



МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3: 534.2

Г.Р. ГУЛГАЗАРЯН, д-р физ.-мат. наук, профессор

профессор кафедры математического анализа и теории функций

E-mail: ghulgr@yahoo.com

Армянский государственный педагогический университет им Х. Абовяна, г. Ереван, Республика Армения

Р.Г. ГУЛГАЗАРЯН, канд. физ.-мат. наук

ведущий инженер

E-mail: ghulgr@yahoo.com

ЗАО «Ментор Графикас Дивелопмент Сервисис», г. Ереван, Республика Армения

Г.И. МИХАСЕВ, д-р физ.-мат. наук, профессор

заведующий кафедрой био- и наномеханики

E-mail: mikhasev@bsu.by

Белорусский государственный университет, г. Минск, Республика Беларусь

Статья поступила 13.03.2015.

О СВОБОДНЫХ ИНТЕРФЕЙСНЫХ И КРАЕВЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТОНКИХ УПРУГИХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ПЛАСТИН СО СВОБОДНЫМ КРАЕМ

Исследуются свободные планарные и изгибные интерфейсные и краевые колебания полубесконечных составных пластин и пластин-полос. Используя уравнения, соответствующие классической теории ортотропных пластин, выводятся дисперсионные уравнения и асимптотические формулы для нахождения собственных частот интерфейсных и краевых колебаний составных пластин. Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и аналогичных задач для бесконечной составной пластины и пластины-полосы соответственно.

Ключевые слова: интерфейсные колебания, собственные частоты, пластины

Введение. Исследования колебательных процессов в составных тонкостенных конструкциях занимают важное место в динамике деформируемого твердого тела. Это обусловлено как потребностями самой теории, так и практическими вопросами машиностроения, приборостроения и т. д. [1]. Во многих случаях объекты исследования представляют собой односторонние протяженные составные пластины. Для тонких составных пластин большое значение приобретает изучение собственных колебаний, локализованных у свободного края пластины — краевые колебания и локализованные у границы раздела свойств материала — интерфейсные колебания.

Начало исследования упругих поверхностных волн связано с работой Рэлея [2], в которой установлено существование упругих повер-

хностных волн, распространяющихся вдоль свободной границы полупространства с амплитудой, быстро убывающей с глубиной. Такие волны, возникающие у свободного края упругих тел различной геометрии, обычно называются поверхностными волнами типа Рэлея [3–5]. Начало исследования собственных интерфейсных колебаний связаны с работами [6–7], в которых исследованы аналоги волн Стоунли [8]. В работе [9], используя специальный асимптотический метод, изучены собственные интерфейсные колебания составных круговых цилиндрических оболочек и оболочек вращения. В работах [10–11] исследованы свободные интерфейсные колебания бесконечных замкнутых и незамкнутых цилиндрических оболочек составленных из двух полубесконечных ортотропных упругих безмо-

ментных и моментных цилиндрических оболочек с разными упругими свойствами. Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и аналогичных задач для бесконечной составной пластины и пластины-полосы, при наличии шарнирного закрепления Навье на граничных образующих.

В настоящей работе исследуется вопрос существования свободных планарных и изгибных интерфейсных и краевых колебаний полубесконечной пластины, составленной из ортотропных тонких упругих пластины-полосы и полубесконечной пластины с разными упругими свойствами, а также полубесконечной пластины-полосы, составленной из тонких упругих ортотропных прямоугольной пластины и полубесконечной пластины-полосы с разными упругими свойствами. Предполагается, что у линии раздела свойств материала имеется полный контакт.

Выводятся дисперсионные уравнения для определения собственных частот изгибного и планарного типа интерфейсных и краевых колебаний для составной пластины. Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и аналогичных задач для бесконечной составной пластины и пластины-полосы, при наличии шарнирного закрепления Навье на граничных линиях.

На срединной плоскости пластины вводятся прямолинейные ориентированные ортогональные координаты (α, β) , где $-\infty < \alpha \leq l^{(1)}$ и $-\infty < \beta < \infty$, в случае составной полубесконечной пластины (рисунок, а) и $-\infty < \alpha \leq l^{(1)}$, $0 \leq \beta \leq s$ в случае полубесконечной пластины-полосы (см. рисунок, б). Прямая $\alpha = 0$ соответствует границе раздела свойств материала. Все величины, относящиеся к правой пластине ($0 \leq \alpha \leq l^{(1)}$), отмечаются верхним индексом (1), к левой пластине ($-\infty < \alpha \leq 0$) — индексом (2).

О планарных интерфейсных и краевых колебаниях полубесконечных пластин. В качестве исходных уравнений используются уравнения малых планарных колебаний левых и правых пластин, которые соответствуют классической теории ортотропных пластин [12].

$$\begin{aligned}
 & -B_{11}^{(r)} \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial \alpha^2} - B_{66}^{(r)} \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial \beta^2} - (B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)}) \frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial \alpha \partial \beta} + \\
 & + \frac{B_{12}^{(r)}}{R} \frac{\partial u_3^{(r)}}{\partial \alpha} = \lambda^{(r)} u_1^{(r)}; \\
 & -(B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)}) \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial \alpha \partial \beta} - B_{66}^{(r)} \frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial \alpha^2} - B_{22}^{(r)} \frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial \beta^2} + \\
 & + \frac{B_{22}^{(r)}}{R} \frac{\partial u_3^{(r)}}{\partial \beta} = \lambda^{(r)} u_2^{(r)},
 \end{aligned} \quad (1.1)$$

здесь $u_1^{(r)}, u_2^{(r)}$ ($r=1,2$) — проекции вектора перемещений соответственно в направлениях α, β ; $B_{ij}^{(r)}$ ($r=1,2$) — коэффициенты упругости; $\lambda^{(r)} = \rho^{(r)} \omega^2$, где ω — угловая частота собственных колебаний; $\rho^{(r)}$ ($r=1,2$) — плотности материалов.

