



# БИОМЕХАНИКА

УДК 539.3+612.311

С.М. БОСЯКОВ, канд. физ.-мат. наук; Г.И. МИХАСЕВ, д-р физ.-мат. наук  
Белорусский государственный университет, г. Минск

## АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАЧАЛЬНЫХ ПОСТУПАТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ КОРНЯ ЗУБА В ЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ ПЕРИОДОНТАЛЬНОЙ СВЯЗКЕ

*В работе представлены результаты математического моделирования напряженно-деформированного состояния периодонтальной связки, возникающего при корпусном перемещении корня зуба. Предполагается, что корень зуба является абсолютно жестким телом, периодонтальная связка имеет постоянную толщину. Решение для перемещений формулируется в условиях плоского напряженного состояния для сечения корня зуба и периодонтальной связки плоскостью перпендикулярной продольной оси зуба. Граничные условия соответствуют поступательному перемещению корня в направлении действия нагрузки и жесткому закреплению внешней поверхности периодонтальной оболочки в костной ткани зубной альвеолы. Получены выражения для перемещений точек периодонта в зависимости от радиальной и окружной координат. Проведен сравнительный анализ величин сосредоточенных сил, необходимых для фиксированного поступательного перемещения корня зуба, рассчитанных на основании предложенной аналитической модели и моделей несжимаемого периодонта в форме кругового параболоида и гиперболоида.*

**Ключевые слова:** периодонтальная связка, поступательное перемещение корня зуба, напряженно-деформированное состояние периодонта, равновесие корня зуба в периодонтальной связке

**Введение.** Одним из основных вопросов ортодонтии является профилактика и коррекция неправильного прикуса, а также других зубочелюстных аномалий. При этом важной задачей является прогнозирование начальных перемещений [1, 2], возникающих при кратковременном действии нагрузки, после снятия которой, зуб возвращается на прежнее место [3, 4]. Зубы окружены периодонтальной связкой, которая является тонкой мембраной. Она состоит из коллагеновых волокон и обеспечивает прикрепление зуба к окружающей альвеолярной кости. В нормальных условиях контакт между корнем зуба и костной тканью отсутствует. Действующая на коронку зуба нагрузка передается на альвеолярную кость посредством деформаций периодонтальной связки. В результате биологического отклика костной ткани альвеолярного отростка возникает ортодонтическое изменение положения зубов [5, 6]. Основываясь на высокой упругости тканей периодонтальной связки по сравнению с костями и зубами, большинство авторов указывают на то, что именно периодонт определяет начальные перемещения зуба [7–10].

Расчету начальной подвижности однокоренных и многокоренных зубов посвящены много-

численные конечно-элементные исследования, в частности [10–17]. При математическом моделировании напряженно-деформированного состояния системы «зуб – периодонтальная связка», в большинстве случаев корень зуба аппроксимируется круговым (эллиптическим) параболоидом или гиперболоидом [18–21]. Аналитические подходы к определению положения центра сопротивления и/или вращения, а также результаты исследований напряженно-деформированного состояния периодонтальной связки, возникающего при начальных перемещениях корня зуба в форме конуса, кругового и эллиптического параболоида представлены в работах [9, 18, 19, 22, 23]. В то же время, эти подходы основаны на упрощающих предположениях. В частности, в работах [18, 19, 23] на основании несжимаемости тканей периодонтальной связки предполагается, что ее полная деформация равна ширине периодонтальной щели по нормали к поверхности зуба. В работах [20, 21] при нахождении напряженно-деформированного состояния периодонта полагаются известной зависимостью перемещения внутренней поверхности периодонтальной связки от пространственных координат. Более стро-

