УДК 539.3

Л.Г. ГУЛГАЗАРЯН, канд. физ.-мат. наук
Армянский государственный педагогический университет им Х. Абовяна, г. Ереван

О ХАРАКТЕРЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ НАЛИЧИИ ВЯЗКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

На основе уравнений пространственной задачи теории упругости получены асимптотические решения неклассических краевых задач о собственных колебаниях ортотропных оболочек при наличии вязкого внутреннего сопротивления, когда на верхней лицевой поверхности оболочки заданы два варианта пространственных граничных условий, а на нижней лицевой поверхности задан вектор перемещения. Выведены характеристические уравнения для определения собственных частот колебаний. Определены функции типа пограничного слоя, установлены характеристические уравнения для определения скорости затухания пограничных колебаний при удалении от боковой поверхности во внутрь оболочки.

Ключевые слова: *асимптотический метод, частоты колебаний, вязкое сопротивление, погранслой*

Среди различных причин затухания колебаний механических систем одной из важнейших является рассеяние энергии внутри самой колебательной системы, в частности вязкое трение, которое обычно принимается пропорциональным скорости перемещения точек [1]. Для определения и анализа напряженно-деформированных состояний тонких тел (балки, стрежни, пластины, оболочки) в последние десятилетия широко используется асимптотический метод решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений [2, 3]. Поскольку один из геометрических размеров оболочки резко отличается от остальных, при переходе к безразмерным координатам в уравнениях и соотношениях трехмерной задачи появляется малый геометрический параметр и преобразованные уравнения являются сингулярно возмущенными относительно этого параметра [3, 4, 9, 10].

На основе уравнений пространственной задачи теории упругости получены асимптотические решения неклассических краевых задач о собственных колебаниях ортотропных оболочек при наличии вязкого внутреннего сопротивления, при различных граничных условиях на лицевых поверхностях.

Основные уравнения и постановка краевых задач. Рассмотрим собственные колебания ортотропной оболочки толщины $2h$: $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma;\ \alpha, \beta \in \Omega_0, -h \le \gamma \le h\}$, где Ω_0 — срединная поверхность; α, β — линии кривизны срединной поверхности оболочки; γ — прямолинейная ось, направленная перпендикулярно к срединной поверхности. Требуется найти ненулевые решения динамических уравнений теории упругости в выбранной триортогональной системе координат при серии граничных условий на лицевых поверхностях $\gamma = \pm h$. Для упрощения выкладок будем пользоваться компонентами несимметричного тензора напряжений τ_{ij} [2, 3].

Имеем:

- уравнения движения

$$\begin{gathered}
\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(B\tau_{\alpha\alpha}\right)-k_\beta\tau_{\beta\beta}+\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(A\tau_{\beta\alpha}\right)+ \\
+k_\alpha\tau_{\alpha\beta}+\left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)\frac{\partial\tau_{\alpha\gamma}}{\partial\gamma}+\frac{2\tau_{\alpha\gamma}}{R_1}- \\
-k_1\left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\frac{\partial U}{\partial t}= \\
=\rho\left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \\
(A,B;\alpha,\beta;R_1,R_2;U,V); \\
\frac{\partial\tau_{\gamma\gamma}}{\partial\gamma}-\left(\frac{\tau_{\alpha\alpha}}{R_1}+\frac{\tau_{\beta\beta}}{R_2}\right)+\frac{1}{A}\frac{\partial\tau_{\alpha\gamma}}{\partial\alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial\tau_{\beta\gamma}}{\partial\beta}+ \\
+k_\beta\tau_{\alpha\gamma}+k_\alpha\tau_{\beta\gamma}-k_1\left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\frac{\partial W}{\partial t}= \\
=\rho\left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}; \\
\left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)\tau_{\alpha\beta}=\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\tau_{\beta\alpha}\ \text{(условие симметрии)};
\end{gathered}\tag{1}$$

- уравнения состояния (соотношения упругости)

$$\begin{gathered}
\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\left(\frac{1}{A}\frac{\partial U}{\partial\alpha}+k_\alpha V+\frac{W}{R_1}\right)= \\
=\left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)a_{11}\tau_{\alpha\alpha}+\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)a_{12}\tau_{\beta\beta}+a_{13}\tau_{\gamma\gamma} \\
(A,B;\ \alpha\leftrightarrow\beta;\ R_1\leftrightarrow R_2;\ U\leftrightarrow V;\ a_{11},a_{22};a_{13},a_{23}); \\
\left[1+\gamma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+\frac{\gamma^2}{R_1R_2}\right]\frac{\partial W}{\partial\gamma}= \\
=\left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)a_{13}\tau_{\alpha\alpha}+\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)a_{23}\tau_{\beta\beta}+a_{33}\tau_{\gamma\gamma}; \\
\left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)\left(\frac{1}{B}\frac{\partial U}{\partial\beta}-k_\beta V\right)+ \\
+\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\left(\frac{1}{A}\frac{\partial V}{\partial\alpha}-k_\alpha U\right)=\left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)a_{66}\tau_{\alpha\beta};
\end{gathered}\tag{2}$$

$$\left[1+\gamma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+\frac{\gamma^2}{R_1R_2}\right]\frac{\partial U}{\partial\gamma}-$$
$$-\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\frac{U}{R_1}+\frac{1}{A}\left(1+\frac{\gamma}{R_2}\right)\frac{\partial W}{\partial\alpha}=\left(1+\frac{\gamma}{R_1}\right)a_{55}\tau_{\alpha\gamma}$$
$$(A,B;\ \alpha,\beta;\ R_1\leftrightarrow R_2;\ U,V;\ a_{55},a_{44}),$$

где k_α, k_β — геодезические кривизны; A, B — коэффициенты первой квадратичной формы; R_1, R_2 — главные радиусы кривизны срединной поверхности; ρ — плотность; a_{ij} — постоянные упругости; k_1 — коэффициент вязкого сопротивления (считается, что сопротивление пропорционально скорости точек).

На лицевой поверхности $\gamma = h$ задана одна из следующих групп условий

$$\tau_{\alpha\gamma}(h)=0,\ \tau_{\beta\gamma}(h)=0,\ \tau_{\gamma\gamma}(h)=0; \quad (3)$$

$$U(h)=0,\quad V(h)=0,\quad W(h)=0, \quad (4)$$

а на поверхности $\gamma = -h$ условия

$$U(-h)=0,\ V(-h)=0,\ W(-h)=0. \quad (5)$$

Условия на боковой поверхности пока не будем конкретизировать. Они влияют на значения амплитуд колебаний в зоне погранслоя.

