



# МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 621.01

Г.А. ГЕВОРКЯН, канд. техн. наук  
Институт механики НАН Республики Армения, г. Ереван

## ПЛОСКО-ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

*В настоящей статье формулируется плоско-пространственная задача метода конечных элементов. Эта задача адаптирована к статическому исследованию упругого поперечного изгиба тонких пластинок как плоско-пространственных систем. В работе предлагается оригинальная концепция исследования напряженно-деформированного состояния тонких пластинок, заключающаяся в приложении общепринятой расчетной схемы чистого сдвига к традиционному МКЭ. Наряду с формальным математическим описанием новой расчетной концепции приводится также пример численного моделирования приведенной формы прогибов тонкой полоски на основе предлагаемого формализма.*

**Ключевые слова:** метод конечных элементов, поперечный изгиб, чистый сдвиг, тонкие пластинки, плоско-пространственные системы

**Введение.** Метод конечных элементов в настоящее время является мощнейшим вычислительным средством, предназначенным для численного решения сложных математических задач. Первоначально возникший на почве вариационных принципов механики, МКЭ в скором времени вытеснил практически все устоявшиеся методы вариационного исчисления, занял среди них лидирующие позиции и в самом недавнем прошлом стал по праву квалифицироваться как вполне самостоятельный инструмент решения широких классов задач механики сплошных сред и теории упругости.

Плоская, осесимметричная и пространственная задачи теории упругости, изначально адаптированные к МКЭ [1], сформировали на протяжении нескольких десятилетий классический МКЭ, который покрывает значительный сектор востребованных на практике инженерно-технических задач и служит фундаментом для построения все новых и новых его модификаций. Однако существует достаточно широкий класс задач, не поддающийся рациональному разрешению посредством классического МКЭ и наиболее распространенных его разновидностей. К указанному классу задач в первую очередь относятся задачи поперечного изгиба тонких несимметричных пластинок в статике упруго-деформируемого тела. В самом деле, всякое возможное определение функции прогибов тонкой пластинки в свете формулировки пространственной задачи МКЭ [1] заведомо представляется не-

допустимо громоздким, тогда как среди общеизвестных модификаций МКЭ [1, 4–7] нет такой, которая бы удовлетворяла крайним особенностям этого вида нагружения. Иными словами, выясняется, что возможности классического МКЭ не распространяются на известный в литературе обширный класс упругих плоско-пространственных систем [3].

В настоящей работе предлагается оригинальная концепция МКЭ, с одной стороны, основывающаяся на первоначальной доктрине треугольной дискретизации исследуемой области на конечные элементы, которая, как известно [1], обеспечивает строгую определенность функций перемещений на границах конечных подобластей, а, с другой стороны, позволяет эффективно исследовать всю возможную гамму плоско-пространственных упругих систем. Эту категорию задач теории упругости, вообще говоря, условимся здесь и далее для определенности называть плоско-пространственными задачами.

**Аксиоматика метода.** Рассмотрим некоторую подобласть (рисунок 1) тонкой пластинки, разбитой на треугольные конечные элементы [1]. В силу предположения о малости компонент тензоров деформации и малого поворота имеем

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij} \ll 1; \\ \omega_{ij} \ll 1. \end{cases} \quad (1)$$

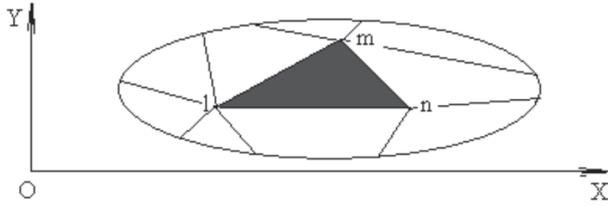


Рисунок 1 — Схема отдельно взятого конечного элемента

Далее, пренебрегая продольными смещениями узловых точек как величинами высшего порядка малости по сравнению с поперечными перемещениями [2], отождествляем интерполяционную функцию упругих перемещений точек пластинки с функцией прогибов.

