УДК 539.3; 616.314

В.В. КОРОЛЕВИЧ
Национальный педагогический университет им. М.П. Драгоманова, г. Прага, Чехия

Д.Г. МЕДВЕДЕВ, канд. физ.-мат. наук
Белорусский государственный университет, г. Минск

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДАМИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ИМПЛАНТАТА МЕЖПОЗВОНОЧНОГО ДИСКА ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ НАГРУЖЕНИИ

В работе исследуется напряженное состояние анизотропного кольцевого диска имплантата межпозвоночного диска при сложном осесимметричном нагружении. Для расчета напряжений в диске применяется метод интегральных уравнений. Выводится разрешающая система интегральных уравнений задачи осесимметричного изгиба анизотропного кольцевого диска переменной толщины, лежащего на упругом основании Винклера. Полученная система интегральных уравнений решается методом последовательных приближений. Для вычисления растягивающих напряжений в диске со степенным законом изменения его толщины, испытывающего действие «гидростатического давления» на внутреннем контуре, приводится точное решение плоской задачи теории упругости. Касательные напряжения в диске, возникающие от действия постоянного крутящего момента на внешнем контуре, рассчитываются по известным формулам. Предложенная математическая модель расчета напряженного состояния имплантата межпозвоночного диска под действием сложного осесимметричного нагружения достаточно точно описывает его механическое деформирование.

Ключевые слова: *имплантат межпозвоночного диска, анизотропный диск, интегральные уравнения, метод последовательных приближений*

Введение. Современные имплантаты межпозвоночного диска позволяют успешно решать многие проблемы, связанные с заболеваниями позвоночника человека. По конструктивному исполнению они бывают металлическими, полимерными или комбинированными, сочетающими те или иные свойства металлов, пластмасс и керамик.

В качестве примера для расчетов возьмем комбинированный имплантат межпозвоночного диска М6, предложенный и активно применяемый в хирургической практике ортопедической клиникой Vitos в г. Кассель (Германия). По заверению доктора Ульриха Шмитц-Зиега, заведующего отделением хирургии позвоночника, «имплантат поразительно похож на естественный межпозвоночный диск, что касается его анатомии и функции. Высокоэластичное ядро выдерживает, как и естественное пульпозное ядро межпозвоночного диска, большие нагрузки и является амортизатором. Вместо естественного фиброзного кольца имеется сотканное из полиэтилена кольцо. Оно ограждается еще одним слоем высокоэластичной пластмассы протез снаружи и предотвращает проникновение ткани в него. Протез закрепляется сверху и снизу двумя титановыми пластинками, чтобы кость могла оптимально прирасти к имплантату» [1].

Имплантат нагружен вертикальной сжимающей силой F, которая является «основной компонентой состояния нагружения в большинстве случаев дневной активности человека, основная часть нагрузки воспринимается межпозвонковым диском (до 80 % при здоровых суставах [2]). Даже при кручении соответствующая величина приложенного момента воспринимается межпозвонковым диском» [3].

Таким образом, объектом наших исследований будет являться анизотропный кольцевой диск имплантата, как наиболее нагруженный элемент конструкции.

Механическая модель анизотропного диска имплантата. Пусть на внешнем контуре диска (при $r = R$) через высокоэластичное внешнее кольцо приложен постоянный крутящий момент $M_{\text{кр}}$.

Примем, что диск на внутреннем контуре (при $r = r_0$) шарнирно соединен с высокоэластичным ядром, а на внешнем — свободный. Граничные условия в предлагаемой модели можно задавать и в любом другом виде.

В общем случае будем полагать, что толщина анизотропного кольцевого диска имплантата меняется вдоль радиуса r по степенному закону: $h(r) = h_0\left(\dfrac{r}{r_0}\right)^{\alpha}$, $\alpha \in R$, h_0 — толщина диска на внутреннем контуре (при $r = r_0$). Для анизотропного диска постоянной толщины показатель α равен нулю.