Решение внутренней задачи. В уравнениях (1), (2) перейдем к безразмерным координатам и перемещениям по формулам $\alpha = R\xi$, $\beta = R\eta$, $\gamma = \varepsilon R\zeta = h\zeta$, $U = Ru$, $V = R\mathrm{v}$, $W = Rw$, где R — характерный размер оболочки; $\varepsilon = h/R$ — малый параметр. Решение преобразованных уравнений будем искать в виде:

$$Q_{\alpha\beta}=Q_{jk}(\xi,\eta,\zeta)e^{\omega t}\ (\alpha,\beta,\gamma);\ \ j,k=1,2,3, \quad (6)$$

где $Q_{\alpha\beta}$ — любая из величин напряжений и перемещений; ω — частота собственных колебаний. В результате получим сингулярно возмущенную малым параметром ε систему относительно Q_{jk} решение которой складывается из решений внутренней (interior) задачи и пограничных (boundary) слоев [2, 3]: $I = Q^{\text{int}} + R_b$, где Q^{int} — решение внутренней задачи; R_b — решение пограничного слоя. Основная трудность в любой физической задаче для тонких тел связана с правильным определением соответствующей асимптотики. Установление правильной асимптотики является самым ответственным моментом при асимптотическом подходе. Для пластин и оболочек эта асимптотика чутко реагирует на тип граничных условий на лицевых поверхностях.

Решение внутренней задачи будем искать в виде асимптотического представления [2–4]

$$\begin{gathered}\tau_{jk}(\xi,\eta,\zeta)=\varepsilon^{-1+s}\tau_{jk}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta),\quad j,k=1,2,3;\\ s=\overline{0,N},\ \omega_*=\varepsilon^s(\omega_{*s});\ \big(u(\xi,\eta,\zeta),\mathrm{v}(\xi,\eta,\zeta),w(\xi,\eta,\zeta)\big)=\\ =\varepsilon^s\big(u^{(s)}(\xi,\eta,\zeta),\mathrm{v}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta),w^{(s)}(\xi,\eta,\zeta)\big),\end{gathered} \quad (7)$$

$s=\overline{0,N}$ означает, что по немому (повторяющемуся) индексу s происходит суммирование в пределах целочисленных 0, N. Решение задачи должно удовлетворять условиям (3), (5) или (4), (5). Зная вышеуказанную структуру общего решения, для определения величин $\tau_{mk}^{(s)}, u^{(s)}$, (u,v,w) внутренней задачи из условий (3)–(5) соответственно будут следовать следующие граничные условия:

$$\tau_{13}^{(s)}(\zeta=1)=-\bar\tau_{13b}^{(s)}(\zeta=1)\quad(13,23,33), \quad (8)$$

или

$$u^{(s)}(\zeta=1)=-\bar u_b^{(s)}(\zeta=1)\quad(u,\mathrm{v},w), \quad (9)$$

и условия при $\zeta = -1$

$$u^{(s)}(\zeta=-1)=-\bar u_b^{(s)}(\zeta=-1)\quad(u,\mathrm{v},w), \quad (10)$$

где $\bar u_b^{(0)}=0$; $\bar\tau_{m3b}^{(0)}=0$; $m = 1, 2, 3$. О величинах $\bar\tau_{m3b}^{(s)}$, $\bar u_b^{(s)}$ $(u,\ \mathrm{v},\ w)$, $s \neq 0$ будет сказано после построения решения пограничного слоя. Они являются известными функциями.

Из асимптотики (7) следует, что в отличие от классической теории, для данного класса задач все компоненты тензора напряжений асимптотически равноправны, равноправны (имеют одинаковый порядок) также перемещения, и допущения классической теории пластин и оболочек здесь не применимы. Подставив асимптотическое представление (7) и применив правило Коши умножения рядов, для определения неизвестных коэффициентов разложения $Q_{jk}^{(s)}$ получается непротиворечивая система, которую можно записать в виде

$$\begin{gathered}\tau_{12}^{(s)}=P_{1\tau}^{(s-1)};\ \tau_{21}^{(s)}=P_{1\tau}^{(s-1)}-r_2\zeta\tau_{21}^{(s-1)}+r_1\zeta\tau_{12}^{(s-1)};\\ a_{11}\tau_{11}^{(s)}+a_{12}\tau_{22}^{(s)}+a_{13}\tau_{33}^{(s)}=P_{2\tau}^{(s-1)};\\ a_{12}\tau_{11}^{(s)}+a_{22}\tau_{22}^{(s)}+a_{23}\tau_{33}^{(s)}=P_{3\tau}^{(s-1)};\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial\tau_{13}^{(s)}}{\partial\zeta}-2K\omega_{*m}u^{(s-m)}-c^{(m)}u^{(s-m)}=P_{6\tau}^{(s-1)}\\ (13,23,33;u,\mathrm{v},w;6\tau,5\tau,4\tau),\ m=\overline{0,s};\end{gathered} \quad (11)$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial w^{(s)}}{\partial\zeta}-a_{13}\tau_{11}^{(s)}-a_{23}\tau_{22}^{(s)}-a_{33}\tau_{33}^{(s)}=P_w^{(s-1)};\\ \frac{\partial u^{(s)}}{\partial\zeta}-a_{55}\tau_{13}^{(s)}=P_u^{(s-1)}\ (55,44;u,\mathrm{v};13,23),\end{gathered}$$

где

$$2K=k_1h/\sqrt{\rho};\quad c^{(j)}=\sum_{n=0}^{j}\omega_{*(j-n)}\omega_{*(n)};$$
$$r_1=\frac{R}{R_1};\ r_2=\frac{R}{R_2};\ \omega_*^2=\rho h^2\omega^2;$$
$$P_w^{(s-1)}=-\zeta(r_1+r_2)\frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial\zeta}-$$
$$-\zeta^2r_1r_2\frac{\partial w^{(s-2)}}{\partial\zeta}+r_1\zeta a_{13}\tau_{11}^{(s-1)}+r_2\zeta a_{23}\tau_{22}^{(s-1)};$$

