



МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 536.21+539.3

И.Г. ВЕЛИЧКО, канд. физ.-мат. наук, доцент

заведующий кафедрой «Высшая математика и физика»

E-mail: wig64@mail.ru

Таврический государственный агротехнологический университет, г. Мелитополь, Украина

Поступила в редакцию 18.06.2015.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ОСНОВАНИЙ

Предложен метод решения двумерной стационарной задачи термоупругости для многослойного, неограниченного в плане, основания с плоскопараллельными слоями. На верхней границе температура и напряжения описываются периодическими функциями. На нижней границе температура и перемещения нулевые. На общей границе слоев выполняются условия непрерывности температурного поля и равенство тепловых потоков. Искомые функции в каждом из слоев записаны в виде тригонометрических рядов Фурье. Для обеспечения выполнения условий на общих границах слоев предлагается модификация метода матриц податливости. Сформулирован алгоритм решения задачи. Показано, что способ дает точное решение задачи для любого конечного количества слоев. По результатам теоретических исследований проведены численные эксперименты. Сформулированы выводы, касающиеся выявленных термоупругих эффектов.

Ключевые слова: многослойное основание, термоупругость, рекуррентные соотношения, матрицы податливости, ряд Фурье, закон Фурье

Введение. Составляющими элементами многих инженерных объектов являются многослойные плиты, пластины, основания или оболочки. Это связано с тем, что за счет слоистости материалов можно добиться уменьшения веса, улучшения звукоизоляционных, теплоизоляционных свойств при уменьшении их стоимости.

В связи с этим возникает необходимость предсказывать результаты действий различных физических полей на многослойные конструкции. Особый интерес представляют разработка аналитических методов, так как в этом случае можно гарантировать необходимую точность вычислений и исследовать влияние физических и механических характеристик сред на их поведение. Однако такие решения можно получить только в исключительных случаях. Одним из важных видов физических полей является тепловое. Таким образом, задача аналитического описания полей температур, напряжений и деформаций в многослойном основании актуальна.

Решению некоторых задач термоупругости посвящены такие фундаментальные исследования

как, например, [1–3]. Подробный анализ построения и применения модели, описывающей теплопроводность многослойных конструкций, представлен в работе [4]. Известны различные способы получения точных и приближенных аналитических решений. Так, метод однородных решений используется в работах [5, 6]. Метод функций Грина, с использованием аппарата обобщенных функций, используется в работе [7]. Метод жесткостных функций в подобных задачах применялся в [8]. Приближенные методы анализа термоупругих многослойных балок обсуждаются в [9].

В данной работе используются матрицы податливости, введенные в работе [10] для оснований с упругими слоями, без учета температурных эффектов. Метод матриц податливости является модификацией метода функций податливости, который для задач термоупругости применялся в работах [11–13].

Постановка задачи. Рассмотрим многослойное основание, представляющее собой плиту, состоящую из n сцепленных слоев, сцепленную с абсолютно жестким полупространством. Слои являют-

ся неограниченными в плане. В статье рассматривается статическая двумерная постановка, поэтому вместо слова полупространство будем употреблять полуплоскость.

Слои нумеруются сверху вниз. Величины, относящиеся к i -му слою будем снабжать индексом i . Полуплоскость получает номер $n + 1$. Каждый слой характеризуется модулем сдвига μ_i , безразмерным коэффициентом ω_i , который выражается через коэффициент Пуассона ν следующим образом:

$$\omega_i = \frac{1}{2(1-\nu_i)}, \text{ коэффициентом теплопроводности } \lambda_i,$$

и приведенным коэффициентом теплового расширения $K_i = (4\omega_i - 1)\alpha_{Ti}$, выраженным через коэффициент теплового расширения α_T для i -го слоя.

На верхней границе верхнего слоя заданы температура и напряжения, который являются периодическими по координате с одинаковым периодом. На границе полуплоскости перемещения равны нулю и поддерживается нулевая температура.

На общей границе слоев выполняются условия непрерывности температурного поля и равенства тепловых потоков (закон Фурье). Для деформаций и напряжений выполняется закон Дюамеля–Неймана.

В каждом слое введем прямоугольную декартову систему координат так, как показано на рисунке 1. Переходим к безразмерным величинам таким образом, чтобы периоды функций, задающих граничные условия, были равны 2π .

Случай одного слоя. Рассматривается двумерная стационарная задача термоупругости для однородной изотропной невесомой полосы $-\infty < x < \infty$, $0 < z < h$. Для простоты в этом пункте индекс i опускаем.

Обозначим $T(x, z)$, $u(x, z)$, $w(x, z)$ соответственно температуру и компоненты вектора перемещений в слое.

Функция $T(x, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

Уравнения равновесия в перемещениях имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \omega \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + (1-\omega) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = K \frac{\partial T}{\partial x}; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \omega \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + (1-\omega) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = K \frac{\partial T}{\partial z}. \end{cases} \quad (2)$$

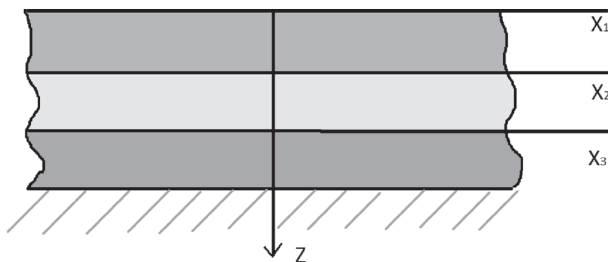


Рисунок 1 — Трехслойное основание

Напряжения выражаются через перемещения и температуру согласно закону Дюамеля–Неймана

$$\begin{cases} (1-\omega)\sigma_z = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial z} + (2\omega-1) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \mu KT; \\ (1-\omega)\sigma_x = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + (2\omega-1) \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \mu KT; \\ \tau_{xz} = \mu \gamma_{xz}. \end{cases} \quad (3)$$

Искомые функции представляем в виде рядов Фурье

$$T = T_0(z) + \sum_{m=1}^{\infty} T_m(z) \cos mx + \tilde{T}_m(z) \sin mx; \quad (4)$$

$$\begin{cases} w = w_0(z) + \sum_{m=1}^{\infty} w_m(z) \cos mx + \tilde{w}_m(z) \sin mx; \\ u = \tilde{u}_0(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{u}_m(z) \cos mx + u_m(z) \sin mx; \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \sigma_z = \sigma_0(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m(z) \cos mx + \tilde{\sigma}_m(z) \sin mx; \\ \tau_{xz} = \tilde{\tau}_0(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\tau}_m(z) \cos mx + \tau_m(z) \sin mx. \end{cases} \quad (6)$$