Имплантат скреплен с упругим винклеровским основанием (костная ткань позвонков).

Рассматриваемый анизотропный диск подвергается одновременно:

а) осесимметричному изгибу диска на упругом основании Винклера под действием постоянной поперечной нагрузки интенсивностью q_0;

б) осесимметричному растяжению диска в своей плоскости от приложенного на внутреннем контуре «гидростатического давления» p_0, создаваемого высокоэластичным ядром при его деформировании; в) кручению диска из-за действия постоянного крутящего момента $M_{кр}$, приложенного на его внешнем контуре.

Обозначим перемещение точек срединной поверхности деформируемого диска в направлении оси z через $w(r)$, ниже называемое функцией прогиба.

Связь между реакцией $q_r(r)$ упругих оснований, которыми являются костные ткани двух соседних между имплантатом позвонков, и функцией прогиба $w(r)$ — зададим в виде (основание Винклера) [3]:

$$q_r(r) = k_0 \cdot w(r), \qquad (1)$$

где k_0 — коэффициент постели упругих оснований, определяемый экспериментально.

Расчет осесимметричной деформации анизотропного кольцевого диска имплантата будем вести в рамках классической теории деформирования тонких пластин, основанной на гипотезах Кирхгофа.

Разрешающая система интегральных уравнений и метод ее решения. Рассмотрим вначале задачу осесимметричного изгиба анизотропного кольцевого диска, лежащего на упругом основании Винклера.

Выделим из диска двумя меридиональными плоскостями, образующими с координатной плоскостью rz углы θ и $\theta + d\theta$, и двумя цилиндрическими поверхностями радиусами r и $r + dr$, нормальными к срединной плоскости, бесконечно малый элемент. Запишем уравнения равновесия этого элемента диска в усилиях и моментах [4]:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dr}(rM_r) - M_\theta = rQ_r; \\ \dfrac{d}{dr}(rQ_r) = -r\left[q_0 - q_r(r)\right], \end{cases} \qquad (2)$$

где $M_r(r)$, $Q_r(r)$ — радиальные изгибающий момент и поперечная сила, действующие в цилиндрическом сечении соответственно; $M_\theta(r)$ — тангенциальный изгибающий момент, действующий в радиальном сечении кольцевого диска.

Изгибающие моменты $M_r(r)$, $M_\theta(r)$ выражаются через компоненты деформации $\kappa_r(r)$, $\kappa_\theta(r)$, характеризующими кривизну срединной поверхности диска, следующими соотношениями [5]:

$$\begin{aligned} M_r(r) &= D_{11}(r)\left[\kappa_r(r) + \nu_{\theta r}\kappa_\theta(r)\right]; \\ M_\theta(r) &= D_{11}(r)\left[\nu_{\theta r}\kappa_r(r) + k^2\kappa_\theta(r)\right], \end{aligned} \qquad (3)$$

где $D_{11}(r) = \dfrac{E_\theta h^3(r)}{12\left(k^2 - \nu_{\theta r}^2\right)}$ — цилиндрическая жесткость изгиба полярно-ортотропного диска; $k^2 = E_\theta / E_r$; E_r, E_θ — модули Юнга при растяжении (сжатии) полярно-ортотропного тела в направлении осей r, θ соответственно; $\nu_{\theta r}$ — коэффициент Пуассона.

Величины $\kappa_r(r)$, $\kappa_\theta(r)$ связаны с углом $\vartheta_r(r)$ поворота нормали к срединной поверхности диска выражениями [5]:

$$\kappa_r(r) = \frac{d\vartheta_r}{dr}; \quad \kappa_\theta(r) = \frac{\vartheta_r(r)}{r}, \qquad (4)$$

где $\vartheta_r(r) = -\dfrac{dw(r)}{dr}$.