$$P_{1\tau}^{(s-1)} = \frac{1}{a_{66}}\left[\frac{1}{B}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial \eta} - k_\beta R \mathrm{v}^{(s-1)} + \right.$$
$$+ r_1\zeta\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u^{(s-2)}}{\partial \eta} - k_\beta R\mathrm{v}^{(s-2)}\right) + \frac{1}{A}\frac{\partial \mathrm{v}^{(s-1)}}{\partial \xi} - k_\alpha R u^{(s-1)} +$$
$$\left. + r_2\zeta\left(\frac{1}{A}\frac{\partial \mathrm{v}^{(s-2)}}{\partial \xi} - k_\alpha R u^{(s-2)}\right) - r_1\zeta\, a_{66}\tau_{12}^{(s-1)}\right];$$
$$P_{2\tau}^{(s-1)} = \frac{1}{A}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial \xi} + k_\alpha R \mathrm{v}^{(s-1)} + r_1 w^{(s-1)} - r_1\zeta\, a_{11}\tau_{11}^{(s-1)} +$$
$$+ r_2\zeta\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u^{(s-2)}}{\partial \xi} + k_\alpha R\mathrm{v}^{(s-2)} + r_1 w^{(s-2)}\right) - r_2\zeta\, a_{12}\tau_{22}^{(s-1)}$$
$$(2\tau, 3\tau; A, B; \alpha, \beta; u, \mathrm{v}; r_1 \leftrightarrow r_2; \xi, \eta; 11, 22);$$

$$P_{4\tau}^{(s-1)} = r_1\tau_{11}^{(s-1)} + r_2\tau_{22}^{(s-1)} - \frac{1}{A}\frac{\partial \tau_{13}^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{B}\frac{\partial \tau_{23}^{(s-1)}}{\partial \eta} -$$
$$- k_\beta R\tau_{13}^{(s-1)} - k_\alpha R\tau_{23}^{(s-1)} - (r_1 + r_2)\zeta\, 2K\omega_{*n} w^{(s-1-n)} +$$
$$+ r_1 r_2\zeta^2 2K\omega_{*q} w^{(s-2-q)} + (r_1 + r_2)\zeta\, c^{(n)} w^{(s-1-n)} +$$
$$+ r_1 r_2 \zeta^2 c^{(q)} w^{(s-2-q)};$$

$$P_{6\tau}^{(s-1)} = -\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(B\tau_{11}^{(s-1)}\right) + k_\beta R\tau_{22}^{(s-1)} -$$
$$- \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(A\tau_{21}^{(s-1)}\right) - k_\alpha R\tau_{12}^{(s-1)} - r_1\zeta\frac{\partial \tau_{13}^{(s-1)}}{\partial \zeta} -$$
$$- 2r_1\tau_{13}^{(s-1)} + (r_1 + r_2)\zeta\, 2K\omega_{*n} u^{(s-1-n)} +$$
$$+ r_1 r_2\zeta^2 2K\omega_{*q} u^{(s-2-q)} + (r_1 + r_2)\zeta\, c^{(n)} u^{(s-1-n)} +$$
$$+ r_1 r_2\zeta^2 c^{(q)} u^{(s-2-q)} \quad (6\tau, 5\tau;\ A \leftrightarrow B;\ \alpha \leftrightarrow \beta;$$
$$r_1, r_2;\ \xi \leftrightarrow \eta;\ u, \mathrm{v};\ \tau_{11} \leftrightarrow \tau_{22};\ \tau_{12} \leftrightarrow \tau_{21};\ \tau_{13}, \tau_{23});$$

$$P_u^{(s-1)} = -\zeta(r_1 + r_2)\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial \zeta} - \zeta^2 r_1 r_2\frac{\partial u^{(s-2)}}{\partial \zeta} +$$
$$+ r_1 u^{(s-1)} + \zeta\, r_1 r_2 u^{(s-2)} - \frac{1}{A}\frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{r_2\zeta}{A}\frac{\partial w^{(s-2)}}{\partial \xi} +$$
$$+ r_1\zeta\, a_{55}\tau_{13}^{(s-1)},\ (A, B; u, \mathrm{v}; r_1 \leftrightarrow r_2; \xi, \eta; 55, 44; 13, 23),$$
$$m = \overline{0, s},\ n = \overline{0, s-1},\ q = \overline{0, s-2}.$$

Укажем, что лишь при асимптотике (7) можно получить непротиворечивую систему относительно $Q_{jk}^{(s)}$. Используя соотношения (11), компоненты тензора напряжений можно выразить через $u^{(s)}$, $\mathrm{v}^{(s)}$, $w^{(s)}$:

$$\tau_{21}^{(s)} = P_{1\tau}^{(s-1)} - r_2\zeta\tau_{21}^{(s-1)} + r_1\zeta\tau_{12}^{(s-1)};$$
$$\tau_{12}^{(s)} = P_{1\tau}^{(s-1)}, \tau_{13}^{(s)} = \frac{1}{a_{55}}\left[\frac{\partial u^{(s)}}{\partial \zeta} - P_u^{(s-1)}\right], \qquad (12)$$
$$(13, 23; u, \mathrm{v}; 55, 44);$$
$$\tau_{33}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\left[\Delta_{12}\frac{\partial w^{(s)}}{\partial \zeta} + \Delta_2 P_{2\tau}^{(s-1)} + \Delta_3 P_{3\tau}^{(s-1)} - \Delta_{12} P_w^{(s-1)}\right]$$
$$(33, 22, 11; \Delta_{12}, \Delta_3, \Delta_2; \Delta_2, \Delta_1, \Delta_{23}; \Delta_3, \Delta_{13}, \Delta_1);$$

$$\Delta_1 = a_{13}a_{23} - a_{33}a_{12};\ \Delta_2 = a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13};$$
$$\Delta_3 = a_{13}a_{12} - a_{11}a_{23};\ \Delta_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2;$$
$$\Delta_{13} = a_{11}a_{33} - a_{13}^2;\ \Delta_{23} = a_{22}a_{33} - a_{23}^2;$$
$$\Delta = a_{11}\Delta_{23} + a_{13}\Delta_2 + a_{12}\Delta_1,$$

а для определения компонент вектора перемещения получим уравнения:

$$\frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial \zeta^2} - a_{55}(2K\omega_{*m} + c^{(m)})u^{(s-m)} =$$
$$= a_{55}P_{6\tau}^{(s-1)} + \frac{\partial P_u^{(s-1)}}{\partial \zeta}\ (u, \mathrm{v}; a_{55}, a_{44}; 6\tau, 5\tau);$$

$$\frac{\partial^2 w^{(s)}}{\partial \zeta^2} - \frac{\Delta}{\Delta_{12}}(2K\omega_{*m} + c^{(m)})w^{(s-m)} = F_w^{(s-1)}; \qquad (13)$$

$$F_w^{(s-1)} = \frac{1}{\Delta_{12}}\left[\Delta P_{4\tau}^{(s-1)} - \Delta_2\frac{\partial P_{2\tau}^{(s-1)}}{\partial \zeta} - \Delta_3\frac{\partial P_{3\tau}^{(s-1)}}{\partial \zeta} + \Delta_{12}\frac{\partial P_w^{(s-1)}}{\partial \zeta}\right].$$

