3^{(r)})(y_1^{(r)} + y_4^{(r)}) \times (y_2^{(r)} + y_3^{(r)})(y_2^{(r)} + y_4^{(r)});$$

$$G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) + \left(\frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^2 K_1^{(2)}(\eta_m^{(2)}) + \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \left[2 \left(y_3^{(1)} y_4^{(1)} + \frac{B_{12}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \right) \left(y_3^{(2)} y_4^{(2)} + \frac{B_{12}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} \right) + (y_3^{(1)} + y_4^{(1)})(y_3^{(2)} + y_4^{(2)})(y_3^{(1)} y_4^{(1)} + y_3^{(2)} y_4^{(2)}) \right];$$

$$K_1^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = (y_3^{(r)})^2 (y_4^{(r)})^2 + 4 \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} y_3^{(r)} y_4^{(r)} - \left(\frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \right)^2;$$

$$L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) Q^{(2)}(\eta_m^{(2)}) + \left(\frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}} \right)^2 K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}) Q^{(1)}(\eta_m^{(1)}) + \frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}} \times \times \left[2 \left(y_1^{(1)} y_2^{(1)} - \frac{B_{12}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} (1 - (\eta_m^{(1)})^2) \right) \times \times \left(y_1^{(2)} y_2^{(2)} - \frac{B_{12}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} (1 - (\eta_m^{(2)})^2) \right) + (y_2^{(1)} + y_1^{(1)})(y_2^{(2)} + y_1^{(2)})((1 - (\eta_m^{(2)})^2) y_1^{(1)} y_2^{(1)} + (1 - (\eta_m^{(1)})^2) y_1^{(2)} y_2^{(2)}) \right];$$

$$K_2^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = (1 - (\eta_m^{(r)})^2) \times \times \left(\frac{B_{12}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} - (\eta_m^{(r)})^2 \right) - (\eta_m^{(r)})^2 y_1^{(r)} y_2^{(r)};$$

$$K_3^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = (1 - (\eta_m^{(r)})^2) \left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_m^{(r)})^2 \right) \times \times \left(\frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} - a^2 m^2 \frac{(B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)})(B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)})}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} \right) + \left(B_2^{(r)} - \frac{B_{11}^{(r)} + B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_m^{(r)})^2 \right) \times \times \left(\frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} - a^2 m^2 \frac{(B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)})(B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)})}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} \right) \times \times \left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_m^{(r)})^2 + a^2 m^2 \frac{B_{22}^{(r)} (B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)})}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} \right) + \left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_m^{(r)})^2 + a^2 m^2 \frac{B_{22}^{(r)} (B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)})}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} \right)^2;$$

$$Q^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = y_1^{(r)} y_2^{(r)} + \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (1 - (\eta_m^{(r)})^2).$$

Из уравнения (21) следует, что при $\epsilon_m \rightarrow 0$ уравнение (15) распадается на уравнения

$$\begin{aligned} G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) &= 0; \quad L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = 0; \\ K_3^{(1)}(\eta_m^{(1)}) &= 0; \quad K_3^{(2)}(\eta_m^{(2)}) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Из них первые два — дисперсионные уравнения изгибных и планарных интерфейсных колебаний аналогичной задачи для ортотропной бесконечной пластинки $k = 2\pi n_0 / s$ и пластинки-полосы с шарнирно закрепленными краями $k = \pi / s$.

Корням третьего и четвертого уравнения соответствуют планарные интерфейсные колебания цилиндрической оболочки. Они появляются в ре-

зультате использования уравнения соответствующей классической теории ортотропных цилиндрических оболочек.

Следовательно, при $\epsilon_m \rightarrow 0$ корни уравнения (22) являются приближенными значениями корней уравнения (15).