Подставим (4) в (1). После разделения гармоник получим дифференциальные уравнения

$$T_0'' = 0; \quad (7)$$

$$T_m'' - m^2 T_m'' = 0; \quad \tilde{T}_m'' - m^2 \tilde{T}_m'' = 0. \quad (8)$$

При подстановке (5) в (2) после разделения гармоник получим системы

$$\begin{cases} \tilde{u}_0'' = 0; \\ w_0'' = KT_0'; \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} (1-\omega)u_m'' - m^2 u_m - m\omega w' = -KmT_m; \\ w'' - (1-\omega)m^2 w_m + m\omega u_m' = KT_m'; \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} (1-\omega)\tilde{u}_m'' - m^2 \tilde{u}_m + m\omega \tilde{w}' = Km\tilde{T}_m; \\ \tilde{w}'' - (1-\omega)m^2 \tilde{w}_m - m\omega \tilde{u}_m' = K\tilde{T}_m'. \end{cases} \quad (11)$$

Подставив (5) и (6) в (3), получим соотношения

$$\begin{cases} (1-\omega)\sigma_0 = \mu w_0' - \mu KT_0'; \\ \tilde{\tau}_0 = \mu u_0'; \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} (1-\omega)\sigma_m = \mu (w_m' + m(2\omega-1)u - KT_m); \\ \tau_m = \mu (u_m' - mw_m); \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} (1-\omega)\tilde{\sigma}_m = \mu (\tilde{w}_m' - m(2\omega-1)\tilde{u}_m - K\tilde{T}_m); \\ \tilde{\tau}_m = \mu (\tilde{u}_m' + m\tilde{w}_m). \end{cases} \quad (14)$$

Введем вспомогательные последовательности слоя, связанные с разложениями в ряды Фурье

температуры, теплового потока, напряжений и перемещений:

$$T(x, 0) = \eta_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \eta_m \cos mx + \tilde{\eta}_m \sin mx;$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}(x, 0) = \varepsilon_0 + \sum_{m=1}^{\infty} m(\varepsilon_m \cos mx + \tilde{\varepsilon}_m \sin mx); \quad (15)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_z(x, 0) &= \alpha_0 + \sum_{m=1}^{\infty} m(\alpha_m \cos mx + \tilde{\alpha}_m \sin mx); \\ \tau_{xz}(x, 0) &= \tilde{\delta}_0 + \sum_{m=1}^{\infty} m(\tilde{\delta}_m \cos mx + \delta_m \sin mx); \end{aligned} \right. \quad (16)$$

$$\left\{ \begin{aligned} w(x, 0) &= \beta_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \cos mx + \tilde{\beta}_m \sin mx; \\ u(x, 0) &= \tilde{\gamma}_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\gamma}_m \cos mx + \gamma_m \sin mx. \end{aligned} \right. \quad (17)$$

Подставив $z = 0$ в (4)–(6), получим соотношения

$$\begin{aligned} \eta_0 &= T_0(0); \eta_m = T_m(0); \tilde{\eta}_m = \tilde{T}_m(0); \\ \varepsilon_0 &= T'_0(0); m\varepsilon_m = T'_m(0); m\tilde{\varepsilon}_m = \tilde{T}'_m(0); \\ \alpha_0 &= \sigma_0(0); m\alpha_m = \sigma_m(0); m\tilde{\alpha}_m = \tilde{\sigma}_m(0); \\ \tilde{\delta}_0 &= \tau_0(0); m\tilde{\delta}_m = \tau_m(0); m\delta_m = \tilde{\tau}_m(0); \\ \beta_0 &= \mu w_0(0); \beta_m = \mu w_m(0); \tilde{\beta}_m = \mu \tilde{w}_m(0); \\ \tilde{\gamma}_0 &= \mu \tilde{u}_0(0); \gamma_m = \mu u_m(0); \tilde{\gamma}_m = \mu \tilde{u}_m(0). \end{aligned} \quad (18)$$

Опуская подробности, выпишем явные выражения для коэффициентов рядов (4)–(6) через вспомогательные последовательности слоя

$$T(x, z) = \eta_0 + \varepsilon_0 z + \sum_{m=1}^{\infty} (\eta_m \bar{C} + \varepsilon_m \bar{S}) \cos mx + \sum_{m=1}^{\infty} (\tilde{\eta}_m \bar{C} + \tilde{\varepsilon}_m \bar{S}) \sin mx;$$

$$\sigma_z(x, z) = \alpha_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\alpha_m (\bar{C} - \omega \bar{z} \bar{S}) + 2\beta_m \omega (\bar{S} - \bar{z} \bar{C}) - 2\gamma_m \omega \bar{z} \bar{S} - \delta_m (\omega \bar{z} \bar{C} + (1-\omega) \bar{S}) + \frac{K\mu}{m} (\eta_m \bar{z} \bar{S} + \varepsilon_m (\bar{z} \bar{C} - \bar{S})) \right) m \cos mx + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\tilde{\alpha}_m (\bar{C} - \omega \bar{z} \bar{S}) + 2\tilde{\beta}_m \omega (\bar{S} - \bar{z} \bar{C}) + 2\tilde{\gamma}_m \omega \bar{z} \bar{S} + \tilde{\delta}_m (\omega \bar{z} \bar{C} + (1-\omega) \bar{S}) + \frac{K\mu}{m} (\tilde{\eta}_m \bar{z} \bar{S} + \tilde{\varepsilon}_m (\bar{z} \bar{C} - \bar{S})) \right) m \sin mx;$$

$$\tau_{xz}(x, z) = \tilde{\delta}_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\tilde{\alpha}_m ((1-\omega) \bar{S} - \omega \bar{z} \bar{C}) - 2\tilde{\beta}_m \omega \bar{z} \bar{S} + 2\tilde{\gamma}_m \omega (\bar{S} + \bar{z} \bar{C}) + \tilde{\delta}_m (\bar{C} + \omega \bar{z} \bar{S}) + \frac{K\mu}{m} (\tilde{\eta}_m (\bar{S} + \bar{z} \bar{C}) + \tilde{\varepsilon}_m \bar{z} \bar{S}) \right) m \cos mx + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\alpha_m (\omega \bar{z} \bar{C} - (1-\omega) \bar{S}) + 2\beta_m \omega \bar{z} \bar{S} + 2\gamma_m \omega (\bar{S} + \bar{z} \bar{C}) + \delta_m (\bar{C} + \omega \bar{z} \bar{S}) - \frac{K\mu}{m} (\eta_m (\bar{S} + \bar{z} \bar{C}) + \varepsilon_m \bar{z} \bar{S}) \right) m \sin mx;$$