Рассматриваются следующие граничные условия

$$\begin{aligned}
 T_1^{(1)}|_{\alpha=0} = T_1^{(2)}|_{\alpha=0}, S_{12}^{(1)}|_{\alpha=0} = S_{12}^{(2)}|_{\alpha=0}, u_1^{(1)}|_{\alpha=0} = \\
 = u_1^{(2)}|_{\alpha=0}, u_2^{(1)}|_{\alpha=0} = u_2^{(2)}|_{\alpha=0};
 \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$T_1^{(1)}|_{\alpha=l^{(1)}} = 0; S_{12}^{(1)}|_{\alpha=l^{(1)}} = 0; \quad (1.3)$$

$$u_i^{(r)}(\alpha, \beta) = u_i^{(r)}(\alpha, \beta + s), i = 1, 2; \quad (1.4)$$

$$T_2^{(r)}|_{\beta=0,s} = u_1^{(r)}|_{\beta=0,s} = 0; \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned}
 T_1^{(r)} &= h B_{11}^{(r)} \left[\frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial \beta} \right]; \\
 T_2^{(r)} &= h B_{22}^{(r)} \left[\frac{B_{12}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} \frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial \beta} \right]; \\
 S_{12}^{(r)} &= h B_{66}^{(r)} \left[\frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial \beta} + \frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial \alpha} \right],
 \end{aligned} \quad (1.6)$$

где h — толщина пластины.

Граничные условия (1.2)–(1.4) соответствуют полубесконечной пластине: соотношения (1.2) выражают условия полного контакта при $\alpha = 0$ (на границе раздела свойств материала), (1.3) — условия свободного края при $\alpha = l^{(1)}$ (1.4) — условия периодичности колебания, где s — произвольное положительное число. Граничные условия (1.2)–(1.3), (1.5) соответствуют пластине-полосе: соотношения (1.5) являются условиями шарнирного закрепления при

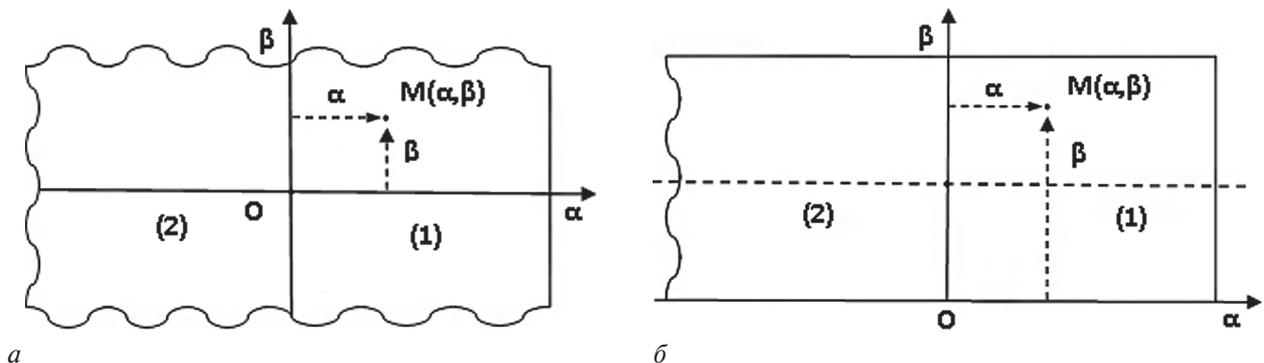


Рисунок — Составная полубесконечная пластина (а) и полубесконечная пластина-полоса(б)

$\beta = 0$ и $\beta = s$, где s — ширина полубесконечной пластины-полосы.

Введем обозначения: $k = 2\pi n_0 / s$, $n_0 \in N$ для полубесконечной пластины и $k = \pi / s$ для пластины-полосы. Решения системы уравнений (1.1) ищем в виде

$$(u_1^{(r)}, u_2^{(r)}) = (u_m^{(r)} \sin km\beta, v_m^{(r)} \cos km\beta) \exp((-1)^r mk y^{(r)} \alpha), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (1.7)$$

здесь m — волновое число; $u_m^{(r)}, v_m^{(r)}$ — неопределенные коэффициенты; $y^{(r)}$ — неопределенный коэффициент затухания. При этом условия (1.4) и (1.5) выполняются автоматически и поставленные задачи решаются аналогичным образом, если придавать параметру k разные значения. Подставляя выражения (1.7) в систему (1.1), придем к системе уравнений

$$\begin{aligned} & \left(B_{11}^{(r)} (y^{(r)})^2 - B_{66}^{(r)} + \frac{\lambda^{(r)}}{k^2 m^2} \right) u_m^{(r)} - \\ & - (-1)^r y^{(r)} (B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)}) v_m^{(r)} = 0; \\ & (-1)^r y^{(r)} (B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)}) u_m^{(r)} + \\ & + \left(B_{66}^{(r)} (y^{(r)})^2 - B_{22}^{(r)} + \frac{\lambda^{(r)}}{k^2 m^2} \right) v_m^{(r)} = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Приравняв определитель системы (1.8) к нулю, получим характеристические уравнения системы (1.1)

$$\begin{aligned} c_m^{(r)} = & (y^{(r)})^4 - B_2^{(r)} (y^{(r)})^2 + \frac{B_{11}^{(r)} + B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_m^{(r)})^2 (y^{(r)})^2 + \\ & + \left(1 - (\eta_m^{(r)})^2 \right) \left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_m^{(r)})^2 \right) = 0; \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$B_2^{(r)} = \frac{B_{11}^{(r)} B_{12}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - 2 B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}}; \quad (1.10)$$

$$(\eta_m^{(r)})^2 = \frac{\lambda^{(r)}}{B_{66}^{(r)} k^2 m^2}, \quad r = 1, 2.$$

Пусть $y_1^{(r)}, y_2^{(r)}$ ($r = 1, 2$) — решения уравнения (1.9) с положительными действительными частями и $y_{j+2}^{(r)} = -y_j^{(r)}$ ($j = 1, 2$). Тогда решения системы (1.8) для каждого $y_j^{(r)}$ ($j = \overline{1, 4}$) примет вид

$$u_{mj}^{(r)} = (-1)^r y_j^{(r)} \frac{B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}; \quad (1.11)$$

$$v_{mj}^{(r)} = (y_j^{(r)})^2 - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \left(1 - (\eta_m^{(r)})^2 \right).$$