Численные исследования. В таблице 1 приведены некоторые $\eta_m^{(1)}$ корни уравнения $G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = 0$ и последних двух уравнений из (22) при $k = 3, 10827$ и $k = 0,310827$ соответственно. Отметим, что связь между $\eta_m^{(1)}$ и $\eta_m^{(2)}$ имеет вид

$$\eta_m^{(2)} = \frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(1)}} \frac{B_{66}^{(1)}}{B_{66}^{(2)}} \eta_m^{(1)}.$$

В таблице 2 приведены некоторые безразмерные характеристики собственных интерфейсных колебаний $\eta_m^{(1)}$ и характеристики затухания соответствующих форм $k\chi_0^{(1)} / m$ и $k\chi_0^{(2)} / m$, для составных бесконечных цилиндрических оболочек открытого профиля изготовленных из боропластика и бумаги, с механическими параметрами [24], [25]:

- боропластик:

$$\begin{aligned} \rho^{(1)} &= 2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \quad E_1^{(1)} = 2,646 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2; \\ E_2^{(1)} &= 1,323 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \quad G^{(1)} = 9,604 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2; \\ v_1^{(1)} &= 0,2; \quad v_2^{(1)} = 0,01; \end{aligned} \quad (23)$$

- бумага:

$$\begin{aligned} \rho^{(2)} &= 0,16 \text{ кг/м}^3; \quad E_1^{(2)} = 2,95281 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2; \\ E_2^{(2)} &= 2,2106 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2; \quad G^{(2)} = 9,77076 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2; \\ v_1^{(2)} &= v_2^{(2)} E_1^{(2)} / E_2^{(2)}; \quad v_2^{(2)} = 0,23, \end{aligned} \quad (24)$$

и геометрическими параметрами: $R = 20$, $s = 10,1072$, $k = 0,310827$, $r_0 = 0,32172$, $h = 1/50$, $b = 10$ (b — расстояние между граничными образующими). Результаты, представленные в таблице 3, соответствуют составной бесконечной цилиндрической оболочке открытого профиля, изготовленного из боропластика и бумаги, с механическими параметрами (23), (24) и геометрическими параметрами: $R = 2$, $s = 1,010772$, $k = 3,10827$, $r_0 = 0,32172$, $h = 1/50$, $b = 1$.

В качестве характеристики затухания приведены значения следующих величин

$$\begin{aligned} k\chi_0^{(1)} / m &= -\min\{k \operatorname{Re} \chi_1^{(1)} / m, k \operatorname{Re} \chi_2^{(1)} / m, \\ & \quad k \operatorname{Re} \chi_3^{(1)} / m, k \operatorname{Re} \chi_4^{(1)} / m\}; \\ k\chi_0^{(2)} / m &= \min\{k \operatorname{Re} \chi_1^{(2)} / m, k \operatorname{Re} \chi_2^{(2)} / m, \\ & \quad k \operatorname{Re} \chi_3^{(2)} / m, k \operatorname{Re} \chi_4^{(2)} / m\}. \end{aligned}$$

В таблицах 2, 3 после характеристик собственных частот указан тип интерфейсных колебаний: inb — преимущественно изгибный; ine — преимущественно планарный; $n^{(r)}$, $r = 1, 2$ — новый тип интерфейсных колебаний. В таблицах 2, 3 случай $\eta_1^{(r)} = \eta_2^{(r)} = \eta_3^{(r)} = \eta^{(r)}$ соответствует задаче (1)–(2), (4). Случай $\eta_1^{(r)} = \eta_2^{(r)} = 0, \eta_3^{(r)} = \eta^{(r)}$ соответствует за-