Из соотношений (3) выразим $\kappa_\theta(r)$ через изгибающие моменты $M_r(r)$, $M_\theta(r)$:

$$\kappa_\theta(r) = \frac{12}{E_\theta h^3(r)}\left[M_\theta(r) - \nu_{\theta r}M_r(r)\right]. \qquad (5)$$

Подставляя в (5) правую часть выражения для $\kappa_\theta(r)$ из (4), получим:

$$\vartheta_r(r) = -\frac{dw(r)}{dr} = \frac{12}{E_\theta} \cdot \frac{r\left[M_\theta(r) - \nu_{\theta r}M_r(r)\right]}{h^3(r)}, \qquad (6)$$

откуда

$$\frac{dw(r)}{dr} = -\frac{12}{E_\theta} \cdot \frac{r\left[M_\theta(r) - \nu_{\theta r}M_r(r)\right]}{h^3(r)}. \qquad (7)$$

Проинтегрировав уравнение (7) в пределах от r_0 до r, получим формулу для вычисления функции прогиба $w(r)$:

$$w(r) = -\frac{12}{E_\theta}\int_{r_0}^{r} \frac{r_1}{h^3(r_1)}\left[M_\theta(r_1) - \nu_{\theta r}M_r(r_1)\right] \cdot dr_1 + w(r_0), \qquad (8)$$

где $w(r_0)$ — вертикальное перемещение точек внутреннего контура кольцевого диска.

Подставим во второе уравнение равновесия системы (2) выражения для реакции $q_r(r)$ из (1) и для перемещения $w(r)$ из (8):

$$\frac{d}{dr}\left(rQ_r(r)\right) = -\frac{12k_0}{E_\theta} \cdot r\int_{r_0}^{r} \frac{r_1}{h^3(r_1)}\left[M_\theta(r_1) - \nu_{\theta r}M_r(r_1)\right]dr_1 - \left[q_0 - k_0 w(r_0)\right] \cdot r.$$

Проинтегрировав это уравнение в пределах от r_0 до r, получим после преобразования формулу для вычисления поперечной силы $Q_r(r)$:

$$Q_r(r) = -\frac{6k_0}{E_\theta} \cdot \int_{r_0}^{r} \frac{\left(r^2 - r_1^2\right)}{r} \cdot \frac{r_1}{h^3(r_1)} \times \left[M_\theta(r_1) - \nu_{\theta r}M_r(r_1)\right]dr_1 + \frac{r_0}{r}Q_r(r_0) - \frac{1}{2}\left[q_0 - k_0 w(r_0)\right] \cdot \frac{\left(r^2 - r_0^2\right)}{r}, \qquad (9)$$

где $Q_r(r_0)$ — значение поперечной силы на внутреннем контуре кольцевого диска.

Преобразуем первое уравнение равновесия системы (2) к виду:

$$\frac{dM_r}{dr} = \frac{\left(M_\theta - M_r\right)}{r} + Q_r. \qquad (10)$$

Подставляя в уравнение (10) выражение для поперечной силы $Q_r(r)$ из (9), получим:

$$\frac{dM_r(r)}{dr}=\frac{\left[M_\theta(r)-M_r(r)\right]}{r}-$$
$$-\frac{6k_0}{E_\theta}\cdot\int_{r_0}^{r}\frac{\left(r^2-r_1^2\right)}{r}\cdot\frac{r_1}{h^3(r_1)}\left[M_\theta(r_1)-\nu_{\theta r}M_r(r_1)\right]\cdot dr_1+ \tag{11}$$
$$+\frac{r_0}{r}Q_r(r_0)-\frac{1}{2}\left[q_0-k_0w(r_0)\right]\cdot\frac{\left(r^2-r_0^2\right)}{r}.$$