$$\begin{aligned} \mu w(x, z) &= \mu K \varepsilon_0 \frac{z^2}{2} + ((1-\omega) \alpha_0 + \mu K \eta_0) z + \beta_0 + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \left(\begin{aligned} &0,5\alpha_m ((2-\omega) \bar{S} - \omega \bar{z} \bar{C}) + \beta_m (\bar{C} - \omega \bar{z} \bar{S}) + \\ &+ \gamma_m ((1-\omega) \bar{S} - \omega \bar{z} \bar{C}) - 0,5\delta_m \omega \bar{z} \bar{S} + \\ &+ \frac{K\mu}{2m} (\eta_m (\bar{z} \bar{C} + \bar{S}) + \varepsilon_m \bar{z} \bar{S}) \end{aligned} \right) \cos mx + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \left(\begin{aligned} &0,5\tilde{\alpha}_m ((2-\omega) \bar{S} - \omega \bar{z} \bar{C}) + \tilde{\beta}_m (\bar{C} - \omega \bar{z} \bar{S}) + \\ &+ \tilde{\gamma}_m (\omega \bar{z} \bar{C} - (1-\omega) \bar{S}) + 0,5\tilde{\delta}_m \omega \bar{z} \bar{S} + \\ &+ \frac{K\mu}{2m} (\tilde{\eta}_m (\bar{z} \bar{C} + \bar{S}) + \tilde{\varepsilon}_m \bar{z} \bar{S}) \end{aligned} \right) \sin mx; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mu u(x, z) &= \tilde{\delta}_0 z + \tilde{\gamma}_0 + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \left(\begin{aligned} &-\frac{\tilde{\alpha}_m}{2} \omega \bar{z} \bar{S} - \tilde{\beta}_m (\omega \bar{z} \bar{C} + (1-\omega) \bar{S}) + \\ &+ \tilde{\gamma}_m (\bar{C} + \omega \bar{z} \bar{S}) + \frac{\tilde{\delta}_m}{2} (\omega \bar{z} \bar{C} + (2-\omega) \bar{S}) + \\ &+ \frac{K\mu}{2m} (\tilde{\eta}_m \bar{z} \bar{S} + \tilde{\varepsilon}_m (\bar{z} \bar{C} - \bar{S})) \end{aligned} \right) \cos mx + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \left(\begin{aligned} &\frac{\alpha_m}{2} \omega \bar{z} \bar{S} + \beta_m (\omega \bar{z} \bar{C} + (1-\omega) \bar{S}) + \\ &+ \gamma_m (\bar{C} + \omega \bar{z} \bar{S}) + \frac{\delta_m}{2} (\omega \bar{z} \bar{C} + (2-\omega) \bar{S}) - \\ &- \frac{K\mu}{2m} (\eta_m \bar{z} \bar{S} + \varepsilon_m (\bar{z} \bar{C} - \bar{S})) \end{aligned} \right) \sin mx, \end{aligned}$$

где $\bar{z} = mz$; $\bar{C} = ch(mz)$; $\bar{S} = sh(mz)$.

Формулы (19) показывают, что для определения термонапряженного состояния слоя достаточно знать шесть вспомогательных последовательностей этого слоя (в двумерном случае).

Деформация пакета слоев. Если будем рассматривать соседние слои с номерами i и $i + 1$, то граничные условия на общей границе имеют вид:

$$\begin{aligned} T_i(x, h_i) &= T_{i+1}(x, 0); \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial z}(x, h_i) = \lambda_{i+1} \frac{\partial T_{i+1}}{\partial z}(x, 0); \\ \sigma_{zi}(x, h_i) &= \sigma_{z(i+1)}(x, 0); \tau_{xzi}(x, h_i) = \tau_{xzi+1}(x, 0); \\ w_i(x, h_i) &= w_{i+1}(x, 0); u_i(x, h_i) = u_{i+1}(x, 0). \end{aligned} \quad (20)$$

Соотношения (20) позволяют записать рекуррентные соотношения для элементов вспомогательных последовательностей соседних слоев.

Для нулевой гармоники

$$\begin{aligned} \eta_{i+1,0} &= \eta_{i0} + \varepsilon_{i0} h_i; \varepsilon_{i+1,0} = \tilde{\Delta}_i \varepsilon_{i0}; \alpha_{i+1,0} = \alpha_{i0}; \tilde{\delta}_{i+1,0} = \tilde{\delta}_{i0}; \\ \beta_{i+1,0} &= \Delta_i \left(\alpha_{i0} (1-\omega) h_i + \beta_{i0} + K_i \mu_i h_i \eta_{i0} + K_i \mu_i \frac{h_i^2}{2} \varepsilon_{i0} \right); \\ \tilde{\gamma}_{i+1,0} &= \Delta_i (\tilde{\gamma}_{i0} + \tilde{\delta}_{i0} h_i). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь и далее $\tilde{\Delta}_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}}$; $\Delta_i = \frac{\mu_{i+1}}{\mu_i}$.

Для остальных гармоник запишем эти соотношения в матричном виде:

$$\begin{aligned} \Gamma_{i+1m} &= \Lambda_{im} \Gamma_{im}; \tilde{\Gamma}_{i+1m} = \Lambda_{im} \tilde{\Gamma}_{im}; \\ A_{i+1m} &= M_{im} A_{im} + N_{im} B_{im} + E_{im} \Gamma_{im}; \\ \tilde{A}_{i+1m} &= \tilde{M}_{im} \tilde{A}_{im} + \tilde{N}_{im} \tilde{B}_{im} + \tilde{E}_{im} \tilde{\Gamma}_{im}; \\ B_{i+1m} &= P_{im} A_{im} + Q_{im} B_{im} + F_{im} \Gamma_{im}; \\ \tilde{B}_{i+1m} &= \tilde{P}_{im} \tilde{A}_{im} + \tilde{Q}_{im} \tilde{B}_{im} + \tilde{F}_{im} \tilde{\Gamma}_{im}. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Gamma_{im} &= \begin{pmatrix} \eta_{im} \\ \varepsilon_{im} \end{pmatrix}; \tilde{\Gamma}_{im} = \begin{pmatrix} \tilde{\eta}_{im} \\ \tilde{\varepsilon}_{im} \end{pmatrix}; A_{im} = \begin{pmatrix} \alpha_{im} \\ \delta_{im} \end{pmatrix}; \tilde{A}_{im} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_{im} \\ \tilde{\delta}_{im} \end{pmatrix}; \\ B_{im} &= \begin{pmatrix} \beta_{im} \\ \gamma_{im} \end{pmatrix}; \tilde{B}_{im} = \begin{pmatrix} \tilde{\beta}_{im} \\ \tilde{\gamma}_{im} \end{pmatrix}; \Lambda_{im} = \begin{pmatrix} \bar{C}_{im} & \bar{S}_{im} \\ \tilde{\Delta}_i \bar{S}_{im} & \tilde{\Delta}_i \bar{C}_{im} \end{pmatrix}; \\ M_{im} &= \begin{pmatrix} \bar{C}_{im} - \omega_i \bar{h}_{im} \bar{S}_{im} & -\omega_i \bar{h}_{im} \bar{C}_{im} - (1 - \omega_i) \bar{S}_{im} \\ \omega_i \bar{h}_{im} \bar{C}_{im} - (1 - \omega_i) \bar{S}_{im} & \bar{C}_{im} + \omega_i \bar{h}_{im} \bar{S}_{im} \end{pmatrix}; \\ \tilde{M}_{im} &= \begin{pmatrix} \bar{C}_{im} - \omega_i \bar{h}_{im} \bar{S}_{im} & \omega_i \bar{h}_{im} \bar{C}_{im} + (1 - \omega_i) \bar{S}_{im} \\ (1 - \omega_i) \bar{S}_{im} - \omega_i \bar{h}_{im} \bar{C}_{im} & \bar{C}_{im} + \omega_i \bar{h}_{im} \bar{S}_{im} \end{pmatrix}; \\ N_{im} &= 2\omega_i \begin{pmatrix} \bar{S}_{im} - \bar{h}_{im} \bar{C}_{im} & -\bar{h}_{im} \bar{S}_{im} \\ \bar{h}_{im} \bar{S}_{im} & \bar{S}_{im} + \bar{h}_{im} \bar{C}_{im} \end{pmatrix}; \\ \tilde{N}_{im} &= 2\omega_i \begin{pmatrix} \bar{S}_{im} - \bar{h}_{im} \bar{C}_{im} & \bar{h}_{im} \bar{S}_{im} \\ -\bar{h}_{im} \bar{S}_{im} & \bar{S}_{im} + \bar{h}_{im} \bar{C}_{im} \end{pmatrix}; \\ P_{im} &= \frac{\Delta_i}{2} \begin{pmatrix} (2 - \omega_i) \bar{S}_{im} - \omega_i \bar{h}_{im} \bar{C}_{im} & -\omega_i \bar{h}_{im} \bar{S}_{im} \\ \omega_i \bar{h}_{im} \bar{S}_{im} & (2 - \omega_i) \bar{S}_{im} + \omega_i \bar{h}_{im} \bar{C}_{im} \end{pmatrix}; \\ \tilde{P}_{im} &= \frac{\Delta_i}{2} \begin{pmatrix} (2 - \omega_i) \bar{S}_{im} - \omega_i \bar{h}_{im} \bar{C}_{im} & \omega_i \bar{h}_{im} \bar{S}_{im} \\ -\omega_i \bar{h}_{im} \bar{S}_{im} & (2 - \omega_i) \bar{S}_{im} + \omega_i \bar{h}_{im} \bar{C}_{im} \end{pmatrix}; \\ Q_{im} &= \Delta_i \begin{pmatrix} \bar{C}_{im} - \omega_i \bar{h}_{im} \bar{S}_{im} & -\omega_i \bar{h}_{im} \bar{C}_{im} + (1 - \omega_i) \bar{S}_{im} \\ \omega_i \bar{h}_{im} \bar{C}_{im} + (1 - \omega_i) \bar{S}_{im} & \bar{C}_{im} + \omega_i \bar{h}_{im} \bar{S}_{im} \end{pmatrix}; \\ \tilde{Q}_{im} &= \Delta_i \begin{pmatrix} \bar{C}_{im} - \omega_i \bar{h}_{im} \bar{S}_{im} & \omega_i \bar{h}_{im} \bar{C}_{im} - (1 - \omega_i) \bar{S}_{im} \\ -\omega_i \bar{h}_{im} \bar{C}_{im} - (1 - \omega_i) \bar{S}_{im} & \bar{C}_{im} + \omega_i \bar{h}_{im} \bar{S}_{im} \end{pmatrix}; \\ E_{im} &= \frac{K_i \mu_i}{m} \begin{pmatrix} \bar{h}_{im} \bar{S}_{im} & \bar{h}_{im} \bar{C}_{im} - \bar{S}_{im} \\ -\bar{h}_{im} \bar{C}_{im} - \bar{S}_{im} & -\bar{h}_{im} \bar{S}_{im} \end{pmatrix}; \\ \tilde{E}_{im} &= \frac{K_i \mu_i}{m} \begin{pmatrix} \bar{h}_{im} \bar{S}_{im} & \bar{h}_{im} \bar{C}_{im} - \bar{S}_{im} \\ \bar{h}_{im} \bar{C}_{im} + \bar{S}_{im} & \bar{h}_{im} \bar{S}_{im} \end{pmatrix}; \\ F_{im} &= \frac{K_i \mu_{i+1}}{2m} \begin{pmatrix} \bar{h}_{im} \bar{C}_{im} + \bar{S}_{im} & \bar{h}_{im} \bar{S}_{im} \\ -\bar{h}_{im} \bar{S}_{im} & \bar{S}_{im} - \bar{h}_{im} \bar{C}_{im} \end{pmatrix}; \\ \tilde{F}_{im} &= \frac{K_i \mu_{i+1}}{2m} \begin{pmatrix} \bar{h}_{im} \bar{C}_{im} + \bar{S}_{im} & \bar{h}_{im} \bar{S}_{im} \\ \bar{h}_{im} \bar{S}_{im} & \bar{h}_{im} \bar{C}_{im} - \bar{S}_{im} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (23)$$

и используются следующие обозначения:

$$\bar{h}_{im} = mh_i; \bar{C}_{im} = ch(mh_i); \bar{S}_{im} = sh(mh_i).$$

Таким образом, для решения поставленной задачи достаточно знать элементы только вспомогательных последовательностей первого слоя, а эле-

менты вспомогательных последовательностей можно определить по рекуррентным соотношениям (21) и (22).

Из граничных условий на верхней границе мы можем непосредственно определить только элементы трех вспомогательных последовательностей. В следующем разделе мы опишем способ нахождения элементов трех оставшихся вспомогательных последовательностей первого слоя.

Матрицы податливости многослойного основания. На границе полуплоскости поддерживается нулевая температура. Рассмотрим способ определения элемента ε_{10} по известному значению η_{10} .