Таблица 1

Mm	$G(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}) = 0$ $k = 3,10827$	$G(\eta^{(1)}, \eta^{(2)}) = 0$ $k = 0,310827$	$K_3^{(1)}(\eta^{(1)}) = 0$ $k = 3,10827$	$K_3^{(1)}(\eta^{(1)}) = 0$ $k = 0,31082$	$K_3^{(2)}(\eta^{(1)}) = 0$ $k = 3,10827$	$K_3^{(2)}(\eta^{(1)}) = 0$ $k = 0,310827$
1	0,01960	0,00196	—	—	—	—
2	0,04216	0,00430	—	—	—	—
3	0,06325	0,00645	—	—	—	—
4	0,08433	0,00843	—	—	—	—
5	0,10541	0,01054	—	—	—	—
10	0,21082	0,02108	—	—	—	—
32	0,67464	0,06747	0,16530	—	—	—
44	0,92762	0,09276	0,69594	—	3,71441	—
50	1,05412	0,10541	0,77470	—	14,9026	—
92	1,93958	0,19396	0,93841	—	2,16831; 28,9998	—
316	6,66204	0,66620	0,99424	0,05114	18,2777; 34,5752	—
437	9,40250	0,94025	0,99664	0,69084	18,6444; 34,8388	1,19964

Таблица 2

m	$\eta_1^{(r)} = \eta_2^{(r)} = \eta_3^{(r)} = \eta^{(r)}$			$\eta_1^{(r)} = \eta_2^{(r)} = 0, \eta_3^{(r)} = \eta^{(r)}$			$\eta_1^{(r)} = \eta_2^{(r)} = \eta^{(r)}, \eta_3^{(r)} = 0$		
	$-k\chi^{(1)}/m$	$k\chi^{(2)}/m$	$\eta^{(1)}/m$	$-k\chi^{(1)}/m$	$k\chi^{(2)}/m$	$\eta^{(1)}/m$	$-k\chi^{(1)}/m$	$k\chi^{(2)}/m$	$\eta^{(1)}/m$
2	-0,0122	1,4820	0,04176 inb	-0,0077	1,4820	0,04189 inb	—	—	—
3	-0,0118	1,9074	0,06298 inb	-0,0024	1,9074	0,06307 inb	-0,0198	1,9071	0,82779 ine
4	-0,0082	2,1440	0,08413 inb	-0,0014	2,1440	0,08420 inb	-0,2169	2,1437	0,96609 ine
5	-0,0027	2,3913	0,12636 inb	-0,0008	2,2909	0,10531 inb	-0,1372	2,9707	0,97870 ine
10	-0,0001	2,6260	0,21075 inb	-0,0004	2,6261	0,21078 inb	-0,1162	2,6267	0,98339 ine
32	-0,5970	2,4971	0,16521 $n^{(1)}$	—	—	—	-0,5970	2,4971	0,16521 $n^{(1)}$
	iq	2,4969	0,67464 inb	-0,0003	2,4972	0,67466 inb	—	—	—
	iq	2,4954	0,98367 ine	—	—	—	-0,1150	2,4964	0,98367 ine
44	-0,4398	2,4962	0,69594 $n^{(1)}$	—	—	—	-0,4398	2,4962	0,69594 $n^{(1)}$
	iq	2,4959	0,93497 inb	-0,0003	2,4965	0,92767 inb	—	—	—
	iq	2,4959	0,98367 ine	—	—	—	-0,1150	2,4959	0,98367 ine
	iq	2,4878	3,70906 $n^{(2)}$	—	—	—	iq	2,4878	3,70906 $n^{(2)}$
92	-0,2176	2,4958	0,93851 $n^{(1)}$	—	—	—	-0,2178	2,4958	0,93842 $n^{(1)}$
	-0,1151	2,4957	0,98367 ine	—	—	—	-0,1150	2,4957	0,98367 ine
	iq	2,4963	1,93969 inb	-0,0003	2,4963	1,93969 inb	—	—	—
	iq	2,4933	2,16876 $n^{(2)}$	—	—	—	iq	2,4933	2,16876 $n^{(2)}$
	iq	2,50059	28,9997 $n^{(2)}$	—	—	—	iq	2,50059	28,9997 $n^{(2)}$

даче (1)–(2), (4), в которой отсутствует тангенциальный компонент силы инерции, т. е. имеем пре-