Решения задач (1.1)–(1.4) и (1.1)–(1.3), (1.5) ищем в виде

$$\begin{aligned} u_1^{(1)} = & \sum_{j=1}^4 u_{mj}^{(1)} w_j^{(1)} \exp(-y_j^{(1)} km\alpha) \sin km\beta, \\ u_1^{(2)} = & \sum_{j=1}^2 u_{mj}^{(2)} w_j^{(2)} \exp(y_j^{(2)} km\alpha) \sin km\beta; \\ u_2^{(1)} = & \sum_{j=1}^4 v_{mj}^{(1)} w_j^{(1)} \exp(-y_j^{(1)} km\alpha) \cos km\beta, \\ u_2^{(2)} = & \sum_{j=1}^2 v_{mj}^{(2)} w_j^{(2)} \exp(y_j^{(2)} km\alpha) \cos km\beta. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Учитывая граничные условия (1.2)–(1.3), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 P_{1j}^{(1)} w_j^{(1)} - \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \sum_{j=1}^2 P_{1j}^{(2)} w_j^{(2)} = 0, \\ \sum_{j=1}^4 P_{2j}^{(1)} w_j^{(1)} + \frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}} \sum_{j=1}^2 P_{2j}^{(2)} w_j^{(2)} = 0; \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\sum_{j=1}^4 P_{3j}^{(1)} w_j^{(1)} + \sum_{j=1}^2 P_{3j}^{(2)} w_j^{(2)} = 0, \quad \sum_{j=1}^4 P_{4j}^{(1)} w_j^{(1)} - \sum_{j=1}^2 P_{4j}^{(2)} w_j^{(2)} = 0;$$

$$\sum_{j=1}^4 P_{1j}^{(1)} \exp(z_j^{(1)}) w_j^{(1)} = 0, \quad \sum_{j=1}^4 P_{2j}^{(1)} \exp(z_j^{(1)}) w_j^{(1)} = 0;$$

$$P_{1j}^{(r)} = \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \left((y_j^{(r)})^2 + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (1 - (\eta_m^{(r)})^2) \right);$$

$$P_{2j}^{(r)} = y_j^{(r)} \left((y_j^{(r)})^2 + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} + \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_m^{(r)})^2 \right); \quad (1.14)$$

$$P_{3j}^{(r)} = y_j^{(r)} \frac{B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}, \quad P_{4j}^{(r)} = (y_j^{(r)})^2 - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (1 - (\eta_m^{(r)})^2).$$

Приравняв определитель системы (1.13) к нулю и произведя элементарные действия над столбцами определителя, получим дисперсионные уравнения

$$\Delta_1 = (y_2^{(1)} - y_1^{(1)})^2 (y_2^{(2)} - y_1^{(2)}) \exp(-z_1^{(1)} - z_2^{(1)}) \text{Det} \| e_{ij} \|_{i,j=1}^6 = 0, \quad (1.15)$$

$$m = \overline{1, +\infty};$$

$$e_{11} = \frac{B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \left((y_1^{(1)})^2 + \frac{B_{12}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} (1 - (\eta_m^{(1)})^2) \right);$$

$$e_{12} = \frac{B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} (y_1^{(1)} + y_2^{(1)}); \quad e_{13} = e_{11} \exp(z_1^{(1)});$$

$$e_{14} = e_{12} \exp(z_2^{(1)}) + e_{11} [z_1^{(1)} z_2^{(1)}];$$

$$e_{15} = -\frac{B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \left((y_1^{(2)})^2 + \frac{B_{12}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} (1 - (\eta_m^{(2)})^2) \right);$$

$$e_{16} = -\frac{B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} (y_1^{(2)} + y_2^{(2)});$$

$$e_{21} = y_j^{(1)} \left((y_j^{(1)})^2 + \frac{B_{12}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} + \frac{B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} (\eta_m^{(1)})^2 \right);$$

$$e_{22} = y_1^{(1)} y_2^{(1)} + \frac{B_{11}^{(1)} B_{11}^{(1)} - (B_{12}^{(1)})^2 - B_{12}^{(1)} B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)} B_{66}^{(1)}} - (\eta_m^{(1)})^2;$$

$$e_{23} = -e_{21} \exp(z_1^{(1)}); \quad e_{24} = -e_{22} \exp(z_2^{(1)}) - e_{21} [z_1^{(1)} z_2^{(1)}];$$

$$e_{25} = \frac{B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} y_j^{(2)} \left((y_j^{(2)})^2 + \frac{B_{12}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} + \frac{B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} (\eta_m^{(2)})^2 \right);$$

$$e_{26} = \frac{B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} (y_1^{(2)} y_2^{(2)} + B_{11}^{(2)} - (\eta_m^{(2)})^2);$$

$$e_{31} = y_j^{(1)} \frac{B_{12}^{(1)} + B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}}; \quad e_{32} = \frac{B_{12}^{(1)} + B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}}; \quad (1.16)$$

$$e_{33} = -e_{31} \exp(z_1^{(1)}); \quad e_{34} = -e_{32} \exp(z_2^{(1)}) - e_{31} [z_1^{(1)} z_2^{(1)}];$$

$$e_{35} = y_j^{(r)} \frac{B_{12}^{(2)} + B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}}; \quad e_{36} = \frac{B_{12}^{(2)} + B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}};$$

$$\begin{aligned}
 e_{41} &= (y_j^{(1)})^2 - \frac{B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}}(1 - (\eta_m^{(1)})^2); e_{42} = y_1^{(1)} + y_2^{(1)}; \\
 e_{43} &= e_{41} \exp(z_1^{(1)}); e_{44} = e_{42} \exp(z_2^{(1)}) + e_{41} [z_1^{(1)} z_2^{(1)}]; \\
 e_{45} &= -\left((y_j^{(2)})^2 - \frac{B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}}(1 - (\eta_m^{(2)})^2) \right); e_{46} = -(y_1^{(2)} + y_2^{(2)}); \\
 e_{51} &= e_{13}; e_{52} = e_{14}; e_{53} = e_{11}; e_{54} = e_{12}; e_{55} = e_{56} = 0; \\
 e_{61} &= e_{23}; e_{62} = e_{24}; e_{63} = e_{21}; e_{64} = e_{12}; e_{65} = e_{66} = 0.
 \end{aligned}$$

Уравнения (1.15) эквивалентны уравнениям

$$\text{Det} \| e_{ij} \|_{i,j=1}^6 = 0, m = \overline{1, +\infty}. \quad (1.17)$$