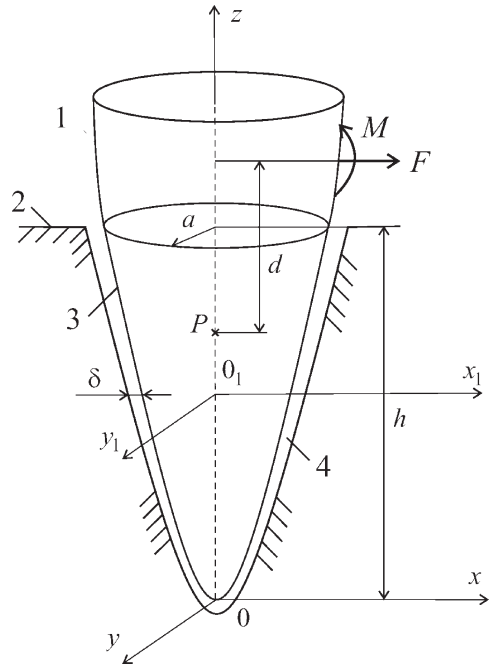
гий подход к исследованию начальных перемещений реализован в работе [9] для модели корня зуба в форме конуса. При определении центра вращения и начальных перемещений относительно пародонта использовано выражение для потенциала в полярной системе координат, связанной с вершиной сечения конуса. Выражение для потенциала сформулировано на основании функции напряжений, удовлетворяющей уравнению совместности для плоского напряженного состояния. Зависимости между потенциалом и системой нормальных и поперечных сил, а также изгибающих моментов, приложенных к внешней поверхности сечения корня, установлены с применением уравнений равновесия корня зуба. Сечение корня зуба находится в плоскости, проходящей через продольную ось зуба. Для нахождения неизвестных постоянных интегрирования сформулированы граничные условия для перемещений в полярной системе координат. Периодонтальная связка не учитывается и предполагается, что корень зуба жестко закреплен в костной ткани зубной альвеолы. В настоящей работе развивается подход, предполагающий использование функции напряжений в случае плоского деформированного состояния для определения напряженно-деформированного состояния периодонтальной связки в сечении плоскостью перпендикулярной продольной оси зуба.

**Равновесие корня зуба в периодонтальной связке.**

Будем предполагать корень зуба абсолютно жестким по сравнению с тканью периодонтальной связки. Система сил, действующих на корень зуба, приводит к его корпусному перемещению в периодонте. На практике этого добиваются одновременным приложением к зубу сосредоточенной нагрузки и пары сил [24–26]. На рисунке 1 показана система сил, действующих на корень зуба, а также обозначены его геометрические размеры и система координат, связанная с зубом.

Рассмотрим положение равновесия сечения корня зуба в плоскости  $x_1y_1$ , параллельной плоскости  $xOy$ , в условиях плоской деформации (предполагаем, что сечение корня зуба, любой плоскостью, проходящей перпендикулярно продольной оси зуба  $Oz$ , является круговым). При поступательном перемещении в периодонте вдоль оси  $Ox$  корень зуба смещается по горизонтали на величину  $u_0$ . Предположение о плоской деформации можно сделать, опираясь на высокое значение коэффициента Пуассона (0,45–0,49 [27, 28]), указывающее на несжимаемость тканей периодонта. Положение сечения корня при отсутствии нагрузки и его положение равновесия при поступательном смещении в плоскости  $x_1y_1$ , а также геометрические размеры сечения показаны на рисунке 2.

Уравнения равновесия периодонтальной связки представим в следующем виде:



**Рисунок 1** — Модель начальных поступательных перемещений корня зуба в периодонтальной связке: 1 — коронка зуба; 2 — костная ткань зубной альвеолы; 3 — корень зуба; 4 — периодонтальная шель постоянной по нормали к поверхности корня толщины;  $F$  — сосредоточенная сила, приложенная к коронке;  $M = Fd$  — момент сил ( $d$  — расстояние между точкой приложения силы и центром вращения  $P$ );  $a$  — радиус сечения корня зуба на уровне альвеолярного гребня;  $h$  — высота корня зуба;  $\delta$  — ширина периодонтальной шели по горизонтали в плоскости  $x_1y_1$  параллельной плоскости  $xOy$

$$\begin{aligned}
 &A_{11}u_r(r_0, \varphi) + A_{12}u_\varphi(r_0, \varphi) = 0; \\
 &A_{21}u_r(r_0, \varphi) + A_{22}u_\varphi(r_0, \varphi) = 0; \\
 &A_{11} = r_0 \frac{\partial^2}{\partial r_0^2} + \frac{\partial}{\partial r_0} - \frac{1}{r_0} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{r_0} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}; \\
 &A_{12} = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial r_0} - \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial \varphi}; \\
 &A_{21} = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial r_0} + \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial \varphi}; \\
 &A_{22} = \frac{\mu r_0}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial r_0^2} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial}{\partial r_0} - \\
 &\quad - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $u_r(r_0, \varphi)$ ,  $u_\varphi(r_0, \varphi)$  — радиальное и окружное перемещения точек периодонтальной связки соответственно;  $\lambda, \mu$  — коэффициенты Ламе.