При $s = 0$ система (13) превращается в систему из независимых уравнений:

$$\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial \zeta^2} - a_{55}(\omega_{*0}^2 + 2K\omega_{*0})u^{(0)} = 0$$
$$(u, \mathrm{v}, w;\ a_{55}, a_{44}, \Delta/\Delta_{12}), \qquad (14)$$

решениями которых являются:

$$u^{(0)}(\xi, \eta, \zeta) = C_1^{(u,0)}(\xi, \eta)\exp(\sqrt{a_{55}(\omega_{*0}^2 + 2K\omega_{*0})}\zeta) +$$
$$+ C_2^{(u,0)}(\xi, \eta)\exp(-\sqrt{a_{55}(\omega_{*0}^2 + 2K\omega_{*0})}\zeta) \qquad (15)$$
$$(u, \mathrm{v}, w; 1, 3, 5; 2, 4, 6; a_{55}, a_{44}, \Delta/\Delta_{12}).$$

Подставив (15) в (12) и удовлетворив граничным условиям (8), (10) и (9), (10), получим три независимые однородные алгебраические системы относительно неизвестных $C_i^{(0)}$. Из условия существования ненулевых решений этих систем вытекают следующие уравнения частот и соответствующие им значения частот:
- при граничных условиях (8), (10)

$$\omega_{*0n} = -K \pm \sqrt{K^2 - \frac{\pi^2}{16a_{55}}(2n+1)^2}\ (a_{55}, a_{44}, \Delta/\Delta_{12});$$

- при граничных условиях (9), (10)

$$\omega_{*0n} = -K \pm \sqrt{K^2 - \pi^2 n^2/(4a_{55})}\ (a_{55}, a_{44}, \Delta/\Delta_{12}).$$

1. Если $K > \pi(2n+1)/(4\sqrt{a_{55}})$ (a_{55}, a_{44}, Δ/Δ_{12}) при условиях (8), (10), и $K > \pi n/(2\sqrt{a_{55}})$ (a_{55}, a_{44}, Δ/Δ_{12}) при условиях (9), (10), то собственные колебания затухают без явного колебания, как $\exp(-\frac{K}{h\sqrt{\rho}}\theta t)$, $0 < \theta < 2$ ($\theta \neq 1$).

2. Если $K < \frac{\pi}{4\sqrt{a_{55}}}(2n+1)$ (a_{55}, a_{44}, Δ/Δ_{12}) при условиях (8), (10) будем иметь

$$\omega^I_{*0n} = K\left(-1 \pm i\sqrt{\left(\pi(2n+1)/(4\sqrt{a_{55}}K)\right)^2 - 1}\right) \qquad (16)$$
$$(a_{55}, a_{44}, \Delta/\Delta_{12};\ I, II, III),$$

и $K < \dfrac{\pi n}{2\sqrt{a_{55}}}$ $(a_{55},\ a_{44},\ \Delta/\Delta_{12})$ при условиях (9), (10):

$$\omega^I_{*0n} = K\left(-1 \pm i\sqrt{\left(\pi n/(2\sqrt{a_{55}}K)\right)^2 - 1}\right) \qquad (17)$$
$$(a_{55}, a_{44}, \Delta/\Delta_{12}, I, II, III).$$

При этом затухание будет колебательным. Таким образом в оболочке возникают три типа колебаний: два сдвиговых (I, II) и продольное (III). Так как a_{55}^{-1} является достаточно большим числом, поэтому на практике второй вариант встречается чаще, чем первый. Рассмотрим второй случай более подробно при $\omega_* = \omega^I_{*0n}$.

При граничных условиях (8), (10), с учетом (12) собственными функциями являются $u_n^{(0,I)} = iA^{(0)}_{un}(\xi,\eta)\sin(1+\zeta)\dfrac{\pi(2n+1)}{4}$, а при условиях (9), (10): $u_n^{(0,I)} = i\ {}^{(0)}_{un}(\xi,\eta)\sin(1+\zeta)\dfrac{\pi n}{2}$.

При $\omega_* = \omega^I_{*0n}$ значения собственных функций $v_n^{(0,I)} = w_n^{(0,I)} = 0$, так как определители соответствующих систем однородных уравнений будут отличны от нуля.

Аналогичным образом рассматриваются также случаи $\omega_* = \omega^{II}_{*0n}$ и $\omega_* = \omega^{III}_{*0n}$ собственных частот колебаний. Заметим, что полученные значения главных частот собственных колебаний совпадают со значениями частот сдвиговых и продольных колебаний ортотропных пластин при аналогичных граничных условиях [5].

О вкладе приближений $s \geq 1$. Решение при $s \geq 1$ будет зависеть от того, какое из значений частот $\omega^I_{*0n}, \omega^{II}_{*0n}, \omega^{III}_{*0n}$ взять за основу вычислений, в частности, при решении уравнений (13). Необходимо рассмотреть все три случая. При $s \geq 1$ уравнения (13) становятся неоднородными. Рассмотрим приближение $s = 1$. Если $\omega_{*0} = \omega^I_{*0n}$, то из (12), (14) и граничных условий (8)–(10) относительно $\tau_{\beta\gamma}, \tau_{\gamma\gamma}$, v, w следуют

$$v_n^{(0,I)} = 0,\ w_n^{(0,I)} = 0;\ \tau_{23}^{(0,I)} = 0;\ \tau_{33}^{(0,I)} = 0;$$
$$\tau_{12}^{(0,I)} = 0;\ \tau_{21}^{(0,I)} = 0;\ \tau_{11}^{(0,I)} = 0;\ \tau_{22}^{(0,I)} = 0, \qquad (18)$$

так как после удовлетворения указанных граничных условий, полученные алгебраические системы однородных уравнений будут иметь отличные от нуля определители, в силу того, что $\omega_{*0} = \omega^I_{*0n}$ не удовлетворяет решениям уравнений (14) для v, w.