При $m^{(1)} \rightarrow \infty$ уравнения (1.17) преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
 \text{Det} \| e_{ij} \|_{i,j=1}^6 &= \left(\frac{B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^2 \left(\frac{B_{12}^{(1)} + B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \right) \frac{B_{12}^{(2)} + B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} \times \\
 &\times L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) + \sum_{j=1}^2 O(\exp(z_j^{(1)})) = 0, m = \overline{1, +\infty}; \quad (1.18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) &= K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) Q^{(2)}(\eta_m^{(2)}) + \left(\frac{B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} \right)^2 K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}) Q^{(1)}(\eta_m^{(1)}) + \\
 &+ \frac{B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} \left[2 \left(y_1^{(1)} y_2^{(1)} - \frac{B_{12}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} (1 - (\eta_m^{(1)})^2) \right) \left(y_1^{(2)} y_2^{(2)} - \frac{B_{12}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} (1 - (\eta_m^{(2)})^2) \right) + \right. \\
 &\left. + (y_2^{(1)} + y_1^{(1)}) (y_2^{(2)} + y_1^{(2)}) ((1 - (\eta_m^{(2)})^2) y_1^{(1)} y_2^{(1)} + (1 - (\eta_m^{(1)})^2) y_1^{(2)} y_2^{(2)}) \right]; \quad (1.19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_2^{(r)}(\eta_m^{(r)}) &= (1 - (\eta_m^{(r)})^2) \left(\frac{B_{12}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} - (\eta_m^{(r)})^2 \right) - \\
 &- (\eta_m^{(r)})^2 y_1^{(r)} y_2^{(r)}, r = 1, 2;
 \end{aligned}$$

$$Q^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = y_1^{(r)} y_2^{(r)} + \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (1 - (\eta_m^{(r)})^2), r = 1, 2.$$

Из (1.18) следует, что при $m^{(1)} \rightarrow \infty$ уравнения (1.17) распадаются на уравнения [10–13]:

$$L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = 0, m = \overline{1, +\infty}; K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0, m = \overline{1, +\infty}. \quad (1.20)$$

Первая совокупность уравнений из (1.20) является аналогом дисперсионных уравнений Стоунли для бесконечной составной пластины или пластины-полосы, когда боковые края шарнирно закреплены. Вторая совокупность уравнений из (1.20) является уравнениями Рэлея для полубесконечной пластины из материала правой пластины или уравнениями Рэлея для полубесконечной пластины-полосы со свободным торцом при наличии шарнирного закрепления на боковых краях изготовленной из материала правой пластины.

Заметим, что в первых дисперсионных уравнениях (1.20) коэффициенты упругости двух составляющих пластин и соответствующие корни характеристических уравнений (1.9) входят сим-

метричным образом. Следовательно, если левая пластина (с верхним индексом (2)) более мягкая $\rho^{(2)} / \rho^{(1)} \ll 1, B_{ij}^{(2)} / B_{ij}^{(1)} \ll 1, i, j = 1, 2, 6$, чем правая, то можно написать

$$\begin{aligned}
 L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) &= Q^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \{ K_2(\eta_m^{(1)}) + \\
 &+ O(B_{66}^{(2)} / B_{66}^{(1)}) + O(\rho^{(2)} / \rho^{(1)}) \} = 0. \quad (1.21)
 \end{aligned}$$

Следовательно, существование интерфейсных колебаний составной пластины зависит от существования краевого колебания правой полубесконечной пластины со свободным краем: $K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0$ [13]: т. е. всегда существуют интерфейсные колебания. Если $B_{ij}^{(2)} / B_{ij}^{(1)} \approx 1, ij = 1, 2, 6; \rho^{(2)} / \rho^{(1)} \approx 1$, то маловероятно существование интерфейсных колебаний. Таким образом, в принятом предположении существование планарных интерфейсных колебаний составной пластины зависит от существования краевого колебания правой пластины со свободным краем.

Об изгибных интерфейсных и краевых колебаниях полубесконечных пластин. В качестве исходных уравнений используются уравнения малых изгибных колебаний левых и правых пластин, которые соответствуют классической теории ортотропных пластин [12].

$$\begin{aligned}
 \mu^4 \left(B_{11}^{(r)} \frac{\partial^4 u_3^{(r)}}{\partial \alpha^4} + 2(B_{12}^{(r)} + 2B_{66}^{(r)}) \frac{\partial^4 u_3^{(r)}}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \right. \\
 \left. + B_{22}^{(r)} \frac{\partial^4 u_3^{(r)}}{\partial \beta^4} \right) = \lambda^{(r)} u_3^{(r)}, \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

здесь $u_3^{(r)} (r = 1, 2)$ — нормальные компоненты вектора перемещений правых и левых пластин; $B_{ij}^{(r)} (r = 1, 2)$ — коэффициенты упругости; $\lambda^{(r)} = \rho^{(r)} \omega^2$, где ω — угловая частота, $\rho^{(r)} (r = 1, 2)$ — плотности материалов, $\mu^4 = h^2 / 12$ (h — толщина пластины).

Аналогом граничных условий (1.2)–(1.5) и (1.6) для свободных изгибных интерфейсных и краевых колебаний являются

$$\begin{aligned}
 M_1^{(1)}|_{\alpha=0} = M_1^{(2)}|_{\alpha=0}, N_1^{(1)} + \frac{\partial H^{(1)}}{\partial \beta}|_{\alpha=0} = N_1^{(2)} + \frac{\partial H^{(2)}}{\partial \beta}|_{\alpha=0}, \\
 u_3^{(1)}|_{\alpha=0} = u_3^{(2)}|_{\alpha=0}, \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial \alpha}|_{\alpha=0} = \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial \alpha}|_{\alpha=0}; \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

$$M_1^{(1)}|_{\alpha=f^{(1)}} = 0, N_1^{(1)} + \frac{\partial H^{(1)}}{\partial \beta}|_{\alpha=f^{(1)}} = 0; \quad (2.3)$$

$$M_1^{(1)}|_{\alpha=f^{(1)}} = 0, N_1^{(1)} + \frac{\partial H^{(1)}}{\partial \beta}|_{\alpha=f^{(1)}} = 0; \quad (2.4)$$

$$u_3^{(r)}|_{\beta=0,s} = M_2^{(r)}|_{\beta=0,s} = 0; \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
 M_1^{(r)} &= \frac{h^3}{12} B_{11}^{(r)} \left[\frac{\partial^2 u_3^{(r)}}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \frac{\partial^2 u_3^{(r)}}{\partial \beta^2} \right]; \\
 M_2^{(r)} &= \frac{h^3}{12} B_{22}^{(r)} \left[\frac{B_{12}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} \frac{\partial^2 u_3^{(r)}}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u_3^{(r)}}{\partial \beta^2} \right]; \\
 N_1^{(r)} + \frac{\partial H^{(r)}}{\partial \beta} &= \frac{h^3}{12} B_{11}^{(r)} \left[\frac{\partial^3 u_3^{(r)}}{\partial \alpha^3} + \frac{B_{12}^{(r)} + 4B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \frac{\partial^3 u_3^{(r)}}{\partial \alpha \partial \beta^2} \right], \quad (2.6) \\
 r &= 1, 2.
 \end{aligned}$$