Перейдем к безразмерным перемещениям и координатам  $u(r, \varphi) = u_r(r_0, \varphi)/h$ ,  $v(r, \varphi) = u_\varphi(r_0, \varphi)/h$  и  $r = r_0/h$  ( $h$  — высота корня зуба). После соответствующих преобразований система (1) примет вид:

$$\begin{aligned}
 &a_{11}u(r, \varphi) + a_{12}v(r, \varphi) = 0; \\
 &a_{21}u(r, \varphi) + a_{22}v(r, \varphi) = 0; \\
 &a_{11} = r(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1-\nu}{r} + \\
 &\quad + \frac{1-2\nu}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2};
 \end{aligned} \tag{2}$$

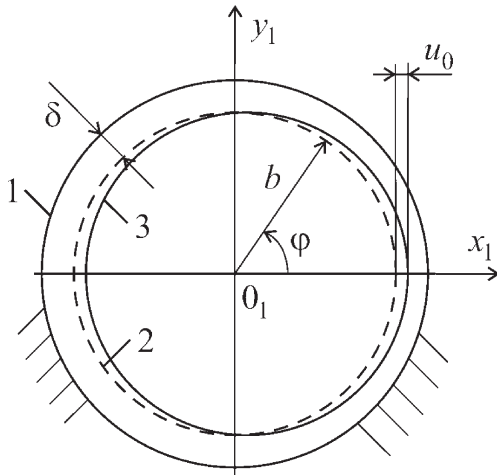


Рисунок 2 — Положение сечения корня зуба в плоскости  $x_1O_1y_1$  до и после перемещения на величину  $u_0$ ; 1 — внешний контур периодонтальной связки жестко защемленный на поверхности зубной альвеолы; 2 — положение сечения корня зуба до действия нагрузки; 3 — положение сечения корня зуба после действия нагрузки;  $u_0$  — смещение корня зуба в направлении оси  $O_1x_1$ ;  $\varphi$  — полярный угол

$$a_{12} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial r} - \frac{3-4\nu}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi};$$

$$a_{21} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial r} + \frac{3-4\nu}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi};$$

$$a_{22} = \frac{(1-2\nu)r}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1-2\nu}{2} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1-2\nu}{r} + \frac{1-\nu}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Рассмотрим граничные условия для перемещений  $u$  и  $v$ :

$$u(b, \varphi) = u_0 \cos(\varphi); \quad v(b, \varphi) = u_0 \sin(\varphi);$$

$$u(b_1, \varphi) = v(b_1, \varphi) = 0; \quad b_1 = b + \delta. \quad (3)$$

Решение краевой задачи (2), (3) примем в виде [29]

$$u(r, \varphi) = \left( c_1 r^2 (1-4\nu) + \frac{c_2}{r^2} - \frac{4c_3(1-\nu)}{3-4\nu} + c_3 \ln(r) + c_4 \right) \cos(\varphi); \quad (4)$$

$$v(r, \varphi) = \left( c_1 r^2 (5-4\nu) + \frac{c_2}{r^2} + c_3 - c_3 \ln(r) - c_4 \right) \sin(\varphi). \quad (5)$$