**Формулирование метода.** Определяем в пределах конечного элемента (*lmn*) (см. рисунок 1) интерполяционную функцию прогибов в виде линейной функции координат:

$$w(x, y) = \alpha + \beta x + \gamma y. \quad (2)$$

Для определения коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  в функции (2) выражаем перемещения  $w(x, y)$  через координаты узловых точек:

$$\begin{cases} w(x = x_l, y = y_l) = \alpha + \beta x_l + \gamma y_l = w_l; \\ w(x = x_m, y = y_m) = \alpha + \beta x_m + \gamma y_m = w_m; \\ w(x = x_n, y = y_n) = \alpha + \beta x_n + \gamma y_n = w_n. \end{cases} \quad (3)$$

Решая систему уравнений (3) относительно  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , и, после чего, подставляя найденные выражения в функцию прогибов (2), имеем [2]:

$$w(x, y) = (a_l + b_l x + c_l y)w_l + (a_m + b_m x + c_m y)w_m + (a_n + b_n x + c_n y)w_n, \quad (4)$$

причем

$$\begin{aligned} a_l &= \frac{1}{2\Delta}(x_m y_n - x_n y_m); & b_l &= \frac{1}{2\Delta}(y_m - y_n); \\ c_l &= \frac{1}{2\Delta}(x_n - x_m), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\Delta$  — площадь конечного элемента (*lmn*). Коэффициенты  $a_m$ ,  $b_m$ ,  $c_m$  и  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$  в зависимости (4) образуются путем круговой перестановки индексов *l*, *m* и *n* в выражениях (5).

Перегруппировав члены в зависимости (4), находим выражения искомым коэффициентов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  через узловые перемещения (3) в компактной форме:

$$\begin{cases} \alpha = a_l w_l + a_m w_m + a_n w_n; \\ \beta = b_l w_l + b_m w_m + b_n w_n; \\ \gamma = c_l w_l + c_m w_m + c_n w_n. \end{cases} \quad (6)$$

Стало быть, деформации конечного элемента (*lmn*), подчиняясь дифференциальным зависимостям Коши [2], будут определяться следующим образом:

$$\begin{cases} \epsilon_x = \epsilon_y = 0; \\ \epsilon_z = \frac{dw}{dz} = 0; \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = 0; \\ \gamma_{yz} = \gamma; \\ \gamma_{xz} = \beta. \end{cases} \quad (8)$$

Отсутствие линейных деформаций, о чем свидетельствуют уравнения (7), выражают равенство нулю объемной деформации элемента (*lmn*), т. е.

$$\epsilon_\Sigma = \sum_{i=1}^3 \epsilon_i = 0, \text{ что характерно для тонких пластинок,}$$

подверженных влиянию на уровне энергетического баланса со стороны одной лишь энергии формоизменения [3].

Соотношения (7) и (8) позволяют записать обобщенный закон Гука в матричной форме следующим образом:

$$[\tau] = [G][\gamma], \quad (9)$$

где

$$[\tau] = \begin{bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}; \quad [G] = \begin{bmatrix} G_{yz} & 0 \\ 0 & G_{xz} \end{bmatrix}; \quad [\gamma] = \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}.$$

Ясно, что для пластинки из однородного и изотропного материала имеет место:  $G_{yz} = G_{xz} = G$ . Любопытно рассмотреть геометрическую картину процесса силового деформирования тонкой пластинки в одной из плоскостей *xOz* или *yOz*.

Как видно из рисунка 2, призматические элементы в плоскости *xOz* будут тем точнее подчиняться формоизменению по толщине пластинки, типичному для схемы чистого сдвига [3], чем меньше окажутся размеры сторон конечных элементов.

Пользуясь принципом возможных работ, составляем вариационное уравнение МКЭ на виртуальных перемещениях узловых точек элемента (*lmn*):

$$\delta A = \delta A^e + \delta A^v + \delta A^s = 0,$$

где  $A^e$ ,  $A^v$  и  $A^s$  — работы упругих, объемных и поверхностных сил соответственно, которое можно записать в развернутом виде

$$\sum_{\eta=1}^N \left( \iiint_{V_\eta} [\delta \gamma_\eta]^T [\tau_\eta] dV - \iint_{V_\eta} P_v \delta w dV - \iint_{S_\eta} P_s F \delta w dS \right) = 0, \quad (10)$$

где  $N$  — число элементов.

Выразим два последних уравнения системы (6) в матричной форме

$$[\gamma] = [C][W], \quad (11)$$

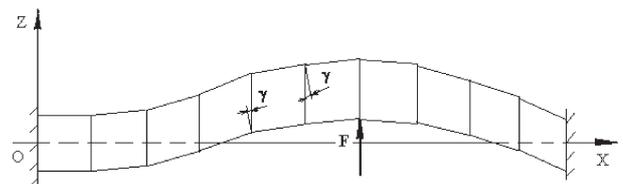


Рисунок 2 — Расчетная схема поперечного изгиба тонкой пластинки

где

$$[C] = \begin{bmatrix} c_l & c_m & c_n \\ b_l & b_m & b_n \end{bmatrix} \text{ и } [W] = [w_l, w_m, w_n]^T;$$