имущественно изгибный тип интерфейсных колебаний. Аналогично, случай $\eta_1^{(r)} = \eta_2^{(r)} = \eta^{(r)}, \eta_3^{(r)} = 0$

Таблица 3

m	$\eta_1^{(r)} = \eta_2^{(r)} = \eta_3^{(r)} = \eta^{(r)}$			$\eta_1^{(r)} = \eta_2^{(r)} = 0, \eta_3^{(r)} = \eta^{(r)}$			$\eta_1^{(r)} = \eta_2^{(r)} = \eta^{(r)}, \eta_3^{(r)} = 0$		
	$-k\chi^{(1)}/m$	$k\chi^{(2)}/m$	$\eta^{(1)}/m$	$-k\chi^{(1)}/m$	$k\chi^{(2)}/m$	$\eta^{(1)}/m$	$-k\chi^{(1)}/m$	$k\chi^{(2)}/m$	$\eta^{(1)}/m$
2	-0,0010	0,0457	0,00470 inb	-0,0047	0,0457	0,00418 inb	-	-	-
3	-0,0008	0,0711	0,00630 inb	-0,0028	0,0711	0,00630 inb	-0,0001	0,0711	0,11703 ine
4	-0,0007	0,0972	0,00841 inb	-0,0007	0,0972	0,00841 inb	-0,0003	0,0972	0,20611 ine
5	-0,0007	0,1215	0,01053 inb	-0,0007	0,1215	0,01053 inb	-0,0003	0,1215	0,31529 ine
10	-0,0001	0,1956	0,02108 inb	-0,0001	0,1956	0,02108 inb	-0,0041	0,1956	0,87038 ine
50	-0,0001	0,2516	0,10542 inb	-0,0001	0,2516	0,10542 inb	-	-	-
	-0,0115	0,2497	0,98366 ine	-	-	-	-0,0115	0,2496	0,98363 ine
316	-0,0604	0,2496	0,05114 n ⁽¹⁾	-	-	-	-0,0604	0,2496	0,05115 n ⁽¹⁾
	iq	0,2496	0,67603 inb	iq	0,2496	0,67877 inb	-	-	-
	-0,0115	0,2496	0,98367 ine	-	-	-	-0,0115	0,2496	0,98367 ine
437	-0,0442	0,2496	0,69084 n ⁽¹⁾	-	-	-	-0,0443	0,2496	0,69084 n ⁽¹⁾
	iq	0,2496	0,93868 inb	iq	0,2496	0,93868 inb	-	-	-
	-0,0115	0,2496	0,98367 ine	-	-	-	-0,0115	0,2496	0,98367 ine
	iq	0,2495	1,19950 n ⁽²⁾	-	-	-	iq	0,2496	1,19948 n ⁽²⁾

соответствует преимущественно планарному типу.

Таблицы 2 и 3 показывают, что первые частоты собственных интерфейсных колебаний, где присутствует нормальная компонента силы инерции, являются частотами интерфейсных колебаний преимущественно изгибного типа. Наряду с первыми частотами интерфейсных колебаний квазипоперечного типа существуют частоты незатухающих интерфейсных колебаний квазитангенциального типа. С увеличением m эти колебания становятся интерфейсными колебаниями типа Стоунли.

При $\epsilon_m \rightarrow 0$ собственные интерфейсные колебания задачи (1)–(2), (4) расчлняются на квазипоперечные и квазитангенциальные колебания и частоты этой задачи стремятся к частотам аналогичной задачи для составной пластинки полосы. С увеличением m интерфейсные колебания квазипоперечного типа становятся незатухающими, а безразмерные характеристики $\eta_m^{(r)}$ собственной частоты квазипоперечных интерфейсных колебаний стремятся к корню уравнения типа Стоунли $L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = 0$ (для материалов боропластика и бумаги $\eta_m^{(1)} \approx 0,98367$). В зависимости от $a^2 m^2$ появляются не более четырех новых типов интерфейсных колебаний, характерных только для составных цилиндрических оболочек, обусловленных продольными и крутильными компонентами силы инерции ([10], [14]).