Проинтегрировав уравнение (11) в пределах от r_0 до r, после достаточно сложных преобразований будем иметь первое интегральное уравнение в моментах разрешающей системы уравнений:

$$M_r(r)=-\left(1-\nu_{\theta r}\right)\frac{3k_0}{E_\theta}\cdot\int_{r_0}^{r}\left[\left(r^2-r_1^2\right)+2r_1^2\ln\left(\frac{r_1}{r}\right)\right]\cdot\frac{r_1M_r(r_1)}{h^3(r_1)}dr_1+$$
$$+\int_{r_0}^{r}\frac{\left[M_\theta(r_1)-M_r(r_1)\right]}{r_1}dr_1-\frac{3k_0}{E_\theta}\cdot r\int_{r_0}^{r}\left[\left(r^2-r_1^2\right)+2r_1^2\ln\left(\frac{r_1}{r}\right)\right]\times$$
$$\times\frac{r_1\left[M_\theta(r_1)-M_r(r_1)\right]}{h^3(r_1)}dr_1+M_r(r_0)+ \tag{12}$$
$$+r_0\left[Q_r(r_0)+\frac{1}{2}\left(q_0r_0-k_0w(r_0)r_0\right)\right]\cdot\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)-$$
$$-\frac{1}{4}\left(q_0-k_0w(r_0)\right)\cdot\left(r^2-r_0^2\right).$$

Второе интегральное уравнение найдем, используя уравнение неразрывности деформаций, которое несложно получить из выражений (4):

$$\frac{d\kappa_\theta}{dr}=\frac{\kappa_r-\kappa_\theta}{r}. \tag{13}$$

Выражая величины $\kappa_r(r)$, $\kappa_\theta(r)$ через изгибающие моменты $M_r(r)$, $M_\theta(r)$ из соотношений (3) и подставляя затем в уравнение (13), получим:

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{M_\theta(r)-\nu_{\theta r}M_r(r)}{h^3(r)}\right]=$$
$$=\frac{\left[\left(k^2+\nu_{\theta r}\right)M_r(r)-\left(1+\nu_{\theta r}\right)M_\theta(r)\right]}{rh^3(r)}. \tag{14}$$

Это уравнение несложно преобразовать к виду:

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{M_\theta(r)-M_r(r)}{h^3(r)}\right]+\frac{\left(1+\nu_{\theta r}\right)}{r}\cdot\left[\frac{M_\theta(r)-M_r(r)}{h^3(r)}\right]=$$
$$=-\left(1-\nu_{\theta r}\right)\frac{d}{dr}\left[\frac{M_r(r)}{h^3(r)}\right]+\frac{\left(k^2-1\right)}{r}\cdot\left[\frac{M_r(r)}{h^3(r)}\right]. \tag{15}$$

После интегрирования уравнения (15) в пределах от r_0 до r и последующих преобразований получим второе интегральное уравнение в моментах разрешающей системы уравнений

$$\left[M_\theta(r)-M_r(r)\right]=-\left(1-\nu_{\theta r}\right)\cdot M_r(r)+$$
$$+\left(k^2-\nu_{\theta r}^2\right)\cdot\frac{h^3(r)}{r^{1+\nu_{\theta r}}}\int_{r_0}^{r}\frac{r_1^{\nu_{\theta r}}}{h^3(r_1)}M_r(r_1)dr_1+ \tag{16}$$
$$+\frac{h^3(r)}{h_0^3}\cdot\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1+\nu_{\theta r}}\left[M_\theta(r_0)-\nu_{\theta r}M_r(r_0)\right],$$

где $M_r(r_0)$, $M_\theta(r_0)$ — радиальный и тангенциальный изгибающие моменты на внутреннем контуре кольцевого диска.