точно так же поступим и с уравнением (4), после чего получим

$$w = [B][W], \quad (12)$$

где

$$[B] = [a_l + b_l x + c_l y, a_m + b_m x + c_m y, a_n + b_n x + c_n y].$$

На основании зависимостей (11) и (12) нетрудно заключить для элемента  $(lmn)$  следующие очевидные равенства в вариациях:

$$[\delta \gamma_\eta] = [C_\eta][\delta W_\eta] \text{ и } \delta w_\eta = [B_\eta][\delta W_\eta],$$

после подстановки которых в уравнение (10) получаем фундаментальное уравнение плоско-пространственной задачи МКЭ, а именно,

$$\sum_{\eta=1}^N [\delta W_\eta]^T \left[ \left( \iiint_{V_\eta} [C_\eta]^T [G][C_\eta] dV \right) [W_\eta] - \right. \\ \left. - \iiint_{V_\eta} [B_\eta]^T [P_\eta^v] dV - \iint_{S_\eta} [B_\eta]^T [P_\eta^s] dS \right] = 0,$$

где  $\bar{P}_\eta^v = [P_\eta^v]$  и  $\bar{P}_\eta^s = [P_\eta^s]$  — действующие в узлах элемента  $(lmn)$  эквивалентные векторы объемных и поверхностных сил соответственно, притом получает определенность матрица жесткости размерности  $(3 \times 3)$  рассматриваемого конечного элемента, т. е.

$$[K_\eta] = \iiint_{V_\eta} [C_\eta]^T [G][C_\eta] dV = \begin{bmatrix} K_\eta^{ll} & K_\eta^{lm} & K_\eta^{ln} \\ K_\eta^{ml} & K_\eta^{mm} & K_\eta^{mn} \\ K_\eta^{nl} & K_\eta^{nm} & K_\eta^{nn} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, основное уравнение плоско-пространственной задачи МКЭ (12) можно записать в компактном виде:

$$\sum_{\eta=1}^N [\delta W_\eta]^T ([K_\eta][W_\eta] - [Q_\eta]) = 0, \quad (13)$$

где суммарный вектор узловых усилий складывается из векторов объемных, поверхностных и сосредоточенных сил, т. е.

$$[Q_\eta] = [Q_\eta^f] + [Q_\eta^s] + [Q_\eta^v].$$

Поскольку матричное уравнение (13) должно быть справедливо для любых векторов возможных перемещений  $\delta \vec{W}_\eta$ , а именно, для  $\delta \vec{W}_\eta \neq 0$ ,  $\eta = 1, \dots, n$ , то из этого следует система линейных алгебраических уравнений:

$$[K][W] = [Q], \quad (14)$$

где

$$[K] = \sum_{\eta=1}^N [K_\eta]; \quad [W] = [W_1, W_2, \dots, W_\lambda]^T;$$

$$[Q] = [Q_1, Q_2, \dots, Q_\lambda]^T,$$

причем  $[K]$  в уравнении (14) означает матрицу жесткости всей системы элементов, а  $\lambda$  — общее число степеней свободы упругой системы.

Полученная система (14) линейных алгебраических уравнений плоско-пространственной задачи МКЭ, как известно [1], не является разрешающей системой в силу вырожденности составляющих ее уравнений.

Для получения разрешающей системы исследуемой задачи МКЭ требуется произвести процедуру исключения [1] фиксированных степеней свободы упругой системы, для которых справедливы условия:

$$W_i = 0, \quad i = \zeta + 1, \zeta + 2, \dots, \lambda,$$

где  $\zeta$  — число «подвижных» узловых точек, а  $\xi = \lambda - \zeta$  — число «неподвижных» узлов, причем  $\xi \geq 1$ .

В соответствии с условным разбиением общего числа узловых точек на «подвижные» и «неподвижные», система уравнений (14) распадается на блоки:

$$\begin{bmatrix} K^{mm} & K^{mf} \\ K^{fm} & K^{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^m \\ W^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^m \\ Q^f \end{bmatrix},$$

откуда, с одной стороны, вытекает разрешающая система линейных алгебраических уравнений относительно узловых прогибов тонкой пластинки, а именно,

$$[K^{mm}][W^m] = [Q^m],$$

а, с другой стороны, — векторное уравнение для нахождения реакций внешних связей, т. е.

$$[Q^f] = [K^{fm}][W^m].$$

В заключение предполагается процедура вычисления угловых деформаций и касательных напряжений на основании рассчитанных узловых перемещений последовательно по формулам (11) и (9).

