

УДК 539.3

А.М. ЕРМАКОВ

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

УСТОЙЧИВОСТЬ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО СФЕРИЧЕСКОГО СЕГМЕНТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГРУЗА С ПЛОСКИМ ОСНОВАНИЕМ

Решается задача о напряженно-деформированном состоянии и потере устойчивости трансверсально-изотропного сегмента сферической оболочки переменной толщины, находящегося под действием груза с плоским основанием. В основу решения этой задачи положена теория анизотропных оболочек средней толщины Паляя–Спиро, позволяющая учесть влияние поперечного сдвига и изменение толщины. При моделировании больших деформаций используется метод последовательных нагружений. Проводится сравнение результатов, полученных с применением метода линеаризации нелинейных уравнений равновесия и метода минимизации упругого потенциала оболочки. Задачи о напряженно-деформированном состоянии мягких и близких к мягким оболочек под действием груза с плоским основанием важны для анализа данных, связанных с измерением важной в офтальмологии характеристики — внутриглазного давления.

Ключевые слова: нелинейная теория оболочек, устойчивость, груз с плоским основанием

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о напряженно-деформированном состоянии и потере устойчивости трансверсально-изотропного сегмента сферической оболочки переменной толщины, находящегося под действием груза с плоским основанием (рисунок). Сферический сегмент жестко заделан по краю и изначально нагружен внутренним давлением.

Деформации и потеря устойчивости считаются осесимметричными, поэтому рассматривается лишь половина дуги вертикального сечения с введенными в точке полюса и на экваторе граничными условиями симметрии и жесткой заделки. Таким образом, все величины сводятся к зависимости только от одной сферической координаты $\alpha \in [a_0, \pi/2]$, где a_0 характеризует угол раствора сегмента. Модули упругости материала рассматриваемой оболочки различаются на порядок, поэтому для ее моделирования была выбрана теория анизотропных оболочек

средней толщины Паляя–Спиро [1]. Эта теория также позволяет учесть влияние поперечного сдвига и деформирование в направлении нормали к срединной поверхности, так как в основе ее приняты следующие гипотезы:

- 1) прямолинейные волокна оболочки, перпендикулярные к ее срединной поверхности до деформации, остаются после деформации также прямолинейными;
- 2) косинус угла наклона таких волокон к срединной поверхности деформированной оболочки равен осредненному углу поперечного сдвига;
- 3) учитывается изменение толщины оболочки.

Математическая формулировка принятых гипотез сводится к следующим равенствам:

$$\begin{aligned} u_1 &= u + \phi \cdot z, & u_3 &= w + F(\alpha, z), \\ \phi &= \gamma_1 + \phi_0, & \phi_0 &= -\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + k_1 \cdot u, \end{aligned} \quad (1)$$

где u_1 и u_3 — тангенциальное и нормальное смещения слоя; u и w — смещение срединной поверхности; ϕ — угол поворота нормали в плоскости (α, z) ; ϕ_0 — угол поворота нормали к срединной поверхности; γ_1 — угол сдвига; функция $F(\alpha, z)$ характеризует изменение длины волокна нормального к срединной поверхности.

Методы решения. Под действием груза с плоским основанием происходят большие деформации, для описания которых необходима геометрически нелинейная теория оболочек. Однако построение решения уравнений нелинейной теории связано со значительными трудностями [2, 3]. Поэтому в основу решения задачи положен метод последовательных нагружений.

В соответствии с этим методом действующее давление P представляется суммой монотонных последовательных нагружений:

$$P = \Delta P_1 + \Delta P_2 + \dots + \Delta P_n \quad (\Delta P > 0, n \gg 1). \quad (2)$$

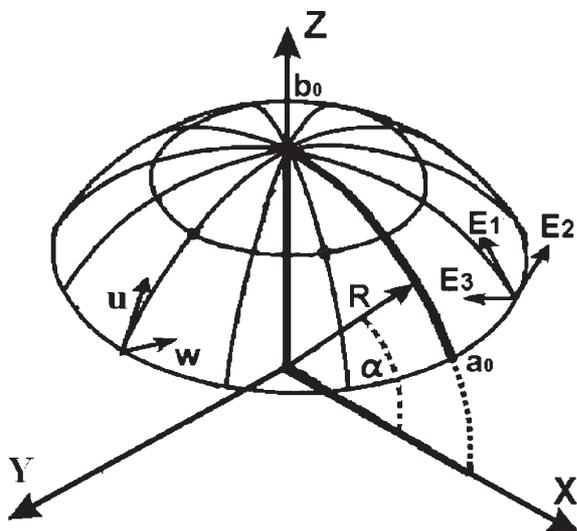


Рисунок — Сферический сегмент

Таким образом, геометрически нелинейная задача сводится к последовательному решению линейных задач для предварительно нагруженной оболочки вращения, исходное напряженно-деформированное состояние которой определено по результатам предшествовавших нагружений.