Граничные условия (2.2)–(2.4) соответствуют полубесконечной пластине: соотношения (2.2) выражают условия полного контакта при $\alpha = 0$, (2.3) — условия свободного края при $\alpha = l^{(1)}$, (2.4) — условия периодичности колебания, где s — произвольное положительное число. Граничные условия (2.2)–(2.3), (2.5) соответствуют пластине-полосе: соотношения (2.5) являются условиями шарнирного закрепления по краям $\beta = 0$ и $\beta = s$, где s — ширина пластины-полосы.

Введем обозначения: $k = 2\pi n_0 / s$, $n_0 \in N$ для полубесконечной пластины и $k = p / s$ для пластины-полосы. Решения уравнений (2.1) ищем в виде

$$u_3^{(r)} = \sin km\beta \exp((-1)^r mky^{(r)}\alpha); \quad r=1, 2; \quad m = \overline{1, +\infty}, \quad (2.7)$$

здесь m — волновое число; $y^{(r)}$ — неопределенные коэффициенты затухания. При этом условия (2.4), (2.5) выполняются автоматически и поставленные задачи решаются аналогичным образом, если придавать параметру k разные значения. Подставляя выражение (2.7) в уравнения (2.1), получаем характеристические уравнения

$$\begin{aligned}
 R_{mm}^{(r)} &= a^2 m^2 \left(\frac{B_{11}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} (y^{(r)})^4 - \frac{2(B_{12}^{(r)} + 2B_{66}^{(r)})}{B_{22}^{(r)}} (y^{(r)})^2 + 1 \right) - \\
 &\quad - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} (\eta_m^{(r)})^2 = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}; \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

$$a^2 = \mu^4 k^2; \quad (\eta_m^{(r)})^2 = \frac{\lambda^{(r)}}{B_{66}^{(r)} k^2 m^2} = \frac{\rho^{(r)} \omega^2}{B_{66}^{(r)} k^2 m^2}, \quad r=1, 2. \quad (2.9)$$

Пусть $y_3^{(r)}$ и $y_4^{(r)}$ — различные корни уравнения (2.8) с положительными действительными частями и $y_{j+2}^{(r)} = -y_j^{(r)}$ ($j=3, 4$). Решения задач (2.1)–(2.4) и (2.1)–(2.3), (2.5) ищем в виде

$$\begin{aligned}
 u_3^{(1)} &= \sum_{j=3}^6 w_j^{(1)} \exp(-y_j^{(1)} km\alpha) \sin km\beta; \\
 u_3^{(2)} &= \sum_{j=3}^4 w_j^{(2)} \exp(y_j^{(2)} km\alpha) \sin km\beta, \quad m = \overline{1, +\infty}. \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

Учитывая граничные условия (2.2)–(2.3), получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=3}^6 \left((y_j^{(1)})^2 - \frac{B_{12}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \right) w_j^{(1)} - \frac{B_{11}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \sum_{j=3}^4 \left((y_j^{(2)})^2 - \frac{B_{12}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} \right) w_j^{(2)} &= 0; \\
 \sum_{j=3}^6 \left((y_j^{(1)})^3 - \frac{B_{12}^{(1)} + 4B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} y_j^{(1)} \right) w_j^{(1)} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \sum_{j=3}^4 \left((y_j^{(2)})^3 - \frac{B_{12}^{(2)} + 4B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} y_j^{(2)} \right) w_j^{(2)} &= 0; \\
 \sum_{j=3}^6 w_j^{(1)} - \sum_{j=3}^4 w_j^{(2)} = 0, \quad \sum_{j=3}^6 y_j^{(1)} w_j^{(1)} + \sum_{j=3}^4 y_j^{(2)} w_j^{(2)} &= 0; \\
 \sum_{j=3}^6 \left((y_j^{(1)})^2 - \frac{B_{12}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \right) \exp(z_j^{(1)}) w_j^{(1)} &= 0, \quad (2.11) \\
 \sum_{j=3}^6 \left((y_j^{(1)})^3 - \frac{B_{12}^{(1)} + 4B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} y_j^{(1)} \right) \exp(z_j^{(1)}) w_j^{(1)} &= 0.
 \end{aligned}$$

Приравняв определитель системы (2.11) к нулю и произведя элементарные действия над столбцами определителя, получим дисперсионные уравнения

$$\Delta_1 = (y_4^{(1)} - y_{31}^{(1)})^2 (y_4^{(2)} - y_3^{(2)}) \exp(-z_3^{(1)} - z_4^{(1)}) \text{Det} \| b_{ij} \|_{i,j=1}^6 = 0, \quad (2.12)$$

