МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3

К.С. МАМЕДОВА, д-р филос. наук
Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку

ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ СОСТАВНОГО ТЕЛА

Дан метод критерий и метод решения задачи теории упругости по снижению концентрации напряжений в составном теле путем оптимизации формы границы соединения различных сред.

Ключевые слова: *композит, задача оптимизации, оптимизация напряженного состояния*

Рассмотрим составное упругое тело, состоящее из сплошной упругой среды (матрицы) и распределенных в ней включений из другого упругого материала. Процесс разрушения таких материалов определяется концентрационным взаимодействием включений (волокон) с матрицей.

Армированные волокна проектируются в основном из круглого поперечного сечения. Включения из другого материала (подкрепляющие элементы), составляя по весу сравнительно небольшую часть, существенно влияют на ее прочность [1]. Поэтому важное значение приобретает оптимальное проектирование составного материала (композита). Задача теории оптимального проектирования заключается в определении характеристик составного тела таким образом, чтобы тело при действии заданных нагрузок в определенном смысле являлось наилучшим из всех составных тел рассматриваемого тела.

Анализ взаимодействия связующего с включениями (волокнами) проводится на основе модели с одним включением криволинейной формы. Остальные включения «размазываются», а тело вне выделенного включения представляется однородным и изотропным с соответствующими эффективными упругими постоянными по правилу «смесей».

Пусть неограниченное тело находится в условиях плоской деформации или плоского напряженного состояния.

Обозначим границу раздела различных упругих сред через L'. Полагаем, что границу L' соединения включения с матрицей можно представить в виде

$$r = \rho(\theta) = \lambda + \varepsilon H(\theta),$$

где ε — малый параметр, равный R_{max}/λ; R_{max} — наибольшая высота неровности профиля контура L' от окружности радиуса λ. Для оптимизации несущей способности составного тела предлагается метод, заключающийся в выборе класса неровностей поверхности поперечного сечения включения, обеспечивающие повышение несущей способности составного тела. Таким образом, требуется построить такую геометрию поверхности соединения включения и связующего, чтобы созданное ею упругое поле снижало бы концентрацию напряжений в составном теле. Очевидно, что чем ниже уровень напряженности в составном теле, тем выше ресурс ее работы.

Не уменьшая общности поставленной задачи оптимизации, принимаем, что искомая функция $H(\theta)$ может быть представлена в виде отрезка ряда Фурье

$$H(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\alpha_k \cos k\theta + \beta_k \sin k\theta\right).$$

Искомые функции (напряжения и перемещения) в составном теле будем искать в виде разложений по малому параметру ε:

$$\sigma_x = \sigma_x^{(0)} + \varepsilon\sigma_x^{(1)} + \ldots;$$

$$\sigma_y = \sigma_y^{(0)} + \varepsilon\sigma_y^{(1)} + \ldots;$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^{(0)} + \varepsilon\tau_{xy}^{(1)} + \ldots;$$

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \ldots;$$
$$\upsilon = \upsilon_0 + \varepsilon\upsilon_1 + \ldots.$$

Компоненты тензора напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} и вектора смещений u, υ в плоской задаче теории упругости можно представить с помощью комплексных потенциалов Колосова–Мусхелишвили [2]

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_r + \sigma_\theta = 2\left[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}\right];$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = \left(\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta}\right)e^{-2i\theta} =$$
$$= 2\left[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)\right];$$

$$2\mu(u+iv)=\chi\varphi(z)-z\overline{\Phi(z)}-\overline{\psi(z)},$$

где μ — модуль сдвига материала; χ — постоянная Мусхелишвили, зависящая от коэффициента Пуассона, $\chi = 3 - 4\nu$ в случае плоской деформации и $\chi = (3 - \nu) / (1 + \nu)$ для обобщенного плоского напряженного состояния; r, θ — полярная система координат.