На каждом шаге метода к оболочке прикладывается только часть общей нагрузки ΔP_i так, чтобы деформации остались малыми. Учитывается, что на предшествовавших шагах каждая точка исходной поверхности изменила свое положение и толщину. Это требует переопределения коэффициентов Ламе A_1, A_2 , кривизн k_1, k_2 , а также нового закона распределения функции толщины h . Кроме того, в разрешающих уравнениях учтены величины параметров напряженного и деформированного состояний оболочки, полученные на предыдущем уровне нагрузки. Приращения нагрузки $\Delta P_1, \Delta P_2, \Delta P_3$ должны быть малы по сравнению с теми значениями, которым соответствует верхняя критическая нагрузка.

В работе метод последовательных нагружений реализуется двумя способами: с использованием линейризованных нелинейных уравнений равновесия и путем минимизацией упругого потенциала оболочки. Эти пути решения задачи дают разные подходы к определению критической нагрузки.

В первом методе на каждом шаге нагружения решается система дифференциальных уравнений равновесия оболочки. Их правая часть помимо следующего приращения нагрузки ΔP_i учитывает усилия и деформации, возникшие на предыдущем этапе нагружения. Полагаем, что критическая нагрузка соответствует случаю, когда при $\Delta P_i = 0$ система перестает быть тождеством, т. е. нетривиальные решения возникают только за счет воздействия внутренних усилий.

Во втором подходе решение получается путем минимизации упругого потенциала оболочки с использованием численного метода Рунге. Смещения представляются в виде функциональных рядов, удовлетворяющих граничным условиям. Из частных производных упругого функционала по каждому из членов рядов функций смещения составляется система нелинейных дифференциальных уравнений. Эта система решается методом продолжения решения по параметру нагружения ΔP_i . В результате решение сводится к системе линейных алгебраических уравнений для компонентов членов рядов функции смещения. Потеря устойчивости происходит, когда разрешающая матрица этой системы становится вырожденной. В этом случае закритические состояния получают путем смены параметра.

Проводится сравнение результатов, полученных с помощью этих методов. Для обоих методов определяется зависимость зоны контакта груза с плоским основанием от внутреннего давления, толщины и радиуса кривизны сегмента сферической

оболочки. Построены распределения напряженно-деформированного состояния для различных значений веса груза. Исследуется возможное возникновение отслоения внутри области контакта со штампом. Такая задача может найти свое применение в офтальмологии.

Численное моделирование. Приведем сравнение результатов, полученных с использованием рассмотренных методов для задачи о деформации роговицы глаза, находящейся под действием груза с плоским основанием. Наложение груза весом в 10 г происходит при измерении внутриглазного давления по методу Маклакова. О значении ВГД судят по радиусу области контакта. Роговица может быть представлена в виде жестко заделанного по краям сегмента трансверсально-изотропной сферической оболочки переменной толщины [6].

Средний радиус ее кривизны $R = 8$ мм; радиус основания является постоянной величиной и равен приблизительно $R_{os} = 5,25$ мм; толщина h линейно меняется от $h_a = 1$ мм на концах сегмента до $h_b = 0,5$ мм в точке полюса. Для модулей упругости, поперечного сдвига и коэффициентов Пуассона примем следующие значения [7]: $E_1 = E_2 = 7 \cdot 10^4$ Па, $E_3 = 7 \cdot 10^2$ Па, $G = 7 \cdot 10^3$ Па, $\nu_{21} = \nu_{31} = \nu_{12} = \nu_{32} = 0,4$, $\nu_{13} = \nu_{23} = 0,01$.

Будем считать, что эти геометрические параметры соответствуют роговице находящейся под действием внутриглазного давления в 22 мм. рт. ст. (1 мм. рт. ст. = 133,3 Па). Поэтому сначала рассматривается оболочка несколько меньшей высоты. Она нагружается отрицательным внутренним давлением. Геометрия полученной формы считается исходной, действующие в ней усилия отбрасываются, и она нагружается той же, но положительной нагрузкой. Новая оболочка выше первоначальной, но в ней учтено влияние внутреннего давления. Для моделирования воздействия груза вводится функция, учитывающая, что нагрузка действует только в спрямившейся области на вершине. В случае возникновения прогиба, приводящего к отслоению оболочки от груза, начинает действовать отрицательная нагрузка, снимающая часть общей нагрузки с отслоившейся поверхности оболочки [8]. Рассмотрим деформации и соответствующее им распределение эпюры нормального напряжения в области контакта:

- на первом этапе при малом весе груза 0,75 г основная нагрузка сосредотачивается в окрестности полюса и экспоненциально убывает при приближении к краям;
- при повышении нагрузки до 3,5 г эпюра перераспределяется и в окрестности полюса купола возникает ненагруженная область;
- для искомого значения нагрузки в 10 г хорошо видна слабо нагруженная кольцевая область; основные поверхностные напряжения действуют на границе штампа с куполом и в окрестности точки полюса;

г) при продолжении нагружения до 15 г распределение нагрузки приобретет более сложную форму; д) при решении рассмотренной задачи с использованием метода линеаризации оболочка может потерять устойчивость, так как он в отличие от метода минимизации потенциальной энергии, учитывает усилие ΔT_1 в явном виде, а соответствующая ему система дифференциальных уравнений имеет более высокий порядок. Усилие ΔT_1 , достигающее достаточно больших значений в окрестности точки полюса, может заставить оболочку провалиться внутрь — потерять устойчивость.