$$m = \overline{1, +\infty};$$

$$\begin{aligned}
 b_{11} &= (y_3^{(1)})^2 - \frac{B_{12}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}}, \quad b_{12} = y_3^{(1)} + y_4^{(1)}, \quad b_{13} = b_{11} \exp(z_3^{(1)}), \\
 b_{14} &= b_{12} \exp(z_4^{(1)}) + b_{11} [z_3^{(1)} z_4^{(1)}]; \\
 b_{15} &= -\frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \left((y_j^{(2)})^2 - \frac{B_{12}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} \right), \quad b_{16} = -\frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} (y_3^{(2)} + y_4^{(2)}); \\
 b_{21} &= (y_j^{(1)})^3 - \frac{B_{12}^{(1)} + 4B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} y_j^{(1)}, \quad b_{22} = y_3^{(1)} y_4^{(1)} + \frac{B_{12}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}}; \\
 b_{23} &= -b_{21} \exp(z_3^{(1)}), \quad b_{24} = -b_{22} \exp(z_4^{(1)}) - b_{21} [z_3^{(1)} z_4^{(1)}], \\
 b_{25} &= \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \left((y_j^{(2)})^3 - \frac{B_{12}^{(2)} + 4B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} y_j^{(2)} \right); \\
 b_{26} &= \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \left(y_3^{(2)} y_4^{(2)} + \frac{B_{12}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} \right); \quad b_{31} = y_3^{(1)}, \quad b_{32} = 1, \\
 b_{33} &= -y_3^{(1)} \exp(z_3^{(1)}), \quad b_{34} = -\exp(z_4^{(1)}) - y_3^{(1)} [z_3^{(1)} z_4^{(1)}]; \\
 b_{35} &= y_3^{(2)}, \quad b_{36} = 1; \quad b_{41} = 1, \quad b_{42} = 0, \quad b_{43} = \exp(z_3^{(1)}), \\
 b_{44} &= [z_3^{(1)} z_4^{(1)}], \quad b_{45} = -1, \quad b_{46} = 0; \\
 b_{51} &= b_{13}, \quad b_{52} = b_{14}, \quad b_{53} = b_{11}, \quad b_{54} = b_{12}, \quad b_{55} = b_{56} = 0; \\
 b_{61} &= b_{23}, \quad b_{62} = b_{24}, \quad b_{63} = b_{21}, \quad b_{64} = b_{22}, \quad b_{65} = b_{66} = 0.
 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Уравнения (2.12) эквивалентны уравнениям

$$\text{Det} \| b_{ij} \|_{i,j=1}^6 = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}. \quad (2.14)$$

При $m l^{(1)} \rightarrow \infty$ уравнения (2.14) преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
 \text{Det} \| b_{ij} \|_{i,j=1}^6 &= G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) + \\
 &\quad + \sum_{j=3}^4 O(\exp(z_j^{(1)})) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}; \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) &= K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) + \left(\frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^2 K_1^{(2)}(\eta_m^{(2)}) + \\
 &\quad + \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \left[2 \left(y_3^{(1)} y_4^{(1)} + \frac{B_{12}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \right) \left(y_3^{(2)} y_4^{(2)} + \frac{B_{12}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + (y_3^{(1)} + y_4^{(1)}) (y_3^{(2)} + y_4^{(2)}) (y_3^{(1)} y_4^{(1)} + y_3^{(2)} y_4^{(2)}) \right], \quad m = \overline{1, +\infty}; \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

$$K_1^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = (y_3^{(r)} y_4^{(r)})^2 + 4 \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} y_3^{(r)} y_4^{(r)} - \left(\frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \right)^2, \quad r=1, 2.$$

Из (2.15) следует, что при $ml^{(1)} \rightarrow \infty$ уравнения (2.14) распадаются на уравнения [11, 13]

$$G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = 0, m = \overline{1, +\infty}; K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0, m = \overline{1, +\infty}. \quad (2.17)$$

Первая совокупность уравнений из (2.17) является дисперсионными уравнениями изгибного типа интерфейсного колебания бесконечной пластины, составленной из двух полубесконечных ортотропных пластин с разными упругими свойствами или дисперсионными уравнениями изгибного типа интерфейсного колебания бесконечной пластины-полосы, составленной из двух ортотропных полубесконечных пластин-полос с разными упругими свойствами. Вторая совокупность уравнений из (2.17) является уравнениями рэлеевского типа (уравнения Коненкова) для изгибного колебания полубесконечной пластины из материала правой пластины или пластины-полосы из материала правой пластины, со свободным краем $\alpha = l^{(1)}$, когда смежные края шарнирно закреплены.

Заметим, что в дисперсионных уравнениях (2.17) коэффициенты упругости двух составляющих пластин и соответствующие корни характеристических уравнений (2.8) входят симметричным образом. Следовательно, если левая пластина (с верхним индексом (2)) более мягкая $\rho^{(2)} / \rho^{(1)} \ll 1, B_{ij}^{(2)} / B_{ij}^{(1)} \ll 1, i, j = \overline{1, 2, 6}$, чем правая, то первая совокупность уравнений из (2.17) преобразуются к виду

$$K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = (y_3^{(1)} y_4^{(1)})^2 + 4 \frac{B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} y_3^{(1)} y_4^{(1)} - \left(\frac{B_{12}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \right)^2 = 0, \quad (2.18)$$

$$m = \overline{1, +\infty},$$

которые являются дисперсионными уравнениями изгибных колебаний правой полубесконечной пластины со свободным краем $k = 2\pi n_0 / s, n_0 \in N$ или правой полубесконечной пластины-полосы со свободным торцом $k = \pi / s$ с условиями шарнирного закрепления при $\beta = 0$ и $\beta = s$ [13]. Таким образом, в принятом предположении, существование интерфейсных колебаний изгибного типа составной пластины зависит от существования краевого колебания изгибного типа правой пластины со свободным краем $\alpha = l^{(1)}$.

Численные исследования. В таблице приведены некоторые корни $\eta_m^{(1)}$ первых двух уравнений (1.20), (2.17) и уравнений (1.17), (2.14) для $k = \pi, s = 1$ при $l^{(1)} = 15,5$, изготовленных из боропластика и бумаги с механическими параметрами [12, 14].

Боропластик:

$$\rho^{(1)} = 2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; E_1^{(1)} = 2,646 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2;$$

$$E_2^{(1)} = 1,323 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; G^{(1)} = 9,604 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2; \quad (3.1)$$

$$v_1^{(1)} = 0,2; v_2^{(1)} = 0,01.$$

Таблица — Собственные частоты краевых и интерфейсных колебаний составной полубесконечной пластины и полубесконечной пластины-полосы