На основании выражений (3)–(5) находим

$$c_1 = \frac{b^2 u_0 (3-4\nu) \ln(b/b_1)}{(b^2 - b_1^2)(b_1^2 - b^2 + (b^2 + b_1^2)(3-4\nu)^2 \ln(b/b_1))};$$

$$c_2 = \frac{b^2 b_1^2 u_0 (b^2 - b_1^2 - b_1^2 (3-4\nu)^2 \ln(b/b_1))}{(b^2 - b_1^2)(b_1^2 - b^2 + (b^2 + b_1^2)(3-4\nu)^2 \ln(b/b_1))};$$

$$c_3 = \frac{2b^2 u_0 (3-4\nu)}{b_1^2 - b^2 + (b^2 + b_1^2)(3-4\nu)^2 \ln(b/b_1)};$$

$$c_4 = \frac{b^2 u_0 ((b^2 - b_1^2)(7-8\nu) + 2(3-4\nu))}{(b^2 - b_1^2)(b_1^2 - b^2 + (b^2 + b_1^2)(3-4\nu)^2 \ln(b/b_1))} \times \frac{(b_1^2 \ln(b) - b^2 \ln(b_1))}{(b^2 - b_1^2)(b_1^2 - b^2 + (b^2 + b_1^2)(3-4\nu)^2 \ln(b/b_1))}.$$

Подставляя константы  $c_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$  в соотношения (4), (5) получим выражения, определяющие зависимость перемещений точек периодонта от радиальной и окружной координат при действии нагрузки, которая приводит к корпусному смещению корня зуба с круговым поперечным сечением в горизонтальной плоскости.

**Напряженно-деформированное состояние периодонтальной связки.** Для нахождения перемещения внутреннего контура периодонтальной связки (внешнего контура корня зуба) на величину  $u_0$  при действии нагрузки рассмотрим уравнения равновесия сечения зуба под действием сосредоточенной силы  $F$  и возникающей реакции периодонта:

$$\int_S (\sigma_{rr} n_1 + \sigma_{r\varphi} n_2) dS - F = 0;$$

$$\int_S (\sigma_{r\varphi} n_1 + \sigma_{\varphi\varphi} n_2) dS = 0, \quad (6)$$

$$\int_S ((\sigma_{r\varphi} n_1 + \sigma_{\varphi\varphi} n_2) \cos(\varphi) - (\sigma_{rr} n_1 + \sigma_{r\varphi} n_2) \sin(\varphi)) r dS = 0,$$

где  $n_1 = -\cos(\varphi)$ ,  $n_2 = -\sin(\varphi)$  — компоненты вектора единичной нормали к внешнему контуру периодонтальной связки;  $S$  — контур корня зуба 3, обозначенный на рисунке 2. Компоненты тензора напряжений имеют следующий вид ( $E$  — модуль упругости периодонтальной связки)

$$\sigma_{rr} = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \sigma_{r\varphi} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \right) \right);$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \lambda \theta + \frac{2\mu}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right); \quad \theta = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(ur)}{\partial r} + \frac{\partial(ur)}{\partial \varphi} \right). \quad (7)$$

Из первого условия равновесия (6) будем иметь

$$Ku_0 = \frac{F}{Eh^2};$$

$$K = \frac{4\pi \left( ((3-4\nu)b_1^4 + b^4)(3-4\nu) \ln(b_1/b) - (b_1^2 - b^2)^2 \right)}{(1+\nu) \left( (b_1^2 - b^2)^2 - (b_1^4 - b^4)(3-4\nu)^2 \ln(b_1/b) \right)}. \quad (8)$$

Второе и третье уравнения (6) удовлетворяются тождественно.

Выполним расчет нагрузки  $F$ , необходимой для перемещения корня зуба на величину  $u_0 = 0,2$  мкм в линейно упругой периодонтальной оболочке, упругие свойства которой характеризуются постоянными  $E = 680$  кПа и  $\nu = 0,49$  [18]. Геометрические размеры корня зуба определяются следующими

ми константами:  $h = 13$  мм,  $a = 3,9$  мм; толщина периодонтальной щели по нормали к внешней поверхности корня зуба  $\delta_0 = 0,229$  мм [18]. Расчет нагрузки выполним для случаев, когда внешняя и внутренняя поверхности периодонтальной связки имеют форму кругового гиперboloида и параболоида:

$$f_{02}(x, y, z) = z - \frac{h}{a\sqrt{1+p^2} - p} \left( \sqrt{x^2 + y^2 + (ap)^2} - ap \right) = 0; \quad (9)$$

$$f_2(x, y, z) = z + n_{2z}\delta_0 - \frac{h}{a\sqrt{1+p^2} - p} \times \left( \sqrt{(x+n_{2x}\delta_0)^2 + (y+n_{2y}\delta_0)^2 + (ap)^2} - ap \right) = 0; \quad (10)$$

$$f_{01}(x, y, z) = z - \frac{h}{a^2}(x^2 + y^2) = 0; \quad (11)$$

$$f_1(x, y, z) = z + n_{1z}\delta_0 - \frac{h}{a^2} \left( (x+n_{1x}\delta_0)^2 + (y+n_{1y}\delta_0)^2 \right) = 0, \quad (12)$$