**Пример численной реализации метода.** Рассмотрим задачу поперечного изгиба образующей многосвязную область тонкой сложнопрофильной полосы (рисунок 3), консольно заземленной по всей дуге окружного контура. Длина изображенной на рисунке 3 полосы  $l = 0,258$  м, толщина полосы  $h = 10^{-3}$  м, а величина поперечной силы —  $F = 10$  Н; модуль упругости и коэффициент Пуассона будут полагаться равными  $E = 200 \cdot 10^9$  Па и  $\nu = 0,3$ .

В случае дискретизации области на 164 конечных треугольника с образованием 130 общего числа степеней свободы сложнопрофильной полосы форма ее приведенной упругой линии (приведенной к упругому перемещению конце-

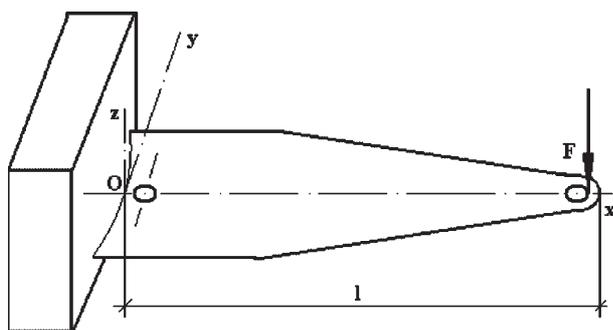


Рисунок 3 — Схема тонкой защемленной многосвязной полоски

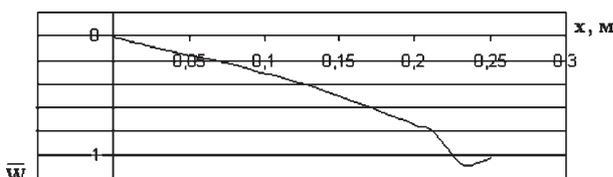


Рисунок 4 — Приведенная форма упругой линии тонкой полоски

вой точки, т. е.  $\bar{W} = \frac{W}{u(x=l)}$ ), образуемой центрами тяжести поперечных сечений полоски, изображается графиком на рисунке 4.

**Заключение.** В работе формулируется новая методика анализа тонких пластинок методом конечных элементов. Основным преимуществом новой разновидности метода по отношению к существующим аналитическим и численным подходам, главным образом, таким как функции Бесселя и метод граничных интегралов, является доступность в решении сложных задач. В самом деле, основные трудности или ограничения, налагаемые указанными общепринятыми подходами к решению рассматриваемых задач, обусловлены такими особенностями, как многосвязность области, гладкость граничных поверхностей и контуров, специфика задания краевых

условий, по отношению к которым МКЭ, в сущности, неприхотлив. Вышесказанное подтверждается на численном решении конкретного примера.

*Автор выражает глубокую признательность профессору Ваняну А.А. за ценные советы и замечания.*

#### Список обозначений

$E$  — модуль Юнга первого рода (модуль продольной упругости);

$G$  — модуль Юнга второго рода (модуль сдвига);

$\nu$  — коэффициент Пуассона (коэффициент поперечной деформации);

$w$  — функция поперечных перемещений (функция прогибов);

$\bar{W}$  — обобщенное перемещение (узловое перемещение);

$Q$  — обобщенная сила (узловая сила);

$K$  — матрица жесткости системы;

$\omega$  — символ малого жесткого поворота;

$\epsilon$  — линейная деформация сплошной среды;

$\gamma$  — угловая деформация сплошной среды;

$\tau$  — касательное напряжение.

#### Список литературы

1. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. — М., 1975.
2. Демидов, С.П. Теория упругости / С.П. Демидов. — М., 1979.
3. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. — М., 1970.
4. Сабоннадьер, Ж.К. Метод конечных элементов и САПР / Ж.К. Сабоннадьер. — М.: Мир, 1989.
5. Секулович, М. Метод конечных элементов / М. Секулович. — М.: Стройиздат, 1993.
6. Крылов, О.В. Метод конечных элементов и его применение в инженерных расчетах / О.В. Крылов. — М.: Радио и связь, 2002.
7. Расторгуев, Г.И. Основы метода конечных элементов в механике деформируемых тел / Г.И. Расторгуев, В.Л. Присекин. — НГТУ, 2010.

Gevorgyan H.A.

#### A plane-spatial problem in the finite element method

A new plane-spatial problem of the finite element method is formulated. This problem is adapted at the static analysis of thin plate's flexion as plane-spatial flexible systems. An original conception of thin plates strain-stress state's investigation, which constitutes an application of the pure shear calculation scheme at the traditional FEM, is proposed. A formal mathematical description and a numerical simulation test for a very thin stripe example are brought.

**Keywords:** finite element method, cross flexure, pure shear, lamel, flat-space systems

Поступила в редакцию 29.04.2013.