Система (13) преобразуется в систему уравнений:

$$\frac{\partial^2 u_n^{(1,I)}}{\partial\zeta^2} - a_{55}(2K\omega^I_{*0n} + (\omega^I_{*0n})^2)u_n^{(1,I)} -$$
$$-2a_{55}(K\omega^I_{*1n} + \omega^I_{*0n}\omega^I_{*1n})u_n^{(0,I)} = F_u^{(0,I)}; \qquad (19)$$

$$\frac{\partial^2 v_n^{(1,I)}}{\partial\zeta^2} - a_{44}(2K\omega^I_{*0n} + (\omega^I_{*0n})^2)v_n^{(1,I)} = 0; \qquad (20)$$

$$\frac{\partial^2 w_n^{(1,I)}}{\partial\zeta^2} - \frac{\Delta}{\Delta_{12}}(2K\omega^I_{*0n} + (\omega^I_{*0n})^2)w_n^{(1,I)} = F_w^{(0,I)}; \qquad (21)$$

$$F_u^{(0,I)} = -(r_1 + r_2)\frac{\partial u_n^{(0,I)}}{\partial\zeta};$$

$$F_w^{(0,I)} = \frac{1}{\Delta_{12}}\left[\Delta P_{4\tau}^{(0,I)} - \Delta_2\frac{\partial P_{2\tau}^{(0,I)}}{\partial\zeta} - \Delta_3\frac{\partial P_{3\tau}^{(0,I)}}{\partial\zeta} + \Delta_{12}\frac{\partial P_w^{(0,I)}}{\partial\zeta}\right].$$

Из уравнения (20), соотношений (12) и граничных условий (8)–(10) следует $v_n^{(1,I)} = 0, \tau_{23}^{(1,I)} = 0$.

Решением уравнения (21) является

$$w_n^{(1,I)} = C_{5n}^{(1,I)}\exp(\gamma_n\zeta) + C_{6n}^{(1,I)}\exp(-\gamma_n\zeta) + w_0^{(1,I)};$$
$$\gamma_n = \sqrt{\Delta/\Delta_{12}(2K\omega^I_{*0n} + (\omega^I_{*0n})^2)},$$

где $w_0^{(1,I)}$ — частное решение уравнения (21). Удовлетворив граничным условиям (8), (10) и (9), (10) и учитывая, что определители полученных систем отличны от нуля, однозначно определятся неизвестные коэффициенты $C_{5n}^{(1,I)}$ и $C_{6n}^{(1,I)}$. Подставляя значения $u_n^{(0,I)}$ и $w_n^{(1,I)}$ в соотношения (12), определяются $\tau_{33}^{(1,I)}, \tau_{22}^{(1,I)}, \tau_{11}^{(1,I)}, \tau_{12}^{(1,I)}, \tau_{21}^{(1,I)}$.

Решение уравнения (19) можно отыскать в виде разложения по некоторой ортогональной системе функций [9, 10]. В качестве таковой можно взять собственные функции $\{u_n^{(0,I)}(\zeta)\}$, которые ортогональны на отрезке [–1, 1].

При граничных условиях (8), (10) функции $u_n^{(1,I)}$ будем искать в виде:

$$u_n^{(1,I)}(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} b_{nm}(\xi,\eta)u_m^{(0,I)}(\zeta) -$$
$$-\bar{\tau}_{13b}^{(1)}(\zeta = 1)(1+\zeta) - \frac{1}{4}\bar{u}_b^{(1)}(\zeta = -1)(1-\zeta)^2. \qquad (22)$$

Тогда граничные условия будут удовлетворены тождественно.

А при граничных условиях (9), (10) функции $u_n^{(1,I)}$ будем искать в виде:

$$u_n^{(1,I)}(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} b_{nm}(\xi,\eta)u_m^{(0,I)}(\zeta) -$$
$$-\frac{1}{2}\bar{u}_b^{(1)}(\zeta = 1)(1+\zeta) - \frac{1}{2}\bar{u}_b^{(1)}(\zeta = -1)(1-\zeta). \qquad (23)$$

Подставив (22) в (19), получим

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_{nm}a_{55}(2K(\omega^I_{*0m} - \omega^I_{*0n}) + (\omega^I_{*0m})^2 - (\omega^I_{*0n})^2)u_m^{(0,I)} =$$
$$= 2a_{55}(2K\omega^I_{*1n} + \omega^I_{*0n}\omega^I_{*1n})u_n^{(0,I)} + F_u^{(0,I)} =$$
$$= a_{55}(2K\omega^I_{*0n} + (\omega^I_{*0n})^2)(-\bar{\tau}_{13b}^{(1)}(\zeta = 1)(1+\zeta) - \qquad (24)$$
$$-\frac{1}{4}\bar{u}_b^{(1)}(\zeta = -1)(1-\zeta)^2) + \frac{1}{2}\bar{u}_b^{(1)}(\zeta = -1).$$

Умножив (24) на $u_k^{(0,I)}(\zeta)$, проинтегрировав в пределах $-1 \leq \zeta \leq 1$, получим:

- если $k \neq n$, однозначно определяются b_{nk}:

$$b_{nk} = \int_{-1}^{1} \frac{(F_{\tau u}^{(0,I)} + F_u^{(0,I)}) u_k^{(0,I)} d\zeta}{(a_{55}(2K(\omega_{*0k}^I - \omega_{*0n}^I) + (\omega_{*0k}^I)^2 - (\omega_{*0n}^I)^2))};$$

$$F_{\tau u}^{(0,I)} = a_{55}(2K\omega_{*0n}^I + (\omega_{*0n}^I)^2)(-\bar{\tau}_{13b}^{(1)}(\zeta = 1)(1+\zeta) - $$
$$-\frac{1}{4}\bar{u}_b^{(1)}(\zeta = -1)(1-\zeta)^2) + \frac{1}{2}\bar{u}_b^{(1)}(\zeta = -1);$$

- при $k = n$, определяется ω_{*1n}^I:

$$\omega_{*1n}^I = -\int_{-1}^{1} \frac{(F_{\tau u}^{(0,I)} + F_u^{(0,I)}) u_n^{(0,I)} d\zeta}{\left(2a_{55}(2K + \omega_{*0n}^I) \| u_n^{(0,I)} \|\right)}.$$

В (22) остается неопределенным значение коэффициента $b_{nn}(\xi, \eta)$. Для его определения воспользуемся условием нормировки [9, 10]

$$\| u_n^{(0,I)} \|^{-1} \int_{-1}^{1} (u_n^{(0,I)} + \varepsilon u_n^{(1,I)})^2 d\zeta = 1,$$

откуда следует

$$\int_{-1}^{1} u_n^{(0,I)} u_n^{(1,I)} d\zeta = 0.$$

После удовлетворения этого условия, получим

$$b_{nn}(\xi,\eta) = \int_{-1}^{1} u_n^{(0,I)} (\bar{\tau}_{13b}^{(1)}(\zeta = 1)(1+\zeta) + $$
$$+\frac{1}{4}\bar{u}_b^{(1)}(\zeta = -1)(1-\zeta)^2) d\zeta.$$

При граничных условиях (9), (10), учитывая (23), аналогичным образом определяем коэффициенты $b_{nm}(\xi, \eta)$ и ω_{*1n}^I. При остальных значениях частот собственных колебаний решение строится таким же образом. Заметим, что эффект оболочки проявляется начиная с приближения $s = 1$. Отметим, что для ортотропных пластин влияние последующих приближений на значения частот порядка $O(\varepsilon^2)$. Аналогичным образом рассматриваются приближения $s \geq 2$. Однако, для приложений они вряд ли будут представлять интерес.

