

УДК 539.3

М.В. МАРЧУК, д-р физ.-мат. наук, профессор  
заведующий отделом механики тонкостенных элементов конструкций<sup>1</sup>  
E-mail: marchuk@iapmm.lviv.ua

Р.И. ТУЧАПСКИЙ, канд. физ.-мат. наук  
младший научный сотрудник отдела механики тонкостенных элементов конструкций<sup>1</sup>  
E-mail: roman.tuch@gmail.com

В.С. ПАКОШ, канд. физ.-мат. наук  
старший научный сотрудник отдела механики тонкостенных элементов конструкций<sup>1</sup>  
E-mail: V.Pakosh@ukr.net

<sup>1</sup>Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН Украины, г. Львов, Украина

Поступила в редакцию 10.08.2015.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГИБКИХ ДЛИННЫХ ПОЛОГИХ НЕКРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ С ЗАЩЕМЛЕННЫМИ ПРОДОЛЬНЫМИ КРАЯМИ НА ОСНОВЕ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ

*Рассмотрены основные уравнения и соотношения геометрически нелинейной теории трансверсально-изотропных гибких длинных пологих некруговых цилиндрических оболочек типа Тимошенко, а на их основе построено решающее уравнение относительно прогиба оболочки. Для случая нерастягивающих нормальных усилий в срединной поверхности получено точное аналитическое решение задачи о напряженно-деформированном состоянии длинной некруговой цилиндрической панели с защемленными продольными краями, находящейся под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки. Проведено сравнение результатов расчета с помощью этого решения и точного аналитического решения на основе теории Доннелла—Муштари—Власова. Исследовано деформирование длинных некруговых цилиндрических панелей в закритической области.*

**Ключевые слова:** гибкая длинная полая некруговая цилиндрическая панель, теория оболочек типа Тимошенко

**Вступление.** Длинные пластины, цилиндрические оболочки и панели применяются чуть ли не во всех областях техники. Из них состоят обшивки крыльев и фюзеляжей самолетов, корпусов кораблей и подводных лодок, резервуары в химической промышленности, перекрытия инженерных сооружений и т. д.

Задачи о деформировании длинных пластин и цилиндрических оболочек описываются системами нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для решения этих задач чаще всего в литературе применяются приближенные и численные методы.

Наряду с соответствующими приближенными и численными решениями особый интерес представляют точные решения, которые позволяют без особых трудностей проводить исследование деформирования длинных пластин и цилиндрических оболочек в докритических и закритических областях.

Точные решения задач об изгибе длинных пластин по цилиндрическим поверхностям получены в [1]. Эти исследования отражены в [2]. Точные решения задач о цилиндрическом изгибе длинных слоистых пластин получены в [3, 4].

Точные решения задач о деформировании длинных цилиндрических оболочек получены в [5].

Точные решения задач о деформировании длинных пологих круговых и некруговых цилиндрических панелей получены в [2, 6–8] и в [9–12] соответственно.

В [10] рассмотрен случай, когда панель изотропная, защемленная по продольным краям, находится под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки, а кривизна панели в поперечном разрезе — квадратичная функция от дуговой координаты. Исследование деформирования панелей в этой работе проведено на базе геометрически нелинейной теории оболочек Доннелла—Муштари—Власова, основывающейся на гипотезе Кирхгофа—Лява.

Однако теории на основе гипотезы Кирхгофа—Лява могут давать неудовлетворительные результаты при расчете тонкостенных элементов конструкций из современных анизотропных материалов. Тогда эти данные необходимо обобщать и уточнять.

В данной работе на базе упрощенной геометрически нелинейной теории оболочек типа Тимошенко получено точное решение задачи о деформировании трансверсально-изотропной гибкой длинной полой некруговой цилиндрической панели с защемленными продольными краями, находящейся под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки, с кривизной в поперечном разрезе в виде [9–12]. На его основании проведено исследование деформирования панелей данного класса в закритической области.

Исследовано деформирование панелей данного класса в закритической области.

1. Приведем основные уравнения и соотношения варианта геометрически нелинейной теории оболочек типа Тимошенко, построенного с помощью независимых аппроксимаций поперечных касательных напряжений и тангенциальных перемещений [3].

Будем предполагать, что оболочка тонкая трансверсально-изотропная упругая постоянной толщины. Выберем координатные линии  $x_1$  и  $x_2$  таким образом, чтобы они совпадали с линиями кривизны срединной поверхности оболочки. Поперечную координату  $x_3$  будем отсчитывать в сторону роста внешней нормали к срединной поверхности. Положительные направления на линиях  $x_1$  и  $x_2$  выберем так, чтобы система координат была правой.