m	$K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0;$ $L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = 0$	$D \parallel e_{ij} \parallel_{ij=1}^6 = 0;$ $l^{(1)} = 15; k = \pi$	$D \parallel e_{ij} \parallel_{ij=1}^6 = 0;$ $l^{(1)} = 5; k = \pi$	$K_1^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0;$ $G(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = 0$	$D \parallel b_{ij} \parallel_{ij=1}^6 = 0;$ $l^{(1)} = 15; k = \pi$	$D \parallel b_{ij} \parallel_{ij=1}^6 = 0;$ $l^{(1)} = 5; k = \pi$
1	0,96420 0,98367	0,96119 $e^{(1)}$ 0,99572 ine	—	0,01948	0,01971 $b^{(1)}$	0,02128 $b^{(1)}$
2	0,96420 0,98367	0,96417 $e^{(1)}$ 0,98396 ine	—	0,03977 0,04217	0,03954 $b^{(1)}$ 0,04023 inb	0,04150 $b^{(1)}$ 0,04268 inb
3	0,96420 0,98367	0,96419 $e^{(1)}$ 0,98368 ine	0,96119 $e^{(1)}$ 0,99572 ine	0,05920 0,06325	0,05936 $b^{(1)}$ 0,06182 inb	0,06033 $b^{(1)}$ 0,06231 inb
4	0,96420 0,98367	0,96419 $e^{(1)}$ 0,98367 ine	0,96353 $e^{(1)}$ 0,98704 ine	0,07910 0,08433	0,07914 $b^{(1)}$ 0,08054 inb	0,08020 $b^{(1)}$ 0,08154 inb
5	0,96420 0,98367	0,96419 $e^{(1)}$ 0,98367 ine	0,96407 $e^{(1)}$ 0,98464 ine	0,09815 0,10541	0,09893 $b^{(1)}$ 0,09910 inb	0,10125 $b^{(1)}$ 0,10150 inb
10	0,96420 0,98367	0,96419 $e^{(1)}$ 0,98367 ine	0,96419 $e^{(1)}$ 0,98367 ine	0,19680 0,21082	0,19756 $b^{(1)}$ 0,20037 inb	0,19784 $b^{(1)}$ 0,20256 inb
29	0,96420 0,98367	0,96419 $e^{(1)}$ 0,98367 ine	0,96419 $e^{(1)}$ 0,98367 ine	0,27344 0,59465	0,58261 $b^{(1)}$ 0,58271 inb	0,58303 $b^{(1)}$ 0,58338 inb
32	0,96420 0,98367	0,96419 $e^{(1)}$ 0,98367 ine	0,96419 $e^{(1)}$ 0,98367 ine	0,62710 0,67464	0,65117 $b^{(1)}$ 0,65141 inb	0,65300 $b^{(1)}$ 0,65380 inb
44	0,96420 0,98367	0,96419 $e^{(1)}$ 0,98367 ine	0,96419 $e^{(1)}$ 0,98367 ine	0,86230 0,92763	0,92377 $b^{(1)}$ 0,92472 inb	0,92411 $b^{(1)}$ 0,92547 inb
92	0,96420 0,98367	0,96419 $e^{(1)}$ 0,98367 ine	0,96419 $e^{(1)}$ 0,98367 ine	1,80389 1,93958	1,97847 $b^{(1)}$ 1,97854 inb	1,98003 $b^{(1)}$ 1,98004 inb

Бумага:

$$\begin{aligned} \rho^{(2)} &= 0,16 \text{ кг/м}^3; E_1^{(2)} = 2,95281 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2; \\ E_2^{(2)} &= 2,2106 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2; G^{(2)} = 9,77076 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2; \\ v_1^{(2)} &= v_2^{(2)} E_1^{(2)} / E_2^{(2)}; v_2^{(2)} = 0,23. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В таблице после характеристик собственных частот указан тип интерфейсных и краевых колебаний: $b^{(1)}$, $e^{(1)}$ — преимущественно изгибные и планарные краевые колебания; inb , ine — преимущественно изгибные и планарные интерфейсные колебания. Там, где не обнаружены интерфейсные или краевые колебания, клетки пусты. Частоты собственных краевых и интерфейсных колебаний для составной полубесконечной пластины или полубесконечной пластины-полосы определяются совокупностью уравнений (1.17), (2.14). Существование краевых и интерфейсных колебаний зависит от ширины пластины-полосы, длины конечного прямоугольника и коэффициентов упругости.

Численный анализ показывает, что с уменьшением длины конечного прямоугольника первые частоты краевых и интерфейсных колебаний преимущественно изгибного типа не уменьшаются. При фиксированном m первая частота краевых колебаний преимущественно планарного типа и изгибного типа предшествует частоте интерфейсных колебаний того же типа.

Численные результаты показывают, что асимптотические формулы (1.18) и (2.15) дисперсионных уравнений (1.17) и (2.14) являются хорошим ориентиром для нахождения собственных частот задач (1.1)–(1.4), (1.1)–(1.3), (1.5).

Заключение. В работе введены дисперсионные уравнения изгибного и планарного типа интерфейсных и краевых собственных колебаний для составной пластины. Выполненный численный анализ показал, что наличие интерфейсных или краевых колебаний составных пластин зависит как от геометрических характеристик, так и от модулей упругости составляющих пластин.

Полученные дисперсионные уравнения могут быть использованы для предсказания спектра частот собственных колебаний, локализованных

вблизи линий сопряжений тонкостенных составных конструкций, имеющих различные физические характеристики.

Список литературы

1. Pietraszkiewicz, W. Shell Structures, Theory and Applications / W. Pietraszkiewicz, Cz. Szymczak (Eds.) // Proceedings of the 8th International conference on shell structures (SSTA 2005).
2. Rayleigh, J.W. On waves propagated along the plate surface of an elastic solids / J.W. Rayleigh // Proc. London Math. Soc. 1885. 17. — Pp. 4–11.
3. Викторов, И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах / И.А. Викторов. — М.: Наука, 1981. — 288 с.
4. Гринченко, В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. — К.: Наук. думка, 1981. — 284 с.
5. Михасев, Г.И. Локализованные колебания и волны в тонких оболочках. Асимптотические методы / Г.И. Михасев, П.Е. Товстик. — М.: Физматлит, 2009. — 292 с.
6. Зильбергейт, А.С. Контактные волны изгиба в тонких пластинках / А.С. Зильбергейт, И.Б. Сулова // Акуст. журнал. — 1985. — Т. 29, № 2. — С. 186–191.
7. Гертман, И.П. Отражение и прохождение звуковых волн через границу раздела двух состыкованных упругих полуполос / И.П. Гертман, О.Н. Лисицкий // Прикл. математика и механика. — 1988. — Т. 52, № 6. — С. 1044–1048.
8. Stoneley, R. The elastic waves at the interface of two solids / R. Stoneley // Proc. Roy Soc. London A. 106 (1924). — Pp. 416–429.
9. Вильде, М.В. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах / М.В. Вильде, Ю.Д. Каплунов, Л.Ю. Коссович. — М.: Физматлит, 2010. — 280 с.
10. Свободные интерфейсные колебания бесконечной безмоментной цилиндрической оболочки с произвольной направляющей / Г.Р. Гулгазарян [и др.] // Вестник ФФИ. — 2012. — № 1. — С. 59–80.
11. Гулгазарян, Г.Р. О свободных интерфейсных колебаниях тонких упругих круговых цилиндрических оболочек / Г.Р. Гулгазарян, Р.Г. Гулгазарян // Механика машин, Механизмов и материалов. — 2013. — № 4(25). — С. 12–19.
12. Амбарцумян, С.А. Теория анизотропных пластин / С.А. Амбарцумян. — М.: Наука, 1967. — 266 с.
13. Гулгазарян, Г.Р. Свободные интерфейсные и краевые колебания тонких упругих полубесконечных круговых цилиндрических оболочек со свободным торцом. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред / Г.Р. Гулгазарян, Р.Г. Гулгазарян, Г.И. Михасев. — Ереван: Чаргарагет, 2014. — С. 187–191.
14. Гулгазарян, Г.Р. Плотность частот свободных колебаний тонкой анизотропной оболочки, составленной из анизотропных слоев / Г.Р. Гулгазарян, В.Б. Лидский // Изв. АН СССР. МТТ. — 1982. — № 3. — С. 171–174.