При интерфейсных колебаниях преимущественно тангенциального типа ($\eta_1^{(r)} = \eta_2^{(r)} = \eta^{(r)}$,

$\eta_3^{(r)} = 0$), кроме планарных интерфейсных колебаний типа Стоунли могут появляться не более четырех новых типов интерфейсных колебаний, также обусловленных продольными и крутильными компонентами силы инерции.

Список литературы

1. Rayleigh, J.W. On waves propagated along the plate surface of an elastic solids / J.W. Rayleigh // Proc. London Math. Soc. — 1885. — No 17. — Pp. 4–11.
2. Викторов, И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах / И.А. Викторов. — М.: Наука, 1981. — 288 с.
3. Гринченко, В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. — К.: Наук. думка. — 1981. — 284 с.
4. Багдасарян, Р.А. Волны типа Рэлея в полубесконечной замкнутой цилиндрической оболочке / Р.А. Багдасарян, М.В. Белубекян, К.Б. Казарян // Волновые задачи механики. — Нижний Новгород. — 1992. — С. 118–124.
5. Гулгазарян, Г.Р. Колебания, локализованные у свободного края полубесконечной незамкнутой безмоментной цилиндрической оболочки / Г.Р. Гулгазарян, Л.Г. Гулгазарян // Акуст. вісник АН України. — 1999. — Т. 2, № 4. — С. 42–48.
6. Гулгазарян, Г.Р. Волны типа Рэлея в полубесконечной гофрированной цилиндрической оболочке / Г.Р. Гулгазарян, Л.Г. Гулгазарян // Изв. РАН, Механика твердого тела. — 2001. № 3. — С. 151–158.
7. Gulgazaryan, G.R. Vibrations of a corrugated orthotropic cylindrical shells with free edges / G.R. Gulgazaryan, L.G. Gulgazaryan // Int. Appl. Mechanics. — 2006. — 42(12). — Pp. 1398–1413.
8. Гулгазарян, Г.Р. Колебания безмоментной консольной незамкнутой ортотропной цилиндрической оболочки переменной кривизны / Г.Р. Гулгазарян // Изв. РАН, Механика твердого тела. — 2007. — № 1. — С. 84–99.
9. Kaplunov, J.D. Free localized vibrations of a semi-infinite cylindrical shell / J.D. Kaplunov, L. Yu Kossovich, M.V. Wilde // Journal of the Acoustical Society of America. — 2000. — 107(3). — Pp. 1383–1393.