Запишем разрешающую систему интегральных уравнений в напряжениях, воспользовавшись формулами для максимальных значений нормальных напряжений на внешних поверхностях кольцевого диска при его изгибе:

$$\sigma_r^{\max}(r)=\frac{6M_r(r)}{h^2(r)};\ \sigma_\theta^{\max}(r)=\frac{6M_\theta(r)}{h^2(r)}. \tag{17}$$

Подставляя выражения (17) в уравнения (12), (16), получим:

$$\left[\sigma_\theta^{\max}(r)-\sigma_r^{\max}(r)\right]=-\left(1-\nu_{\theta r}\right)\cdot\sigma_r^{\max}(r)+$$
$$+\left(k^2-\nu_{\theta r}^2\right)\cdot\frac{h(r)}{r^{1+\nu_{\theta r}}}\int_{r_0}^{r}\frac{r_1^{\nu_{\theta r}}}{h(r_1)}\sigma_r^{\max}(r_1)dr_1+ \tag{18}$$
$$+\frac{h(r)}{h_0}\cdot\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1+\nu_{\theta r}}\left[\sigma_\theta^{\max}(r_0)-\nu_{\theta r}\sigma_r^{\max}(r_0)\right];$$

$$\sigma_r^{\max}(r)=-\left(1-\nu_{\theta r}\right)\cdot\frac{3k_0}{E_\theta}\cdot\frac{1}{h^2(r)}\int_{r_0}^{r}\left[\left(r^2-r_1^2\right)+2r_1^2\ln\left(\frac{r_1}{r}\right)\right]\times$$
$$\times\frac{r_1}{h(r_1)}\cdot\sigma_r^{\max}(r_1)dr_1+\frac{1}{h^2(r)}\int_{r_0}^{r}\frac{h^2(r_1)}{r_1}\cdot\left[\sigma_\theta^{\max}(r_1)-\sigma_r^{\max}(r_1)\right]dr_1-$$
$$-\frac{3k_0}{E_\theta}\cdot\frac{1}{h^2(r)}\int_{r_0}^{r}\left[\left(r^2-r_1^2\right)+2r_1^2\ln\left(\frac{r_1}{r}\right)\right]\times$$
$$\times\frac{r_1}{h(r_1)}\left[\sigma_\theta^{\max}(r_1)-\sigma_r^{\max}(r_1)\right]dr_1+\frac{h_0^2}{h^2(r)}\cdot\sigma_r^{\max}(r_0)+ \tag{19}$$
$$+\frac{6r_0h_0}{h^2(r)}\left[\tau_{rz}(r_0)+\frac{1}{2}\frac{r_0}{h_0}\left(q_0-k_0w(r_0)\right)\right]\times$$
$$\times\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)-\frac{3}{2}\left(q_0-k_0w(r_0)\right)\cdot\frac{\left(r^2-r_0^2\right)}{h^2(r)},$$

где $\sigma_r^{\max}(r_0)$, $\sigma_\theta^{\max}(r_0)$ — максимальные значения радиального и тангенциального напряжений на внутреннем контуре кольцевого диска; $\tau_{rz}(r_0)=\tau_{zr}(r_0)=\dfrac{Q_r(r_0)}{h_0}$ — касательные напряжения, действующие в плоскости rz на внутреннем контуре кольцевого диска.

Уравнения (18) и (19) составляют разрешающую систему интегральных уравнений в напряжениях, описывающих напряженное состояние полярно-ортотропного кольцевого диска переменной толщины, скрепленного с упругим основанием Винклера, и испытывающего осесимметричный изгиб под действием постоянной поперечной нагрузки интенсивностью q_0.

Пусть толщина $h(r)$ диска меняется вдоль радиуса r по степенному закону: $h(r)=h_0\left(\dfrac{r}{r_0}\right)^{\alpha}$, $\alpha\in R$ и на имплантат действует постоянная сжимающая вертикальная сила F. Интенсивность постоянной поперечной нагрузки q_0 будет равна:

$$q_0 = \frac{F}{\pi\left(R^2 - r_0^2\right)}.$$

Для рассматриваемой задачи граничные условия на контурах анизотропного кольцевого диска равны:

$$w(r_0) = 0;\ M_r(r_0) = 0;\ M_r(R) = 0;\ Q_r(R) = 0.$$

Разрешающая система интегральных уравнений при заданных граничных условиях примет вид:

$$\begin{cases} \left[\sigma_\theta^{\max}(x) - \sigma_r^{\max}(x)\right] = -\left(1-\nu_{\theta r}\right)\sigma_r^{\max}(x) + \\ + \dfrac{\left(k^2 - \nu_{\theta r}^2\right)}{x^{(1-\alpha)+\nu_{\theta r}}}\displaystyle\int_1^x \dfrac{\sigma_r^{\max}(x_1)}{x_1^{\alpha-\nu_{\theta r}}}dx_1 + \dfrac{\sigma_\theta^{\max}(1)}{x^{(1-\alpha)+\nu_{\theta r}}}, \qquad (20) \\ \sigma_r^{\max}(x) = -\left(1-\nu_{\theta r}\right)\cdot\dfrac{3k_0 r_0^4}{E_\theta h_0^3}\times \\ \times\dfrac{1}{x^{2\alpha}}\displaystyle\int_1^x\left[\left(x^2 - x_1^2\right) + 2x_1^2\ln\left(\dfrac{x_1}{x}\right)\right]\cdot x_1^{1-\alpha}\sigma_r^{\max}(x_1)dx_1 + \\ + \dfrac{1}{x^{2\alpha}}\displaystyle\int_1^G\left\{x_1^{2\alpha-1} - \dfrac{3k_0 r_0^4}{E_\theta h_0^3}\left[\left(x^2 - x_1^2\right) + 2x_1^2\ln\left(\dfrac{x_1}{x}\right)\right]x_1^{1-\alpha}\right\}\times \qquad (21) \\ \times\left[\sigma_\theta^{\max}(x_1) - \sigma_r^{\max}(x_1)\right]dx_1 + \dfrac{3q_0 r_0^2}{2h_0^2}\dfrac{(1-x^2)}{x^{2\alpha}} + \\ +3\left[2\dfrac{r_0}{h_0}\tau_{rz}(1) + \dfrac{q_0 r_0^2}{h_0^2}\right]\cdot\dfrac{\ln x}{x^{2\alpha}}, \end{cases}$$

где $x = \left(\dfrac{r}{r_0}\right), x \in [1;\, \delta],\ \delta = \left(\dfrac{R}{r_0}\right)$.

Решение системы интегральных уравнений (20)–(21) будем искать методом последовательных приближений [6], положив нулевое приближение $\sigma_{r;0}^{\max}(r) = 0$.

Для n-ого приближения имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \left(\sigma_\theta^{\max}(x) - \sigma_r^{\max}(x)\right)_n = -\left(1-\nu_{\theta r}\right)\cdot\sigma_{r,n-1}^{\max}(x) + \\ + \dfrac{\left(k^2 - \nu_{\theta r}^2\right)}{x^{(1-\alpha)+\nu_{\theta r}}}\displaystyle\int_1^x \dfrac{\sigma_{r,n-1}^{\max}(x_1)}{x_1^{\alpha-\nu_{\theta r}}}dx_1 + \dfrac{A_n}{x^{(1-\alpha)+\nu_{\theta r}}}, \qquad (22) \\ \sigma_{r,n}^{\max}(x) = -\left(1-\nu_{\theta r}\right)\dfrac{3k_0 r_0^4}{E_\theta h_0^3}\times \\ \times\dfrac{1}{x^{2\alpha}}\displaystyle\int_1^x\left[x^2 - x_1^2 + 2x_1^2\ln\left(\dfrac{x_1}{x}\right)\right]x_1^{1-\alpha}\sigma_{r,n-1}^{\max}(x_1)dx_1 + \qquad (23) \\ + \dfrac{1}{x^{2\alpha}}\displaystyle\int_1^x\left\{x_1^{2\alpha-1} - \dfrac{3k_0 r_0^4}{E_\theta h_0^3}\left[x^2 - x_1^2 + 2x_1^2\ln\left(\dfrac{x_1}{x}\right)\right]x_1^{1-\alpha}\right\}\times \\ \times\left(\sigma_\theta^{\max}(x_1) - \sigma_r^{\max}(x_1)\right)_n dx_1 + \dfrac{3q_0 r_0^2}{2h_0^2}\dfrac{\left(1-x^2\right)}{x^{2\alpha}} + B_n\cdot\dfrac{\ln x}{x^{2\alpha}}. \end{cases}$$

Постоянные величины A_n, B_n вычисляются на каждом шаге из граничных условий на внешнем контуре диска.