GHULGHAZARYAN Gurgun R., Dr. Phys.-Math. Sc., Professor

Professor at the Department of Mathematical Analysis and Theory of Functions

E-mail: ghulgr@yahoo.com

Armenian State Pedagogical University After Khachatur Abovyan, Yerevan, Republic of Armenia

GHULGHAZARYAN Ruben G., Cand. Phys.-Math. Sc.

Lead Engineer

E-mail: ghulgr@yahoo.com

Mentor Graphics Development Services, Yerevan, Republic of Armenia

MIKHASEV Gennadij I., Dr. Phys.-Math. Sc., Professor

Head of the Department of Bio- and Nano-Mechanics

E-mail: mikhasev@bsu.by

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

Received 13 March 2015.

ON FREE BOUNDARY AND INTERFACIAL VIBRATIONS OF THIN ELASTIC SEMI-INFINITE PLATES WITH FREE END

Free planar and bending interfacial and boundary vibrations of semi-infinite composed plates and plate-strips are studied. Using the system of equations of the related classical theory of orthotropic plates, dispersion equations and asymptotic formulas for obtaining eigenfrequencies of interfacial and boundary vibrations of composed plates are derived. An asymptotic link is established between the dispersion equations of problems in hand and analogous problems for infinite composed plate and infinite plate-strip, respectively.

Keywords: *interfacial vibrations, natural frequencies, plate*

References

- Pietraszkiewicz W., Szymczak Cz. (Eds.) Shell Structures, Theory and Applications. *Proceedings of the 8th International conference on shell structures (SSTA 2005)*.
- Rayleigh J.W. On waves propagated along the plate surface of an elastic solids. *Proc. London Math. Soc.* 1885, vol. 17, pp. 4–11.
- Viktorov I.A. *Zvukovye poverkhnostnye volny v tverdykh telakh* [Sound surface waves in solid bodies]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 288 p.
- Grinchenko W.T., Meleshko V.V. *Garmonicheskie kolebaniya i volny v uprugikh telakh* [Harmonic vibrations and waves in elastic bodies]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1981. 284 p.
- Mikhasev G.I., Tovstik P.E. *Lokalizovannye kolebaniya i volny v tonkikh obolochkakh. Asimptoticheskie metody*. [Localized vibrations and waves in thin shells: Asymptotic methods]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009. 292 p.
- Zilbergeyt A.S., Suslova I.B. *Kontaktnye volny izgiba v tonkikh plastinkakh* [Contact bending waves in thin plates]. *Akust. Zhurnal* [Acoustic magazine], 1983, vol. 29, pp. 186–191.
- Gertman I.P., Lisitskiy O.N. *Otrazhenie i prokhozhdenie zvukovykh voln cherez granitsu razdela dvukh sostykovannykh uprugikh polupolos* [Reflection and transmission of acoustic waves at the interface of separation of two elastic semi-strips] *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1998, vol. 52, pp. 1044–1048.
- Stoneley R. The elastic waves at the interface of two solids. *Proc. Roy Soc. London A.* 1924, vol. 106, pp. 416–429.
- Vilde M.V., Kaplunov Yu.D., Kossovich L.Yu. *Kraevye i interfeysnye rezonansnye yavleniya v uprugikh telakh* [Edge and interfacial resonance phenomenon in elastic solids]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010. 280 p.
- Gulgazaryan G.R., Gulgazaryan L.G., Miklashevich I.A., Pletezhov A.A., Chachanyan A.A. Svobodnye interfeysnye kolebaniya beskonechoy bezmomentnoy tsilindricheskoy obolochki s proizvolnoy napravlyayushey [Free interfacial vibrations of unmoment infinite cylindrical shells with arbitrary smooth directing curve]. *Vestnik FFI* [Vestnik of the Foundation for Fundamental Research], 2012, no. 1, pp. 59–80.
- Gulgazaryan G.R., Gulgazaryan R.G. O svobodnykh interfeysnykh kolebaniyakh tonkikh uprugikh krugovykh tsilindricheskikh obolochek [About free interfacial vibrations of thin elastic circular cylindrical shells]. *Mechanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2013, no. 4(25), pp. 12–19.
- Ambartsumyan S.A. *Teoriya anizotropnykh obolochek* [The Theory of Anisotropic Shells]. Moscow, Gos.izd.fiz.mat.lit., 1961. 384 p.
- Gulgazaryan G.R., Gulgazaryan R.G., Mikhasev G.I. Svobodnye interfacnye i kraevye kolebaniya tonkikh uprugikh polubeskonechnykh krugovykh tsilindricheskikh obolochek so svobodnym tortsom [Free interfacial and boundary vibrations of thin elastic semi-infinite circular cylindrical shells]. *Problemy dinamiki vzaimodeystviya deformiruemyykh sred* [The problems of dynamics of interaction of deformable media], Yerevan, Chartaraget Publ., 2014. pp. 187–191.
- Gulgazaryan G.R., Lidskiy V.B. *Plotnost' chastot svobodnykh kolebaniy tonkoy anizotropnoy obolochki, sostavlennoy iz anizotropnykh sloev* [The frequency density of the free vibrations of a thin anisotropic shell composed of anisotropic layers]. *Izv. AN SSSR MTT* [News AN SSSR MTT], 1982, no. 3, pp. 171–174.