где  $(n_{ix}, n_{iy}, n_{iz})$  — компоненты единичного вектора нормали к поверхности внутренней поверхности периодонтальной связки ( $i = 1$  соответствует периодонтальной связке в форме кругового параболоида;  $i = 2$  — периодонтальной связке в форме кругового гиперboloида);  $p$  — параметр, характеризующий закругление вершины корня зуба (при  $p = 0$  корень зуба переходит в круговой конус). В нашем случае принимаем  $p = 0,4$ . Функции (9) и (10) соответствуют внутренней и внешней поверхности периодонтальной связки в форме кругового гиперboloида, функции (11) и (12) — внутренней и внешней поверхностям периодонтальной связки в форме кругового параболоида.

В таблице приведены результаты вычислений нагрузки для сечения корня, расположенного в средней части зубной альвеолы, находящейся на высоте 6,5 мм от апекса. Помимо этого, в таблице приведены значения нагрузок, определенных в работах [19, 30], для корня зуба в форме кругового параболоида и гиперboloида при тех же геометрических размерах корня зуба и периодонта, а также постоянных упругости для периодонтальной связки. Отметим, что в работах [19, 30] анализ напряженно-деформированного состояния периодонта проведен для поступательного перемещения корня в горизонтальном направлении в предположении о несжимаемости тканей периодонта.

Из таблицы видно, что значения нагрузки, рассчитанные в условиях плоского напряженного состояния, для смещения корня зуба в форме кругового параболоида или гиперboloида на 0,2 мкм в линейно упругом периодонте незначительно отличаются от значений нагрузки, рассчитанных в предположении о несжимаемости периодонта.

Таблица — Значения сосредоточенной силы, необходимые для корпусного смещения корня зуба кругового поперечного сечения в линейно упругой периодонтальной связке на 0,2 мкм (в скобках приведены значения сосредоточенной силы, полученные в работах [19, 30] на основании предположения о несжимаемости тканей периодонта)

Геометрическая форма периодонтальной связки	Радиус $b$ , мм	Радиус $b_1$ , мм	Величина нагрузки $F$ , Н
Круговой гиперboloид	2,4212	2,6567	0,86 (0,93 [30])
Круговой параболоид	2,7577	2,9918	1,0 (1,07 [19])

**Заключение.** Выражения для радиальных и окружных перемещений точек периодонтальной связке, полученные для случая поступательного перемещения корня зуба кругового поперечного сечения в горизонтальном направлении совместно с уравнениями равновесия позволяют оценить напряженно-деформированное состояние тканей периодонта. Сравнительный анализ величин сосредоточенных сил, рассчитанных на основании предложенной аналитической модели, и подходов, основанных на свойстве несжимаемости периодонта, указывает на достаточно высокое совпадение результатов. Это позволяет сделать вывод о возможности использования полученных соотношений для перемещений в условиях плоской деформации для оценки напряженно-деформированного состояния периодонтальной связки, за исключением областей вблизи апекса и альвеолярного гребня. Представленный подход может быть применен для определения благоприятных для ортодонтического перемещения зубов значений нагрузки по данным для оптимальных напряжений, возникающих в периодонтальной связке [31], а также для разработки моделей перестройки костной ткани при ортодонтическом движении зубов на основании расчета напряжений и деформаций периодонтальной связки [32, 33].