Собственные колебания в зоне пограничного слоя. Чтобы исследовать собственные колебания в зоне пограничного слоя вблизи боковой поверхности $\alpha = \alpha_0$, в уравнениях (1), (2) перейдем к безразмерным компонентам вектора перемещения $U = Ru$, $V = R\text{v}$, $W = Rw$, и введем новые независимые переменные по формулам $\alpha - \alpha_0 = h\xi$, $\beta = R\eta$, $\gamma = h\zeta$, тогда $\frac{\partial}{\partial\alpha} = \frac{\varepsilon^{-1}}{R}\frac{\partial}{\partial\xi}, \frac{\partial}{\partial\beta} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\eta}, \frac{\partial}{\partial\gamma} = \frac{\varepsilon^{-1}}{R}\frac{\partial}{\partial\zeta}$. Разложим величины $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, k_\alpha = \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}, k_\beta = \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}, \frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}, 2H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, $T = 1/(R_1R_2)$ в ряд Тейлора вблизи $\alpha = \alpha_0$, предполагая, что они удовлетворяют условиям разложения. Если Q любое из этих величин, то $Q = Q_n(\alpha - \alpha_0)^n = Q_n R^n \varepsilon^n \xi^n$, где Q_n — коэффициент тейлоровского разложения, по немому индексу «n» происходит суммирование в пределах $[0, +\infty)$.

Решение преобразованных уравнений будем искать в виде (6). В результате получим сингулярно возмущенную малым параметром е систему относительно Q_{mk}, решение которой ищем в виде асимптотического представления (7) [2, 3] и припишем всем искомым величинам индекс b (от слова boundary). После подстановки (7) получается следующая система уравнений:

$$A_0 \frac{\partial \tau_{11b}^{(s)}}{\partial\xi} + \frac{\partial \tau_{13b}^{(s)}}{\partial\zeta} - 2K\omega_{*s} u_b^{(s)} - c^{(j)} u_b^{(s-j)} = R_{1\tau}^{(s-1)}$$
$$(11b, 12b, 13b; 13b, 23b, 33b; u, \text{v}, w; 1\tau, 2\tau, 3\tau);$$

$$A_0 \frac{\partial u_b^{(s)}}{\partial\xi} - \sum\nolimits_{1b}^{(s)} = R_u^{(s-1)};\ \sum\nolimits_{2b}^{(s)} = R_\text{v}^{(s-1)};$$
$$A_0 \frac{\partial w_b^{(s)}}{\partial\xi} - \sum\nolimits_{3b}^{(s)} = R_w^{(s-1)};\ A_0 = A(\alpha_0);$$

$$\frac{\partial \text{v}_b^{(s)}}{\partial\zeta} - a_{44}\tau_{23b}^{(s)} = R_{4\tau}^{(s-1)};\ A_0\frac{\partial w_b^{(s)}}{\partial\xi} + \frac{\partial u_b^{(s)}}{\partial\zeta} - a_{55}\tau_{13b}^{(s)} = R_{5\tau}^{(s-1)};$$
$$c^{(j)} = \sum_{n=0}^{j} \omega_{*(j-n)}\omega_{*(n)};\ A_0\frac{\partial \text{v}_b^{(s)}}{\partial\xi} - a_{66}\tau_{12b}^{(s)} = R_{6\tau}^{(s-1)}; \quad (25)$$
$$\tau_{12b}^{(s)} - \tau_{21b}^{(s)} = R_{7\tau}^{(s-1)};\ j = \overline{0,s};\ \sum\nolimits_{ib}^{(s)} = a_{i1}\tau_{11b}^{(s)} + a_{i2}\tau_{22b}^{(s)} + a_{i3}\tau_{33b}^{(s)},$$

где $R_{i\tau}^{(s-1)}$ — функции, известные для каждого приближения, если известны величины предыдущих приближений, в частности, $R_{i\tau}^{(k)} \equiv 0$ при $k < 0$.

Из системы (25) компоненты тензора напряжений выражаются через $u_b^{(s)}, \text{v}_b^{(s)}, w_b^{(s)}$:

$$\tau_{23b}^{(s)} = \frac{1}{a_{44}}\left[\frac{\partial \text{v}_b^{(s)}}{\partial\zeta} - R_{4\tau}^{(s-1)}\right];\ \tau_{12b}^{(s)} = \frac{1}{a_{66}}\left[A_0\frac{\partial \text{v}_b^{(s)}}{\partial\xi} - R_{6\tau}^{(s-1)}\right];$$
$$\tau_{12b}^{(s)} - \tau_{21b}^{(s)} = R_{7\tau}^{(s-1)};\ \tau_{13b}^{(s)} = \frac{1}{a_{55}}\left[A_0\frac{\partial w_b^{(s)}}{\partial\xi} + \frac{\partial u_b^{(s)}}{\partial\zeta} - R_{5\tau}^{(s-1)}\right]; \quad (26)$$

$$\tau_{11b}^{(s)} = \frac{1}{\Delta}\left[\left(A_0\frac{\partial u_b^{(s)}}{\partial\xi} - R_u^{(s-1)}\right)\Delta_{23} + \right.$$
$$\left. + R_\text{v}^{(s-1)}\Delta_1 + \left(\frac{\partial w_b^{(s)}}{\partial\zeta} - R_w^{(s-1)}\right)\Delta_2\right] \quad (27)$$
$$(11b, 22b, 33b;\ \Delta_{23}, \Delta_1, \Delta_2;\ \Delta_1, \Delta_{13}, \Delta_3;\ \Delta_2, \Delta_3, \Delta_{12}),$$