Введем в рассмотрение числа r_{j0} , определяемые соотношениями

$$\varepsilon_{j0} = r_{j0} \eta_{j0} \quad (24)$$

Получим рекуррентные соотношения для r_{j0} .

Вычислим величину $\varepsilon_{i+1,0}$ двумя способами. Сначала в формуле (24) положим $j = i + 1$, потом воспользуемся рекуррентным соотношением (22):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1,0} &= r_{i+1,0} \eta_{i+1,0} = r_{i+1,0} (\eta_{i0} + h_i \varepsilon_{i0}) = \\ &= r_{i+1,0} (1 + h_i r_{i0}) \eta_{i0}. \end{aligned}$$

Теперь сначала воспользуемся рекуррентными соотношениями, а потом формулой (24):

$$\varepsilon_{i+1,0} = \tilde{\Delta}_i \varepsilon_{i0} = \tilde{\Delta}_i r_{i0} \eta_{i0}.$$

Из последних двух выражений делаем вывод, что

$$r_{i+1,0} (1 + h_i r_{i0}) = \tilde{\Delta}_i r_{i0}.$$

Разрешив это уравнение относительно r_{i0} , получаем искомое рекуррентное соотношение

$$r_{i0} = \frac{r_{i+1,0}}{\tilde{\Delta}_i - r_{i+1,0} h_i}. \quad (25)$$

Для начала вычисления по формуле (25) нужно знать r_{n0} . Для этого подставим $i = n$ в первую формулу (22) и учтем, что $\eta_{n+1,0} = 0$ (нулевая температура на границе полупространства). Получим

$$\eta_{n0} + h_n \varepsilon_{n0} = 0.$$

Отсюда находим, что $\varepsilon_{n0} = -\frac{\eta_{n0}}{h_n}$. Сравнивая с (24) делаем вывод, что для нижнего слоя

$$r_{n0} = -h_n^{-1}. \quad (26)$$

Аналогично вводятся числа r_{jm} и \tilde{r}_{jm} , определяемые соотношениями

$$\varepsilon_{jm} = r_{jm} \eta_{jm}; \tilde{\varepsilon}_{jm} = \tilde{r}_{jm} \tilde{\eta}_{jm}, \quad (27)$$

для которых получаются рекуррентные соотношения

$$r_{im} = \tilde{r}_{im} = \frac{r_{i+1m} \bar{C}_{im} - \tilde{\Delta}_i \bar{S}_{im}}{\tilde{\Delta}_i \bar{C}_{im} - r_{i+1m} \bar{S}_{im}} = \frac{r_{i+1m} - \tilde{\Delta}_i th(mh_i)}{\tilde{\Delta}_i - r_{i+1m} th(mh_i)}. \quad (28)$$

Для нижнего слоя

$$r_{nm} = \tilde{r}_{nm} = -cth(mh_n). \quad (29)$$

На границе полуплоскости перемещения точек равны нулю. Задача состоит в определении элементов β_{10} и $\tilde{\gamma}_{10}$ по известным значениям α_{10} и $\tilde{\delta}_{10}$.

Из соотношений (21) для $\alpha_{i+1,0}$ и $\tilde{\delta}_{i+1,0}$ делаем вывод, что для всех i имеет место равенство

$$\alpha_{i0} = \alpha_{10}; \tilde{\delta}_{i0} = \tilde{\delta}_{10}. \quad (30)$$

С учетом этого из (21) получаем рекуррентные формулы

$$\tilde{\gamma}_{i0} = \frac{1}{\Delta_i} \tilde{\gamma}_{i+1,0} - h_i \tilde{\delta}_{10}; \quad (31)$$

$$\beta_{i0} = \frac{1}{\Delta_i} \beta_{i+1,0} - \alpha_{10}(1-\omega)h_i - K_i \mu_i h_i \eta_{i0} - K_i \mu_i \frac{h_i^2}{2} \epsilon_{i0}.$$

Из условий на границе полупространства делаем вывод, что

$$\beta_{n+1,0} = \tilde{\gamma}_{n+1,0} = 0. \quad (32)$$

Переходим к m -й гармонике.

Введем в рассмотрение матрицы податливости $\Phi_{jm}, \tilde{\Phi}_{jm}, \Psi_{jm}, \tilde{\Psi}_{jm}$, определяемые соотношениями

$$B_{jm} = \Phi_{jm} A_{jm} + \Psi_{jm} \Gamma_{jm}; \tilde{B}_{jm} = \tilde{\Phi}_{jm} \tilde{A}_{jm} + \tilde{\Psi}_{jm} \tilde{\Gamma}_{jm}. \quad (33)$$

Для них рекуррентные соотношения имеют вид

$$\Phi_{im} = (\Phi_{i+1m} N_{im} - Q_{im})^{-1} (P_{im} - \Phi_{i+1m} M_{im});$$

$$\Psi_{im} = (Q_{im} - \Phi_{i+1m} N_{im})^{-1} (\Phi_{i+1m} E_{im} + \Psi_{i+1m} \Lambda_{im} - F_{im}). \quad (34)$$

Для выражений с тильдами все рассуждения остаются аналогичными, то есть имеют место формулы

$$\tilde{\Phi}_{im} = (\tilde{\Phi}_{i+1m} \tilde{N}_{im} - \tilde{Q}_{im})^{-1} (\tilde{P}_{im} - \tilde{\Phi}_{i+1m} \tilde{M}_{im});$$

$$\tilde{\Psi}_{im} = (\tilde{Q}_{im} - \tilde{\Phi}_{i+1m} \tilde{N}_{im})^{-1} (\tilde{\Phi}_{i+1m} \tilde{E}_{im} + \tilde{\Psi}_{i+1m} \tilde{\Lambda}_{im} - \tilde{F}_{im}). \quad (35)$$

Для нижнего слоя

$$\Phi_{nm} = -Q_{nm}^{-1} P_{nm}; \Psi_{nm} = -Q_{nm}^{-1} F_{nm}; \tilde{\Phi}_{nm} = -\tilde{Q}_{nm}^{-1} \tilde{P}_{nm}; \tilde{\Psi}_{nm} = -\tilde{Q}_{nm}^{-1} \tilde{F}_{nm}. \quad (36)$$

После определения матриц податливости всех слоев, начиная с нижнего, можем определить элементы недостающих последовательностей первого слоя, и задача оказывается решенной.

Примеры численного моделирования. Рассмотрено основание, состоящее из трех слоев одинаковой толщины $h = 1$ с $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0,65$. На верхней границе поддерживается температура, которая описывается функцией $1 + \cos x + \sin x + \cos 2x + \sin 2x$. Верхняя граница основания свободна от нагрузок. Все графики, для удобства, строятся на двух периодах. Номер графика означает, что он относится к верхней границе слоя с этим номером. Таким образом цифра 4 означает, что мы рассматриваем границу полуплоскости.