### Список литературы

1. Biomechanical features of the periodontium: An experimental pilot study in vivo / M. Cronau [et al.] // Am. J. Orthod. Dentofacial Orthop. — 2006. — Vol. 129. — Pp. 599.e13–599.e21.
2. Ren, Y. Optimum force magnitude for orthodontic tooth movement: a systematic literature review / Y. Ren, C. Jaap, A. Kuijpers-Jagtman // Angle Orthod. — 2003. — Vol. 73. — Pp. 86–92.
3. Patterns of initial tooth displacement associated with various root lengths and alveolar bone heights / K. Tanne [et al.] // Am. J. Dentofacial Orthop. — 1991. — Vol. 100. — Pp. 66–71.
4. Numerical simulation of the biomechanical behaviour of multi-rooted teeth / A. Ziegler [et al.] // European Journal of Orthodontics. — 2005. — Vol. 27. — Pp. 333–339.
5. Masella, R.S. Current concepts in the biology of orthodontic tooth movement / R.S. Masella, M. Meister // Am. J. Orthod. Dentofacial. Orthop. — 2006. — Vol. 129, No. 4. — Pp. 458–468.
6. Wise, G.E. Mechanisms of tooth eruption and orthodontic tooth movement / G.E. Wise, G.J. King // J. Dent. Res. — 2008. — Vol. 87, No. 5. — Pp. 414–434.
7. Bourauel, C. Simulation of orthodontic tooth movements — a comparison of numerical models / C. Bourauel [et al.] // J. Orofacial Orthoped. — 1999. — Vol. 60. — Pp. 136–151.