В таблице представлены величины радиусов границы области контакта оболочки со штампом весом в 10 г R_{out} для различных значений толщины в окрестности полюса h_b (мм) и радиусах кривизн, равных $R = 8,5 - h_b$ (мм). Такие расчеты могут помочь при моделировании последствий кератометрических операций, при которых с вершины роговицы срезается слой ткани. Приведены значения, полученные с использованием методов линеаризации нелинейных уравнений равновесия и минимизации упругого потенциала.

Таблица — Сравнение радиусов области контакта

Толщина в точке полюса h_b (мм)	0,5	0,465	0,43	0,395	0,36
Метод минимизации R_{out}	3,00	3,04	3,08	3,12	3,17
Метод линеаризации R_{out}	2,97	3,00	3,05	3,10	3,15

Заключение. Функции смещения точек срединной поверхности для рассмотренных способов реализации метода последовательных нагружений достаточно близки между собой даже при существенных деформациях. Радиус нагруженной области R_{out} , полученный по методу линеаризации, не-

много меньше радиуса, полученного по методу минимизации упругого потенциала, что может быть объяснено явным учетом функции усилия ΔT_1 в первом методе. Более полая и тонкая оболочка получает больший радиус области контакта со штампом R_{out} , что в свою очередь ведет к занижению вычисляемого значения ВГД.

Оболочка может потерять устойчивость как при нагружении грузом, так и при снятии нагрузки — перераспределении эпюры нормальных усилий. Следует отметить, что при использовании метода минимизации упругого потенциала большинство особых точек пропускается. Этот метод не учитывает в явном виде возникшие усилия и используемые в нем дифференциальные уравнения имеют более низкий порядок, а потому не включают полный набор критических состояний.

Список литературы

1. Палий, О.М. Анизотропные оболочки в судостроении. Теория и расчет / О.М. Палий, В.Е. Спиро. — Л.: Кораблестроение, 1977. — 386 с.
2. Феодосьев, В.И. Об одном способе решения нелинейных задач устойчивости деформируемых тел / В.И. Феодосьев // Прикладная математика и механика. — 1963. — Т. XXVII. — С. 265–274.
3. Лавендел, Э.Э. Расчет резино-технических изделий / Э.Э. Лавендел. — М.: Машиностроение, 1997. — С. 146–154.
4. Карпов, В.В. Программный комплекс исследования устойчивости оболочки / В.В. Карпов, Д.А. Баранова, Т.Р. Беркалиев. — СПб.: Изд-во СПбГАСУ, 2009. — С. 16–20.
5. Москаленко, Л.П. Методика исследования устойчивости пологих ребристых оболочек на основе метода продолжения решения по наилучшему параметру / Л.П. Москаленко // Вестн. гражданских инженеров. — 2011. — № 4(29). — С. 161–164.
6. Бауэр, С.М. Простейшие модели теории оболочек и пластин в офтальмологии / С.М. Бауэр, Б.А. Зимин, П.Е. Товстик. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2000. — 92 с.
7. Аветисов, С.Э. влияния биомеханических свойств роговицы на показатели тонометрии. / С.Э. Аветисов, И.А. Бубнова, А.А. Антонов // Бюл. СО РАМН. — 2009. — № 4. — С. 30–33.
8. Катор, Б.Я. Контактные задачи нелинейной теории оболочек вращения / Б.Я. Катор. — К.: Наук. думка, 1990. — 136 с.

Ermakov A.M.

Buckling of a transversal-isotropic spherical segment under the flat base load

In this paper the problem of the buckling of the transversal-isotropic segment of spherical shell with the different thicknesses under the influence of the load with a flat base is studied. The solution of this problem is based on the theory of the shell of moderate thickness by Paly-Spiro. This theory takes into account the influence of the cross section shear and change of the shell thickness. For modelling such large deformations the method of consequent loading is used. The comparison of the results which were obtained with the use of the method of linearization of non-linear equilibrium equations and the method of minimization of elastic potential of the shell has been done. The problems of stress-strain state of soft and close to soft shells that are under the influence of a load with a flat base are important for analyzing the data related to measuring a very important in ophthalmology characteristic of intraocular pressure.

Key words: nonlinear shell theory, stability, load with a flat base

Поступила в редакцию 15.10.2013.