Точность расчета определяется близостью двух последовательных приближений и, как показывает практика, для этого надо взять не менее трех приближений.

Рассмотрим сейчас растяжение анизотропного диска под действием «гидростатического давления» p_0 на его внутреннем контуре. Внешний контур диска свободный. Следовательно, граничные условия на контурах кольцевого диска запишутся в виде:

$$\sigma_r^p(r_0) = -p_0;\ \sigma_r^p(R) = 0.$$

Для произвольно заданной толщины $h(r)$ диска задача определения растягивающих нормальных напряжений, как нами было показано в работе [7], сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода. Однако в случае степенного закона изменения толщины $h(r) = h_0\left(\dfrac{r}{r_0}\right)^\alpha$, $\alpha \in R$ плоская задача теории упругости имеет точное решение. Растягивающие нормальные напряжения, возникающие под действием «гидростатического давления» p_0 на внутреннем контуре диска, равны:

$$\sigma_r^p(x) = p_0\cdot\left[\frac{\delta^{\lambda_2}}{(\delta^{\lambda_1} - \delta^{\lambda_2})}\cdot x^{\lambda_1 - 1} - \frac{\delta^{\lambda_1}}{(\delta^{\lambda_1} - \delta^{\lambda_2})}\cdot x^{\lambda_2 - 1}\right];$$
$$\sigma_\theta^p(x) = p_0\cdot\left[\frac{(\lambda_1 + \alpha)\delta^{\lambda_2}}{(\delta^{\lambda_1} - \delta^{\lambda_2})}\cdot x^{\lambda_1 - 1} - \frac{(\lambda_2 + \alpha)\delta^{\lambda_1}}{(\delta^{\lambda_1} - \delta^{\lambda_2})}\cdot x^{\lambda_2 - 1}\right], \qquad (24)$$

где $\lambda_1 = -\dfrac{\alpha}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{\alpha}{2} - \nu_{\theta r}\right)^2 + \left(k^2 - \nu_{\theta r}^2\right)}$; $\lambda_2 = -\dfrac{\alpha}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{\alpha}{2} - \nu_{\theta r}\right)^2 + \left(k^2 - \nu_{\theta r}^2\right)}$.

Используя 2-е уравнение закона Гука (уравнения (6) [5]), найдем радиальное перемещение $u(x)$ в анизотропном кольцевом диске имплантата:

$$u(x) = \frac{p_0 r_0}{E_\theta}\cdot\left[\frac{(\lambda_1 + \alpha - \nu_{\theta r})\delta^{\lambda_2}}{(\delta^{\lambda_1} - \delta^{\lambda_2})}\cdot x^{\lambda_1} - \frac{(\lambda_2 + \alpha - \nu_{\theta r})\delta^{\lambda_1}}{(\delta^{\lambda_1} - \delta^{\lambda_2})}\cdot x^{\lambda_2}\right]. \qquad (25)$$

Величину «гидростатического давления» p_0 оценим по формуле распределения напряжений в поперечном сечении круглого стержня радиуса r_0 при его центральном сжатии вертикальной силой F (с. 145, [8]):

$$p_0 = \nu_0\frac{F}{\pi r_0^2},$$

где ν_0 — коэффициент Пуассона материала высокоэластичного ядра имплантата. Более точное значение величины «гидростатического давления» p_0 можно получить экспериментальным путем.