Будем рассматривать четыре типа оснований, характеристики слоев которых приведены в следующей таблице.

На рисунке 2 приведены распределения температур на границах слоев для основания I, а на рисунке 3 напряжения σ_z для этого же основания. На ри-

Таблица — Характеристики слоев

Тип основания	K_1, K_2, K_3	$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	μ_1, μ_2, μ_3
I	1, 1, 1	1, 1, 1	1, 1, 1
II	1, 10, 1	1, 1, 1	1, 1, 1
III	1, 1, 1	1, 10, 1	1, 1, 1
IV	1, 1, 1	1, 1, 1	1, 10, 1

сунке 4 и рисунке 5 приведены аналогичные графики для основания II. Поскольку распределение температур не зависит от коэффициентов теплового расширения и модуля сдвига, то для оснований типа III и IV оно совпадает с распределением для основания I.

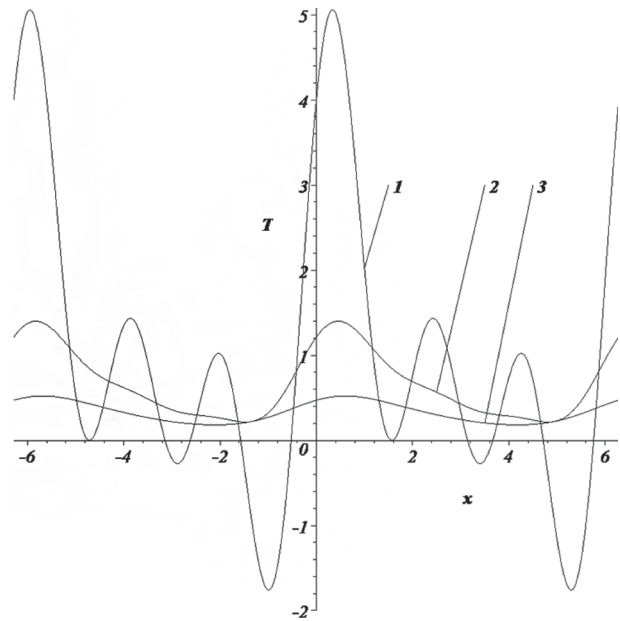


Рисунок 2 — Температура в основании I

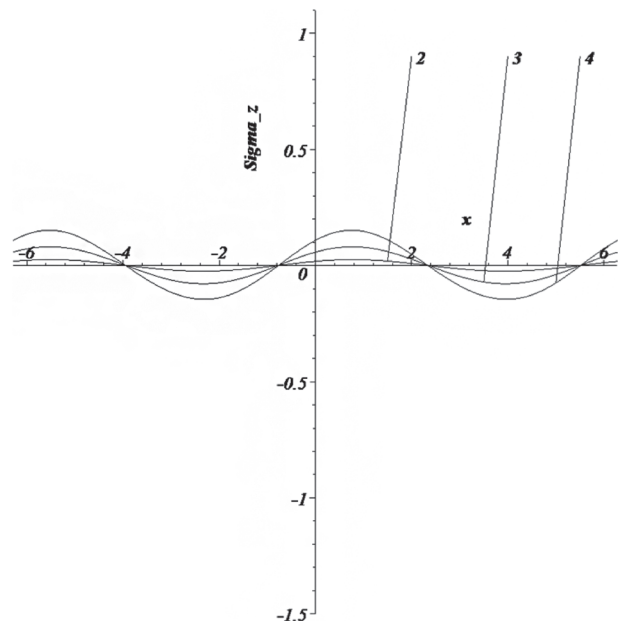


Рисунок 3 — Напряжения в основании I

На рисунке 6 и рисунке 7 приведены графики напряжений σ_z для оснований типа III и IV.

Рисунок 2 и рисунок 3 соответствуют, по сути, однородному слою толщины 3, на нижней границе которого поддерживается нулевая температура, сцепленного с абсолютно жесткой полуплоскостью. При приближении к нижнему слою наблюдается выравнивание температур в горизонтальных сечениях, причем максимумы уменьшаются пропорционально расстоянию до нижней границы. Поскольку к верхней границе не приложены усилия, то нормальные напряжения, вызванные неоднородностью температурного поля, наоборот, возрастают с глубиной горизонтального сечения.

Как видим из рисунка 4, если слой характеризуется большим коэффициентом теплопровод-

ности, то на его нижней и верхней границах температуры в соответствующих точках мало отличаются. В этом случае и напряжения σ_z на нижних границах всех слоев мало отличаются друг от друга (см. рисунок 5). Наибольшие нормальные напряжения между слоями возникают для оснований, у которых модуль сдвига среднего слоя существенно превышает модуль сдвига крайних слоев (см. рисунок 6). Для оснований, у которых модуль теплового расширения среднего слоя превосходит аналогичные модули для внешних слоев, напряжения σ_z в верхнем слое сравнительно малы (см. рисунок 7).

Приведенные результаты позволяют оценить влияние изменения характеристик среднего слоя на перераспределение теплового поля и поля напряжений в трехслойном основании.