8. Nägerl, H. Discussion: A FEM study for the biomechanical comparison of labial and palatal force application on the upper incisors / H. Nägerl, D. Kubein-Meesenburg // Fortschritte der Kieferorthopädie. — 1993. — Vol. 54. — Pp. 229–230.
9. Nikolai, R.J. Investigation of Root-Periodontium Interface Stresses and Displacements for Orthodontic Application / R.J. Nikolai, J.W. Schweiker // Exp. Mech. — 1972. — Vol. 12, No 9. — Pp. 406–413.
10. Dorow, C. Development of a model for the simulation of orthodontic load on lower first premolars using the finite element method / C. Dorow, F.G. Sander // J. Orofac. Orthop. — 2005. — Vol. 66. — Pp. 208–218.
11. Kawarizadeh, A. Experimental and numerical determination of initial tooth mobility and material properties of the periodontal ligament in rat molar specimens / A. Kawarizadeh, C. Bourauel, A. Jager // Eur. J. Orthod. — 2003. — Vol. 25. — Pp. 569–578.
12. Provatidis, C.G. A comparative FEM-study of tooth mobility using isotropic and anisotropic models of the periodontal ligament / C.G. Provatidis // Med. Eng. Physics. — 2000. — Vol. 22. — Pp. 359–370.
13. A validated finite element method study of orthodontic tooth movement in the human subject / M. L. Jones [et al.] // J. Orthod. — 2001. — Vol. 28. — Pp. 29–38.
14. Cattaneo, P.M. The finite element method: a tool to study orthodontic tooth movement / P.M. Cattaneo, M. Dalstra, B. Melsen // J. Dent Res. — 2005. — Vol. 84. — Pp. 428–433.
15. A nonlinear elastic model of the periodontal ligament and its numerical calibration for the study of tooth mobility / G. Pietrzak [et al.] // Comput. Methods Biomech. Biomed. Eng. — 2002. — Vol. 5. — Pp. 91–100.
16. Quasi-automatic 3D finite element model generation for individual single-rooted teeth and periodontal ligament / R. Clement [et al.] // Comput. Methods Programs Biomed. — 2004. — Vol. 73. — Pp. 135–144.
17. Determination of the center of resistance in an upper human canine and idealized tooth model / D. Vollmer [et al.] // Eur. J. Orthod. — 1999. — Vol. 21. — Pp. 633–648.
18. Provatidis, C.G. An analytical model for stress analysis of a tooth in translation / C.G. Provatidis // Int. J. Eng. Sci. — 2001. — Vol. 39. — Pp. 1361–1381.
19. Van Schepdael, A. Analytical determination of stress patterns in the periodontal ligament during orthodontic tooth movement / A. Van Schepdael, L. Geris, J. Van der Sloten // Med. Eng. Phys. — 2013. — Vol. 35. — Pp. 403–410.
20. Наумович, С.А. Биомеханика системы «зуб – периодонт» / С.А. Наумович, А.Е. Крушевский. — Минск: Экономич. технологии, 2000. — 132 с.
21. Bosiakov, S.M. Mathematical modelling of initial tooth root displacements in bone tissue under action of instant static loading / S.M. Bosiakov, K.S. Yurkevich // Rus. J. Biomech. — 2011. — Vol. 15. — Pp. 22–29.
22. Nikolai, R.J. Periodontal ligament reaction and displacements of a maxillary central incisor subjected to transverse crown loading / R.J. Nikolai // J. Biomech. — 1974. — Vol. 7. — Pp. 93–99.
23. Distribution of masticatory load over dental arch during central occlusion / O. I. Dudar [et al.] // Russ. J. Biomech. — 2009. — Vol. 13. — Pp. 56–62.
24. Viecilli, R.F. Axes of resistance for tooth movement: Does the center of resistance exist in 3-dimensional space? / R.F. Viecilli, A. Budiman, C.J. Burstone // Am. J. Orthod. Dentofacial Orthop. — 2013. — Vol. 143. — Pp. 163–172.
25. Biomechanical finite-element investigation of the position of the centre of resistance of the upper incisors / S. Reimann [et al.] // Eur. J. Orthod. — 2007. Vol. 29. — Pp. 219–224.
26. Jeon P.D. Analysis of stress in the periodontium of the maxillary first molar with a three-dimensional finite element model / P.D. Jeon [et al.] // Am. J. Orthod. Dentofacial Orthop. — 1999. — Vol. 115. — P. 267 – 274.
27. Rees, J.S. Elastic modulus of the periodontal ligament / J.S. Rees, P.H. Jacobsen // Biomaterials. — 1997. — Vol. 18. — Pp. 995–999.
28. Kawarizadeh, A. Experimental and numerical determination of initial tooth mobility and material properties of the periodontal ligament in rat molar specimens / A. Kawarizadeh, Bourauel C. Jager A. // Eur. J. Orthod. — 2003. — Vol. 25. — Pp. 569–578.
29. Михасев, Г.И. Собственные частоты колебательной системы среднего уха при тотальной реконструкции / Г.И. Михасев, И.Л. Славашевич // Вестн. С.-Пб. ун-та. — 2012. — Сер. 1. — Вып. 3. — С. 107–116.
30. Босьяков, С.М. Определение центра сопротивления для корня зуба в форме кругового гиперboloида / С.М. Босьяков, А.В. Круподеров, А.Ф. Мселати // Вестн. БГУ. — Сер. 1. — 2014. — № 1. — С. 72–77.
31. Nonlinear stress-strain behavior of periodontal ligament under orthodontic loading / S.R. Toms [et al.] // Am. J. Orthod. Dentofacial Orthop. — 2002. — Vol. 122. — Pp. 174–179.
32. Bourauel, C. Application of Bone Remodeling Theories in the Simulation of Orthodontic Tooth Movements / C. Bourauel, D. Vollmer, A. Jager // J. Orofac. Orthop. — 2000. — Vol. 61, No. 4. — Pp. 266–279.
33. Numerical simulation of tooth movement in a therapy period / Y. Qian [et al.] // Clinic. Biomech. — 2008. — Vol. 23. — Pp. 48–52.

Bosiakov S.M., Mikhasev G.I.

### The analytical model of the initial translational displacements of the tooth root in the linear elastic periodontal ligament

The mathematical modeling of the stress-strain state of the periodontal ligament for the translational displacement of the tooth root is carried out. The tooth root is absolutely rigid body and the periodontal ligament has a constant thickness. The solution for the displacements of the periodontal ligament is formulated in the plane stress state conditions. The boundary conditions correspond to the translational motion of the root in the force direction. The external surface of the periodontal ligament in the tooth alveolus is fixed. The expressions for the displacements of the periodontium points depending on the radial and circumferential coordinates are obtained. Comparative analysis of the magnitudes of concentrated forces for a fixed translational displacement of the tooth root on the basis of the proposed analytical model and the models in the form of an incompressible periodontal circular paraboloid and hyperboloid is carried out.

**Keywords:** *periodontal ligament, translational displacement of the tooth root, stress-strain state of the periodontium, equilibrium of the tooth root in the periodontal ligament*

*Поступила в редакцию 19.05.2014.*