При деформации составного тела (композита) смежные точки контура соединения включения и связующего будут иметь одинаковые перемещения, а усилия, действующие со стороны связующего на включение, будут равны по величине и противоположны по знаку усилиям, действующим на связующее со стороны включения.

Воспользовавшись известными [2] выражениями для компонент напряжений σ_n и τ_{nt}:

$$\sigma_n=\sigma_r\cos^2\alpha+\sigma_\theta\sin^2\alpha-2\tau_{r\theta}\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\tau_{nt}=(\sigma_\theta-\sigma_r)\sin\alpha\cos\alpha+2\tau_{r\theta}\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right),$$

где n, t — натуральные координаты; α — угол между нормалью и осью абсцисс.

Если теперь взять $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ с точностью до величин первого порядка малости и подставить выражения в условия на границе соединения включения и связующего, то найдем условия при $r = \lambda$:

- для нулевого приближения

$$\sigma_{r_0}^{(0)}+i\tau_{r\theta_0}^{(0)}=\sigma_r^{(0)}+i\tau_{r\theta}^{(0)};\; u_{r_0}^{(0)}+iu_{r\theta_0}^{(0)}=u_r^{(0)}+iu_{r\theta}^{(0)};$$

- для первого приближения

$$\sigma_{r_0}^{(1)}+i\tau_{r\theta_0}^{(1)}=\sigma_r^{(1)}+i\tau_{r\theta}^{(1)}+f_1+if_2;$$
$$u_{r_0}^{(1)}+iu_{r\theta_0}^{(1)}=u_r^{(1)}+iu_{r\theta}^{(1)}+g_1+ig_2.$$

При заданной функции $H(\theta)$, полученные алгебраические соотношения являются замкнутыми и позволяют найти напряженно-деформированное состояние составного тела для каждого профиля поперечного сечения включения [3, 4].

Ответственной за разрушение составного тела считаем величину максимального нормального окружного напряжения на границе соединения различных сред. Управляющими переменными принимаем параметры геометрии границы соединения сред.

Для оценки прочности составного тела необходимо определить нормальное напряжение σ_t, действующее вблизи контура L'. С помощью преобразований для величины σ_t с точностью до величин первого порядка относительно малого параметра ε найдем

$$\sigma_t=\sigma_\theta\big|_{r=\rho}=\sigma_\theta^{(0)}\big|_{r=\lambda}+\varepsilon\left[H(\theta)\frac{\partial\sigma_\theta^{(0)}}{\partial r}+\sigma_\theta^{(1)}\right]_{/r=\lambda}.$$

Для функции $\sigma_t(\theta)$ находим ее максимальное значение на границе соединения различных сред:

$$\sigma_{t\max}=\sigma_\theta^{(0)}(\theta_*)+\varepsilon\left[H(\theta_*)\frac{\partial\sigma_\theta^{(0)}(\theta_*)}{\partial r}+\sigma_\theta^{(1)}(\theta_*)\right]_{|r=\lambda}.$$

Здесь величина θ_* есть корень уравнения

$$\frac{\partial\sigma_t}{\partial\theta}=0.$$

Коэффициентами α_{2k} и β_{2k} искомой функции $H(\theta)$ мы должны так распорядиться, чтобы обеспечивалась минимизация $\sigma_{t\max}$ (минимаксный критерий).

В поставленной задаче оптимизации напряжение $\sigma_{t\max}$ (показатель качества управления) линейно зависит от искомых коэффициентов. Таким образом, искомая задача оптимизации сводится к задаче линейного программирования[5].

При этом должно выполняться следующее ограничение

$$\sigma_{t\max}\le[\sigma],$$

где $[\sigma]$ — допустимое напряжение для материала связующего, определяемое опытным путем.

Для оптимизации полученной математической модели могут быть применены численные методы решения задач линейного программирования.

В рассматриваемой задаче наиболее эффективным методом оказался симплексный алгоритм[6].