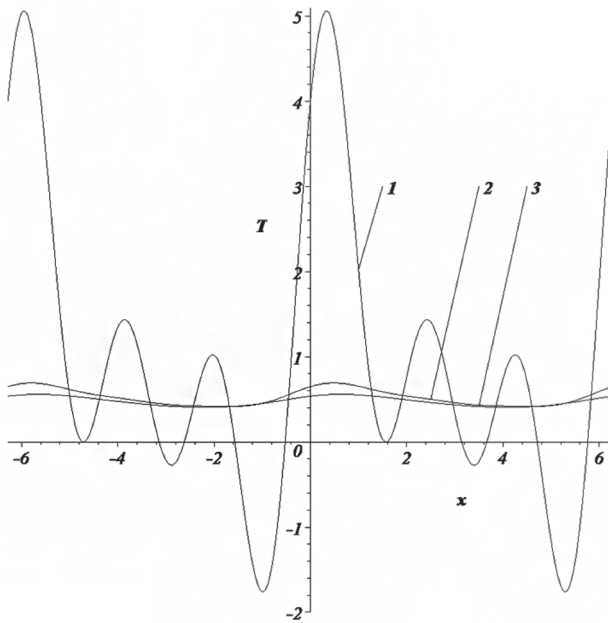


Рисунок 4 — Температура в основании II

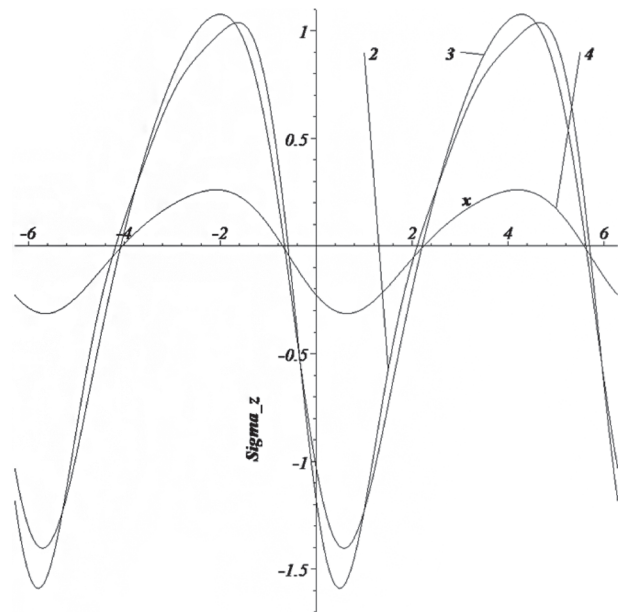


Рисунок 6 — Напряжения в основании III

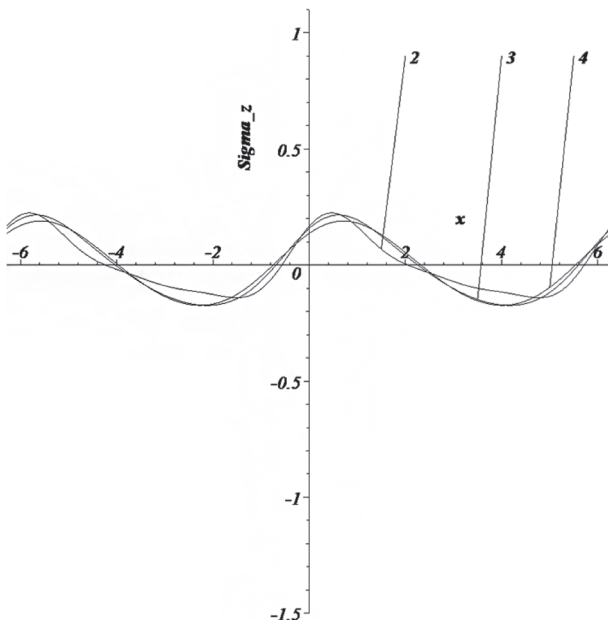


Рисунок 5 — Напряжения в основании II

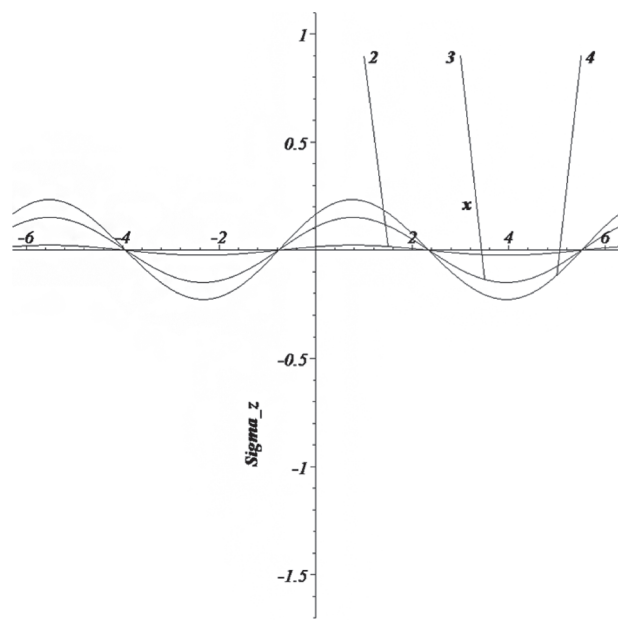


Рисунок 7 — Напряжения в основании IV

Вывод. Предложенный метод позволяет получить в виде тригонометрических рядов решение двумерной стационарной задачи термоупругости с периодическими граничными условиями для многослойного основания. Для случая, когда граничные условия представляются тригонометрическими многочленами, получается точное аналитическое решение. Результат проведенных численных экспериментов для трехслойного основания согласуется с физическим смыслом и демонстрирует эффективность предложенных численных процедур.

Список литературы

1. Подстригач, Я.С. Теплоупругость тел неоднородной структуры / Я.С. Подстригач, В.А. Ломакин, Ю.М. Коляно. — М.: Наука, 1984. — 368 с.
2. Коваленко, А.Д. Основы термоупругости / А.Д. Коваленко. — К.: Наук. думка, 1970. — 307 с.
3. Кудинов, В.А. Аналитические решения задач теплопереноса и термоупругости для многослойных конструкций / В.А. Кудинов, Э.М. Карташов, В.В. Калашников // М.: Высш. шк. — 2005. — 430 с.
4. Ухин, Д.В. Математическая модель расчета температуры многослойной конструкции дорожной одежды в условиях перемены температур / Д.В. Ухин // Вестн. ВолгАСУ. Сер. Стр.-во и архит. 2010. — Вып. 17(36). — С. 66–69.
5. Алтухов, Е.В. Метод однородных решений в трехмерных задачах термоупругости для транспортных пластин / Е.В. Алтухов // Теорет. и прикл. мех. — 2003. — № 37. — С. 8–13.
6. Алтухов, Е.В. Однородные решения трехмерных задач о распространении гармонических волн в транспортных термоупругих пластинах / Е.В. Алтухов, В.П. Шевченко // Доп. НАН України. — 2007. — № 4. — С. 49–53.
7. Прошок, Б.В. Метод функций Грина в осесимметричных задачах пружности та термопружності кусково-однорідних ортотропних тіл / Б.В. Прошок // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2000. — 43, № 1. — С. 94–101.
8. Горынин, Г.Л. Метод жесткостных функций в задачах расчета многослойных стержней при температурных нагрузках / Г.Л. Горынин, Ю.В. Немировский // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2012. — 55, № 2. — С. 144–155.
9. Neng-Hus Zhang. Thermoelastic stresses in multilayered beams / Neng-Hus Zhang // Thin Solid Films. — 2007. — 515. — Pp. 8402–8406.
10. Величко, О.В. Плоска деформація пружної багатошарової плити під дією періодичної системи навантажень / О.В. Величко // Вісн. Дніпропетровського ун-ту. Сер. Механіка. — Дніпропетровськ: Вид. Дніпропетровського ун-ту. — 2004. — № 6. — Вип. 8, Т. 1. — С. 162–170.
11. Величко, І.Г. Просторова термопружна деформація багатошарової основи / І.Г. Величко, І.Г. Ткаченко // Вісн. Дніпропетровського ун-ту. Механіка. — 2004. — Вип. 8, т. 1. — № 6. — С. 154–161.
12. Величко, І.Г. Просторова та осесиметрична термопружна деформація багатошарової основи / І.Г. Величко, І.Г. Ткаченко // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Сер. Механіка. — 2004. — Вип. 8, Т. 2. — № 6/2. — С. 36–43.
13. Ткаченко, І.Г. Двовірна мішана задача термопружності для багатошарової основи / І.Г. Ткаченко // Прикладні пробл. механіки та математики. — 2005. — Вип. 3. — С. 70–78.
14. Коваленко, А.Д. Введение в термоупругость / А.Д. Коваленко. — Киев: Наук. думка, 1965. — 204 с.