а для определения компонент вектора перемещения получаются уравнения

$$\frac{A_0^2}{a_{66}}\frac{\partial^2 \text{v}_b^{(s)}}{\partial\xi^2} + \frac{1}{a_{44}}\frac{\partial^2 \text{v}_b^{(s)}}{\partial\zeta^2} - $$
$$-2K\omega_{*s}\text{v}_b^{(s)} - c^{(j)}\text{v}_b^{(s-j)} = T_\text{v}^{(s-1)}, \quad j = \overline{0,s}; \quad (28)$$

$$\frac{\Delta_{23}}{\Delta}A_0^2\frac{\partial^2 u_b^{(s)}}{\partial\xi^2} + A_0\left(\frac{\Delta_2}{\Delta} + \delta_1\right)\frac{\partial^2 w_b^{(s)}}{\partial\xi\partial\zeta} + $$
$$+\frac{1}{a_{55}}\frac{\partial^2 u_b^{(s)}}{\partial\zeta^2} - 2K\omega_{*s}u_b^{(s)} - c^{(j)}u_b^{(s-j)} = T_u^{(s-1)} \quad (29)$$
$$(u, w; \Delta/\Delta_{23}, a_{55}; a_{55}, \Delta/\Delta_{12}),\ \delta_1 = 1/a_{55}.$$

Уравнение (28) и соотношения (26) описывают антиплоский, а (29) и (27) — плоский пограничные слои. Особый интерес представляет исходное приближение. При $s = 0$ правые части уравнений (28) и (29) обращаются в нуль.

Решение уравнения (28) при $s = 0$ будем искать в виде

$$v_b^{(0)}(\xi,\eta,\zeta) = \exp(-\lambda_a\xi)C^{(0)}(\eta)v_{1b}^{(0)}(\zeta). \qquad (30)$$

После подстановки выражения (30) в уравнение (28), получим однородное обыкновенное дифференциальное уравнение, общее решение которого имеет вид

$$v_{1b}^{(0)}(\zeta) = C_1^{(0)}\sin\alpha_a\zeta + C_2^{(0)}\cos\alpha_a\zeta; \qquad (31)$$
$$\alpha_a = \sqrt{a_{44}(A_0^2\lambda_a^2/a_{66} - 2K\omega_{*0} - \omega_{*0}^2)},$$

индекс a означает, что λ_a относится к антиплоскому пограничному слою.

Удовлетворив соответствующим граничным условиям (3), (5), получим

$$\cos 2\alpha_0 = 0 \Rightarrow \lambda_{ank} = \qquad (32)$$
$$= \pm\sqrt{a_{66}/A_0^2(\pi^2(1+2n)^2/(16a_{44}) + 2K\omega_{*0k} + \omega_{*0k}^2}.$$

Удовлетворив соответствующим граничным условиям (4), (5), получим

$$\sin 2\alpha_0 = 0 \Rightarrow \lambda_{ank} = \qquad (33)$$
$$= \pm\sqrt{a_{66}/A_0^2(\pi^2 n^2/(4a_{44}) + 2K\omega_{*0k} + \omega_{*0k}^2}.$$

В силу свойства пограничного слоя необходимо ограничиться значениями λ_{ank} с $\mathrm{Re}\,\lambda_{ank} > 0$. Собственными функциями при условиях (3), (5) будут

$$v_{bnk}^{(0)}(\xi,\eta,\zeta) = C^{(0)}(\eta)\exp(-\lambda_{ank}\xi)\times$$
$$\times\cos\pi(2n+1)(1-\zeta)/4,$$

а при граничных условиях (4), (5):

$$v_{bnk}^{(0)}(\xi,\eta,\zeta) = C^{(0)}(\eta)\exp(-\lambda_{ank}\xi)\times$$
$$\times\sin\pi n(1+\zeta)/2.$$

После некоторых преобразований системы (29), получим уравнение для определения $u_b^{(0)}$:

$$B_1\frac{\partial^4 u_b^{(0)}}{\partial\xi^4} + B_2\frac{\partial^4 u_b^{(0)}}{\partial\zeta^4} + B_3\frac{\partial^4 u_b^{(0)}}{\partial\xi^2\partial\zeta^2} + B_4\frac{\partial^2 u_b^{(0)}}{\partial\xi^2} + \qquad (34)$$
$$+B_5\frac{\partial^2 u_b^{(0)}}{\partial\zeta^2} - (2K\omega_{*0} + \omega_{*0}^2)u_b^{(0)} = 0;$$

$$B_1 = A_0^4\Delta_{23}/(\Delta a_{55});\ B_2 = \Delta_{12}/(\Delta a_{55});$$
$$B_3 = \left((\Delta_{23}\Delta_{12} - \Delta_2^2)/\Delta^2 - 2\Delta_2/(\Delta a_{55})\right)A_0^2;$$
$$B_4 = -\left(\Delta_{23}/\Delta + \delta_1\right)A_0^2(2K\omega_{*0} + \omega_{*0}^2);$$
$$B_5 = -\left(\Delta_{12}/\Delta + \delta_1\right)(2K\omega_{*0} + \omega_{*0}^2),$$

решение которого будем искать в виде

$$u_b^{(0)}(\xi,\eta,\zeta) = K_b^{(0)}(\eta)\exp(-\lambda_p\xi + k\zeta);$$
$$w_b^{(0)}(\xi,\eta,\zeta) = LK_b^{(0)}(\eta)\exp(-\lambda_p\xi + k\zeta),$$

где L — неопределенный пока множитель; k — корень характеристического уравнения

$$B_2k^4 + (\lambda_p^2B_3 + B_5)k^2 + \lambda_p^4B_1 +$$
$$+\lambda_p^2B_4 - (2K\omega_{*0} + \omega_{*0}^2)^2 = 0;$$
$$k_{1,2}^2 = (-\lambda_p^2B_3 - B_5 \pm\sqrt{D})/(2B_2);$$
$$D = \lambda_p^4(B_3^2 - 4B_1B_2) + 2\lambda_p^2(B_3B_5 - 2B_2B_4) +$$
$$+B_5^2 + 4B_2(2K\omega_{*0} + \omega_{*0}^2)^2;$$

$$L_i = \frac{\Delta_{23}a_{55}\lambda_p^2A_0^2 + \Delta k_i^2 - \Delta a_{55}(2K\omega_{*0} + \omega_{*0}^2)}{(\Delta + \Delta_2a_{55})A_0\lambda_pk_i}.$$

В результате решение уравнения (34) примет вид

$$u_b^{(0)}(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{i=1}^4 K_{ib}^{(0)}(\eta)\exp(-\lambda_p\xi + k_i\zeta);$$
$$w_b^{(0)}(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{i=1}^4 L_iK_{ib}^{(0)}(\eta)\exp(-\lambda_p\xi + k_i\zeta).$$

При граничных условиях (3), (5) λ_p является корнем уравнения

$$\sum_{(1,2,3,4)}(-1)^1S_1\left[Q_2(L_3-L_4)+Q_3(L_4-L_2)+Q_4(L_2-L_3)\right]=0;$$
$$S_i = \left(\Delta_{12}k_iL_i - \Delta_2\lambda_pA_0\right)\exp(2k_i); \qquad (35)$$
$$Q_i = \left(k_i - \lambda_pA_0L_i\right)\exp(2k_i),\ i = 1,2,3,4.$$

Суммирование в левой части равенства (35) ведется по круговой перестановке индексов при учете чередования знаков слагаемых.