10. Gulgazaryan, G.R. Vibrations of semi-infinite orthotropic cylindrical shells of open profile / G.R. Gulgazaryan // Int. Appl. Mechanics. — 2004. — 40(2). — Pp. 199–212.
11. Гулгазарян, Г.Р. О локализованных собственных колебаниях у свободного торца полубесконечной замкнутой круговой цилиндрической оболочки / Г.Р. Гулгазарян // Изв. РАН, Механика твердого тела. — 2003. — № 1. — С. 180–192.
12. Гулгазарян, Г.Р. О колебаниях тонкой упругой ортотропной цилиндрической оболочки со свободными краями / Г.Р. Гулгазарян, Л.Г. Гулгазарян // Проблемы прочности и пластичности. — Нижний Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 2006. — Вып. 68. — С. 150–160.
13. Gulgazaryan, G.R. Natural vibrations of a cantilever thin elastic orthotropic cylindrical shell / G.R. Gulgazaryan // Int. Appl. Mechanics. — 2008. — 44(5). — Pp. 539–554.
14. Gulgazaryan, G.R. The vibrations thin elastic orthotropic circular cylindrical shell with free and hinged edges / G.R. Gulgazaryan, L.G. Gulgazaryan, R.D. Saakyan // J. Al. Math. Mech. — 2008. — 72(3). — Pp. 1398–1413.
15. Gulgazaryan, G.R. Localized vibrations of a thin-walled structure consisted of orthotropic elastic non-closed cylindrical shells with free and rigid-clamped edge generators / G.R. Gulgazaryan, R.G. Gulgazaryan, Dg.L. Srapionyan // ZAMM. — 2013. — 93(4). — Pp. 269–283.
16. Зильбергейт, А.С. Контактные волны изгиба в тонких пластинках / А.С. Зильбергейт, И.Б. Сулова // Акуст. журнал. — 1985. — Т. 29, № 2. — С. 186–191.
17. Гертман, И.П. Отражение и прохождение звуковых волн через границу раздела двух состыкованных упругих полуплоскостей / И.П. Гертман, О.Н. Лисицкий // Прикл. математика и механика. — 1988. — Т. 52, № 6. — С. 1044–1048.
18. Stoneley, R. The elastic waves at the interface of two solids / R. Stoneley // Proc. Roy Soc. London A. — 1924. — 106. — Pp. 416–429.
19. Гулгазарян, Г.Р. Свободные интерфейсные колебания бесконечной безмоментной цилиндрической оболочки с произвольной направляющей / Гулгазарян Г.Р. [и др.] // Вестн. ФФИ. — 2012. — № 1. — С. 59–80.
20. Гулгазарян, Г.Р. Свободные интерфейсные колебания безмоментной цилиндрической оболочки переменной кривизны с жестко защемленными торцами / Г.Р. Гулгазарян, И.А. Миклашевич // Уч. записки АГПУ им. Х. Абовяна. — 2012. — 2(17). — С. 57–87.
21. Гулгазарян, Г.Р. Свободные интерфейсные и краевые колебания консольной составной безмоментной цилиндрической оболочки переменной кривизны / Г.Р. Гулгазарян, Л.Г. Гулгазарян, И.А. Миклашевич // Изв. НАН Армении механика. — 2013. — Т. 66, № 1. — С. 48–66.
22. Kaplunov, J.D. Free interfacial vibrations in cylindrical shells / J.D. Kaplunov, M.V. Wilde // J. Acoust. Soc. Am. June. — 2002. — Vol. 111(6). — Pp. 2692–2704.
23. Kaplunov, J.D. Edge and interfacial vibrations in elastic shells of revolution / J.D. Kaplunov, M.V. Wilde // ZAMP. — 2000. — Vol. 51. — Pp. 530–549.
24. Амбарцумян, С.А. Теория анизотропных оболочек / С.А. Амбарцумян. — М.: Гос. изд.-во физ.-мат. лит, 1961. — 384 с.
25. Гулгазарян, Г.Р. Плотность частот свободных колебаний тонкой анизотропной оболочки, составленной из анизотропных слоев / Г.Р. Гулгазарян, В.Б. Лидский // Изв. АН СССР, Механика твердого тела. — 1982. — No 3. — С. 171–174.

Ghulghazaryan G.R., Ghulghazaryan R.G.

About free interfacial vibrations of thin elastic circular cylindrical shells

Free interfacial vibrations of closed and non-closed infinite cylindrical shells composed of two semi-infinite orthotropic thin cylindrical shells with different elastic properties are studied. Using the system of equations of the related classical theory of orthotropic cylindrical shells, dispersion equations and asymptotic formulas for obtaining eigenfrequencies of possible interfacial vibrations of composed cylindrical shells are derived. An algorithm for separating possible interfacial vibrations is presented. An asymptotic link is established between the dispersion equations of problems in hand and analogous problems for infinite composed plate and plate-strip, respectively. By examples of shells with different radiuses approximate values of dimensionless characteristics of eigenfrequencies and attenuating characteristics of the related vibration forms are given.

Keywords: *interfacial vibrations, eigenfrequencies, dispersion equations, cylindrical shells*

Поступила в редакцию 15.10.2013.