Результаты расчетов для $\lambda = 0,3$; $\nu_s = 0,30$; $\mu_s = 2,5 \cdot 10^5$ МПа; $\nu_b = 0,32$; $\mu_b = 3,6 \cdot 10^5$ МПа приведены в таблице, где ОР — одностороннее растяжение, ВР — всестороннее растяжение [7].

Аналогично задача может быть рассмотрена для иных критериев оптимизации.

Выводы. Успешное применение на практике искусственно созданных композиционных материалов в значительной мере связано с исследованием задач определения напряженно-деформированного состояния в композиционных материалах, с учетом особенностей их структуры, в частности, искривления армирующих элементов. Поэтому исследования напряженно-деформированного состояния в композиционных материалах с искривленными структурами следует признать весьма актуальными.

На основе модели кусочно-однородного тела с привлечением точных уравнений линейной теории упругости, излагается постановка задач об определении напряженно-деформированного состояния в композитных материалах с искривленными формами поперечного сечения армированных однонаправленных волокон. Для оптимизации несущей способности составного тела предлагается метод, заключающийся в выборе класса неровностей поверхности поперечного сечения включения, обеспечивающие повышение несущей способности составного тела. Построена такая геометрия поверхности соединения включения и связующего, чтобы созданное ею упругое поле снижало концентрацию напря-

Таблица — Результаты расчетов

	α_0	α_2	α_4	α_6
ОР	0,062	0,041	0,018	0,005
ВР	0,054	0,033	0,011	0,003

жений в составном теле. Очевидно, что чем ниже уровень напряженности в составном теле, тем выше ресурс ее работы. Для оценки прочности составного тела определено нормальное напряжение st, действующее вблизи контура L'. В рассматриваемой задаче получены математические модели для одностороннего растяжения и всестороннего растяжения. С помощью задач линейного программирования и симплексного алгоритма определены коэффициенты интенсивности напряжений, геометрические и физические параметры композита.

Предложены новые и оригинальные методики минимизации напряженных полей в составном теле. Результаты являются новыми и представляют интерес для специалистов в области моделирования и прогнозирования поведения композитных материалов и конструкций при разрушении. Задачи создания оптимальных материалов и конструкций возникают в самых различных прикладных областях в машиностроении, в судостроении, в авиационной и космической технике, в строительстве сооружений и т. д. На основе оптимального проектирования достигается снижение материалоемкости конструкций, улучшение их физико-механических характеристик и т. д.

Список литературы

1. Andreev, L. In the world of shells / L. Andreev. — M.: Mir Publishers, 1990. — 200 p.
2. Мусхелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. — М.: Наука,1966. — 707 с.
3. Mirsalimov, V.M. Inverse theory of elasticity problem of mounting a disk on a rotating shaft / V.M. Mirsalimov // J.of Machinary Manufacture and Reliability. — 2007. — Vol. 36, № 1. — Pp. 35–38.
4. Мирсалимов, В.М. Минимизация напряженного состояния составного цилиндра / В.М. Мирсалимов // Проблемы машиностроения и надежности машин. — 2006. — № 6. — С. 97–101.
5. Вычислительная техника и программирование / под. ред. А.Б. Петрова. — М.: Высш. шк., 1990. — 479 с.
6. Юдин, Д.Б. Линейной программирование. Теория и конечные методы / Д.Б. Юдин, Е.Г. Гольдштейн. — М.: Физматлит, 1963. — 775 с.
7. Мамедова, К.С. Минимизация напряженного состояния составного тела, армированного однонаправленными волокнами / К.С. Мамедова // Труды фундаментальных наук. — 2010. — IX(36), № 4. — С. 66–69.

Mamedova K.S.

The optimization problem for finding the stress state of a composite body

The method criterion and a method of the decision of a problem of the theory of elasticity on decrease in concentration of pressure in a compound body by optimization of the form of border of connection of various environments is given.

Keywords: *composite, the problem of optimization, optimization of the stress state*

Поступила в редакцию 20.11.2013.