При граничных условиях (4), (5) λ_p является корнем уравнения

$$(L_2 - L_3)(L_4 - L_1)\mathrm{ch}(k_2 + k_3 - k_1 - k_4) +$$
$$+(L_1 - L_3)(L_2 - L_4)\mathrm{ch}(k_1 + k_3 - k_2 - k_4) + \qquad (36)$$
$$+(L_1 - L_2)(L_4 - L_3)\mathrm{ch}(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) = 0.$$

Каждому значению ω_{*0} будет соответствовать счетное множество λ_a и λ_p. Таким образом, каждому собственному значению ω_{*0} соответствует свое семейство пограничных функций. При этом собственные колебания одного типа порождают в пограничном слое колебания и другого типа.

При $s > 0$ компоненты вектора перемещения в зоне пограничного слоя имеют вид:

$$v_{bn}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta) = \exp(-\lambda_a\xi)C_{1n}^{(s)}(\eta)v_{b0n}^{(0)}(\zeta) +$$
$$+\overline{v}_{bn}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta),\ \ n = \overline{0,N};$$

$$u_b^{(s)}(\xi,\eta,\zeta) = \exp(-\lambda_{pn}\xi)\sum_{i=1}^4 K_{ibn}^{(s)}(\eta)\exp(k_{in}\zeta) +$$
$$+\overline{u}_{bn}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta),\ \ n = \overline{0,N};$$
$$w_b^{(s)}(\xi,\eta,\zeta) = \exp(-\lambda_{pn}\xi)\sum_{i=1}^4 L_{in}K_{ibn}^{(s)}(\eta)\exp(k_{in}\zeta) +$$
$$+\overline{w}_{bn}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta),\ \ n = \overline{0,N},$$

$\bar{u}_b^{(s)}$ (u, v, w), $s \neq 0$ являются частными решениями уравнений (28), (29), которые и входят в граничные условия (8)–(10). Это необходимо для того, чтобы после сращивания решений внутренней задачи и пограничного слоя, общее решение удовлетворяло граничным условиям (3)–(5). Из полученных решений следует, что в зоне пограничного слоя имеется достаточно пестрая картина колебательного процесса и практически нет чисто сдвиговых и продольных колебаний. Тип граничных условий на лицевых поверхностях обуславливает не только асимптотику решения внутренней задачи, но и тип трансцендентных уравнений для пограничных слоев, корни которых характеризуют скорости убывания величин пограничного слоя (антиплоского и плоского). Решение же внутренней задачи влияет на значения величин (амплитуд) пограничного слоя, но не на скорость убывания (показатель экспоненты). В отличие от пластин, в случае оболочек при $s \geq 1$ через граничные условия пограничный слой влияет на решение внутренней задачи [6, 7], которое порядка $O(\varepsilon)$. Взаимовлияют также антиплоский и плоский пограничные слои. Судя по уравнениям (32), (33) и (35), (36) при наличии вязкого сопротивления затухание пограничного слоя происходит быстрее. Сопряжение решений внутренней задачи и пограничного слоя проводится по той же схеме, как и в работе [8].

Список литературы

1. Пановко, Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем / Я.Г. Пановко. — М.: Физматгиз, 1960. — 196 с.
2. Гольденвейзер, А.Л. Теория упругих тонких оболочек / А.Л. Гольденвейзер. — М.: Наука, 1976. — 512 с.
3. Агаловян, Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек / Л.А. Агаловян. — М.: Наука, 1997. — 414 с.
4. Агаловян, Л.А. Асимптотические решения неклассических краевых задач о собственных колебаниях ортотропных оболочек / Л.А. Агаловян, Л.Г. Гулгазарян // ПММ. — 2006. — Т. 70, Вып. 1. — С. 111–125.
5. Агаловян, Л.А. Собственные колебания ортотропных пластин при наличии вязкого сопротивления / Л.А. Агаловян, Г.Л. Азатян // Изв. НАН Армении. Механика. — 2005. — 58, № 2. — С. 48–58.
6. Агаловян, Л.А. К определению решений одного класса динамических пространственных задач математической теории упругости для ортотропных оболочек / Л.А. Агаловян, Л.Г. Гулгазарян // Уч. записки АГПУ им. Х. Абовяна. — 2012. — № 2(17). — С. 29–42.
7. Гулгазарян, Л.Г. Собственные пространственные колебания ортотропных оболочек в зоне пограничного слоя при условиях первой краевой задачи / Л.Г. Гулгазарян // Актуальные проблемы механики сплошной среды: сб. науч. тр. — Ереван: Изд.-во ЕГУАС. — 2012. — Т. 1. — С. 201–205.
8. Агаловян, Л.А. Неклассические краевые задачи о вынужденных колебаниях ортотропных оболочек / Л.А. Агаловян, Л.Г. Гулгазарян // Прикладная механика. — 2009. — Т. 45, № 8. — С. 105–122.
9. Найфе, А.Х. Методы возмущений / А.Х. Найфе. — М.: Мир, 1976. — 455 с.
10. Ломов, С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981. — 398 с.

Ghulghazaryan L.G.

About Character of Natural Vibrations of Orthotropic Shells in the Presence of Viscous Resistance

Basing on the equations of three-dimensional problem of elasticity theory, asymptotic solutions of non-classical boundary value problems of natural vibrations of orthotropic shells in the presence of viscous internal resistance are obtained, when the top front surface of the shell is given with two choices of spatial boundary conditions, and a displacement vector is given at the bottom surface. The characteristic equations for the determination of natural frequencies are derived. Functions of boundary layer type and characteristic equations for detecting the speed of boundary layer vibrations damping from the edge surface into the shell are obtained.

Keywords: *asymptotic method, natural frequencies, viscous resistance, boundary layer*

Поступила в редакцию 15.10.2013.