VELICHKO Igor G., Cand. Phys.-Math. Sc., Associate Professor

Head of the Department “Higher Mathematics and Physics”

E-mail: wig64@mail.ru

Tavria State Agrotechnological University, Melitopol, Ukraine

Received 18 June 2015.

ANALYTICAL METHOD OF SOLVING PROBLEMS OF THERMOELASTICITY WITH PERIODIC CONDITIONS FOR MULTILAYER FOUNDATION

A method for solving the two-dimensional stationary problem of thermoelasticity for multilayer foundations. The upper boundary of the temperature and pressure are described by periodic functions. At the lower boundary temperature and displacement zero. On the common boundary layers of the conditions of continuity of the temperature field and the equality of heat fluxes. The desired function in each layer are written in the form of Fourier series. To ensure the fulfillment of the conditions at the common borders layers of a modification of the method of compliance matrices. An algorithm for solving the problem. It is shown that the method gives the exact solution of the problem for any finite number of layers. According to the results of theoretical studies, numerical experiments. Formulate conclusions concerning the identified thermoelastic effects.

Keywords: multilayer foundation, thermoelasticity, recurrence relations, compliance matrix, Fourier series, Fourier law

References

1. Podstryhach J.S. *Teploupruhost tel neodnorodnoy struktury* [Heat elastic bodies of the inhomogeneous structure]. Moscow, Nauka, 1984. 368 p.
2. Kovalenko A.D. *Osnovy termoupruhosty* [Fundamentals of heat elastic]. Kiev, Scientific thought, 1970. 307 p.
3. Kudynov V.A. *Analytycheskye reshenyya zadach teplomassoperenosa y termoupruhosty dlya mnohosloynnykh konstruktsey* [Analytical solving of problem of heat and mass transfer and thermoelasticity for multilayer designs]. Moscow, High school, 2005. 430 p.
4. Ukhyn D.V. *Matematycheskaya model rascheta temperatury mnohosloynnoy konstruktsey dorozhnoy odezhdyy v uslovyakh* peremeny temperatur [Mathematical model for calculating the temperature of the multilayer structure of the pavement in a temperature change]. *Vestn. VolgASU. Serii storitelstvo i arhitektura* [Journal of the VolgASU. Series building and architecture], 2010, vol. 17(36), pp. 66–69.
5. Altukhov E.V. *Metod odnorodnykh reshenyy v trekhmerykh zadachakh termoupruhosty dlya transportnykh plastyn* [Method of uniform decisions in three-dimensional problems of thermoelasticity for transport plates]. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika* [Theoretical and applied mechanics]. Kiev, 2003, vol. 37, pp. 8–13.
6. Altukhov, E.V. *Odnorodnye reshenyya trekhmerykh zadach o rasprostranenny harmonycheskykh voln v transportnykh*

- termoupruhykh plastynakh [Uniform solutions of three-dimensional tasks on distribution of harmonious waves in transport thermoelastic plates]. *Dopovidi of the NAS of Ukraine* [News of the NAS of Ukraine], 2007, vol. 4, pp. 49–53.
7. Protsyuk B.V. Metod funktsiy Hrina v osesymetrychnykh zadach pruzhnosti ta termopruzhnosti kuskovo-odnorodnykh ortotropnykh til [Method of green's functions for axisymmetric problems of elasticity and thermoelasticity piecewise-homogeneous bodies orthotropic]. *Matematicheskie metody physicheskomekhanicheskogo polya* [Mathematical methods of physical-mechanical field], 2000, vol. 43, pp. 94–101.
 8. Horynyn H.L. Metod zhestkostnykh funktsiy v zadachakh rascheta mnohosloynnykh sterzhney pry temperaturnykh nahruzkakh [Method stiffness functions in problems of calculation of clad rods with temperature loads]. *Matematicheskie metody physicheskomekhanicheskogo polya* [Mathematical methods of physical-mechanical field], 2012, vol. 2, pp. 144–155.
 9. Neng-Hus Zhang. Thermoelastic stresses in multilayered beams. *Thin Solid Films*, 2007, pp. 8402–8406.
 10. Velychko O.V. Ploska deformatsiya pruzhnoyi bahatosharovoyi plyty pid diyeyu periodychnoyi systemi navantazhen [Plane strain elastic multilayered plates under the action of the periodic system loads]. *Vestnik Dnepropetrovskogo universiteta. Serii mekhanika* [Bulletin of Dnepropetrovsk University. Series mechanics]. Dnepropetrovsk, Dnepropetrovsk University publishing house, 2004, no. 8, vol. 1, pp.162–170.
 11. Velychko I.G. Prostorova termopruzhnna deformatsiya bahatosharovoyi [Spatial thermoprene deformation of multilayer framework]. *Vestnik Dnepropetrovskogo universiteta. Serii mekhanika* [Bulletin of Dnepropetrovsk University. Series mechanics], 2004, no. 8, vol. 1, pp.154–161.
 12. Velychko I.H. Prostorova ta osesymetrychna termopruzhnna deformatsiya bahatosharovoyi osnovy [Spatial and axisymmetric thermoprene deformation of multilayer framework]. *Vestnik Dnepropetrovskogo universiteta. Serii mekhanika* [Bulletin of Dnepropetrovsk University. Series mechanics], 2004, no. 8, vol. 2, pp. 36–43.
 13. Tkachenko I.H. Dvomirna mishana zadacha termopruzhnosti dlya bahatosharovoyi osnovy [Two-dimensional mixed problem of thermoelasticity for laminated foundation]. *Prikladnye problemy mekhaniki i matematiki* [Applied problems of mechanics and mathematics], 2005, vol. 3, pp. 70–78.
 14. Kovalenko A.D. *Vvedenye v termoupruhost* [Introduction to thermoelasticity]. Kyev, Scientific Thought, 1965. 204 p.