Касательные напряжения $\tau_{r\theta}(r) = \tau_{\theta r}(r)$ в диске имплантата, возникающие при действии постоянного крутящего момента $M_{кр}$ на его внешнем контуре, определяются по формуле (с. 293, [9]):

$$\tau_{r\theta}(r) = \tau_{\theta r}(r) = \frac{M_{кр}}{2\pi r^2 h(r)} = \frac{M_{кр}}{W_{кр}},$$

где $W_{кр}(r) = 2\pi r^2 h(r)$ — момент сопротивления кручению кольцевого сечения диска.

Заключение. Предложенная математическая модель расчета напряженного состояния анизотропного кольцевого диска имплантата межпозвоночного диска достаточно точно описывает его механическое деформирование. Дальнейшее усовершенствование методики расчета позволит исследовать ударные и динамические нагрузки на имплантат межпозвоночного диска, а также рассмотреть вопросы оптимизации, надежности и долговечности таких конструкций.

Список литературы

1. Mode of access: http://www.neck.su/spinesurgeryGermany/. — Date of access: 06.06.2013.
2. Natural arch load-bearing in old and degenerated spines / P. Pollintine [et al.] // Journal of Biomechanics. — 2004. — Vol. 37. — Ph. 197–204.
3. Численный анализ механического поведения межпозвонкового диска с учетом структуры коллагеновых волокон / Е.А. Мерои [и др.] // Рос. журн. биомеханики. — 2005. — Т. 9, № 1. — С. 36–51.
4. Королевич, В.В. Интегральные уравнения Вольтерра 2-го рода в задачах осесимметричного изгиба полярно-ортотропных пластин переменной толщины, скрепленных с упругим основанием Пастернака / В.В. Королевич, Д.Г. Медведев // Вестн. БГУ. Сер. 1. — 2013. — № 2. — С. 99–105.
5. Королевич, В.В. Интегральные уравнения Вольтерра 2-го рода в задачах изгиба вращающихся полярно-ортотропных дисков переменной толщины / В.В. Королевич, Д.Г. Медведев // Вестн. БГУ. Сер. 1. — 2012. — № 3. — С. 108–116.
6. Кинасошвили, Р.С. Расчет на прочность дисков турбомашин / Р.С. Кинасошвили. — М., 1954. — 143 с.
7. Королевич, В.В. Интегральные уравнения Вольтерра 2-го рода для плоской задачи теории упругости для вращающихся полярно-ортотропных дисков переменной толщины / В.В. Королевич, Д.Г. Медведев // Вестн. БГУ. Сер. 1. — 2010. — № 1. — С. 160–162.
8. Писаренко, Г.С. Справочник по сопротивлению материалов / Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев. — Киев: Наук. думка, 1988. — 736 с.
9. Бояршинов, С.В. Основы строительной механики машин / С.В. Бояршинов. — М.: Машиностроение, 1973. — 456 с.

Karalevich U.V., Medvedev D.G.

Investigation by the method of integral equations of the stress state of the implant an intervertebral disk at axisymmetric loading

The stress state of an anisotropic ring disk of an implant of the intervertebral disk at complex axisymmetric loading is investigated in the work. The method of the integral equations is applied to the calculation of a stresses in a disk. The resolving system of integral equations is removed for the problem of an axisymmetric bend of an anisotropic ring disk of the variable thickness lying on the elastic basis of Vinkler. The received system of integral equations is tackled by the method of successive approximations. The exact solution of a flat task of the theory of elasticity is given for the calculation of the stretching stresses in the disk with the sedate law of change of its thickness testing the action of «the hydrostatic pressure» on the internal contour. A tangent stresses in a disk arising from the action of the constant torque on an external contour is calculated on known formulas. The offered mathematical model of calculation of the stress state of an implant of an intervertebral disk under the influence of the complex axisymmetric loading rather precisely describes its mechanical deformation.

Keywords: *an implant of an intervertebral disk, an anisotropic disk, integral equations, a method of successive approximations*

Поступила в редакцию 15.10.2013.