Выражения для деформаций срединной поверхности имеют вид:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{1}{A_1} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x_2} v - k_1 A_1 w \right) + \frac{\theta_1^2}{2}; \\ E_{12} &= \frac{1}{A_1} \left( \frac{\partial v}{\partial x_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x_2} u \right) + \\ &+ \frac{1}{A_2} \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} v \right) + \theta_1 \theta_2; \\ E_{22} &= \frac{1}{A_2} \left( \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} u - k_2 A_2 w \right) + \frac{\theta_2^2}{2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u$ ,  $v$  и  $w$  — перемещения точек срединной поверхности вдоль линий  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  соответственно;  $E_{11}$ ,  $E_{22}$  и  $E_{12}$  — соответственно удлинения и сдвиг срединной поверхности;  $A_1$  и  $A_2$  — параметры Ламе срединной поверхности;  $k_1$  и  $k_2$  — главные кривизны срединной поверхности. Здесь

$$\theta_1 = -\frac{1}{A_1} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} + k_1 A_1 u \right); \quad \theta_2 = -\frac{1}{A_2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} + k_2 A_2 v \right). \quad (2)$$

Выражения для деформаций изгиба имеют вид:

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{1}{A_1} \left( \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \beta_2 \right); \\ K_{12} &= \frac{1}{A_1} \left( \frac{\partial \beta_2}{\partial x_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \beta_1 \right) + \\ &+ \frac{1}{A_2} \left( \frac{\partial \beta_1}{\partial x_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \beta_2 \right); \\ K_{22} &= \frac{1}{A_2} \left( \frac{\partial \beta_2}{\partial x_2} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \beta_1 \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — углы поворота нормали к срединной поверхности;  $K_{11}$ ,  $K_{22}$  и  $K_{12}$  — соответственно изменения кривизн и кручение срединной поверхности.

Поперечные сдвиги будут определяться по формулам:

$$\epsilon_{13} = -\theta_1 + \beta_1; \quad \epsilon_{23} = -\theta_2 + \beta_2. \quad (4)$$

Зависимости между деформациями и удельными усилиями в срединной поверхности имеют вид:

$$T_1 = B(E_{11} + \nu E_{22}); \quad S = B_{12} E_{12}; \quad T_2 = B(E_{22} + \nu E_{11}), \quad (5)$$

где  $T_1$ ,  $T_2$  и  $S$  — соответственно удельные нормальные и касательное усилия;  $B$  — тангенциальная жесткость;  $B_{12}$  — коэффициент тангенциального сдвига срединной поверхности. Здесь

$$B = \frac{2hE}{1-\nu^2}; \quad B_{12} = 2hG; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

где  $h$  — полутолщина оболочки;  $E$  — модуль Юнга для растяжения-сжатия по направлениям  $x_1$  и  $x_2$ ;  $G$  — модуль сдвига, характеризующий изменение углов между направлениями  $x_1$  и  $x_2$ ;  $\nu$  — коэффициент Пуассона, характеризующий сжатие в направлениях  $x_1$  и  $x_2$  при растяжении в направлениях  $x_2$  и  $x_1$  соответственно.

Зависимости между удельными моментами и деформациями изгиба имеют вид:

$$\begin{aligned} M_1 &= D(K_{11} + \nu K_{22}); \quad H = D_{12} K_{12}; \\ M_2 &= D(K_{22} + \nu K_{11}), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $M_1$ ,  $M_2$  и  $H$  — соответственно удельные изгибные и крутящий моменты;  $D$  — цилиндрическая жесткость;  $D_{12}$  — коэффициент кручения срединной поверхности. Здесь

$$D = \frac{2h^3 E}{3(1-\nu^2)}; \quad D_{12} = \frac{2h^3 G}{3}.$$

Зависимости между удельными поперечными усилиями и поперечными сдвигами имеют вид

$$Q_1 = \Lambda' \epsilon_{13}; \quad Q_2 = \Lambda' \epsilon_{23}, \quad (7)$$

где  $\Lambda'$  — коэффициент поперечного сдвига, равный

$$\Lambda' = \frac{5hG'}{3},$$

где  $G'$  — модуль сдвига для плоскостей, нормальных срединной поверхности.

Обозначим

$$\begin{aligned} f_{10} &= \int_{-h}^h F_1 dx_3; \quad f_{20} = \int_{-h}^h F_2 dx_3; \quad f_{30} = \int_{-h}^h F_3 dx_3; \\ f_{11} &= \int_{-h}^h x_3 F_1 dx_3; \quad f_{21} = \int_{-h}^h x_3 F_2 dx_3, \end{aligned}$$

где  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$  — проекции объемных сил, отнесенных к единице объема оболочки, на координатные направления  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  соответственно.

Уравнения равновесия элемента оболочки имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(A_2 T_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(A_1 S)}{\partial x_2} + \frac{\partial A_1}{\partial x_2} S - \frac{\partial A_2}{\partial x_1} T_2 - \frac{\partial(k_1 A_1 H)}{\partial x_2} - \\ - k_2 \frac{\partial A_1}{\partial x_2} H - A_1 A_2 (k_1 N_1 - f_{10}) = 0; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(A_1 T_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(A_2 S)}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_1} S - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} T_1 - \frac{\partial(k_2 A_2 H)}{\partial x_1} - \\ - k_1 \frac{\partial A_2}{\partial x_1} H - A_1 A_2 (k_2 N_2 - f_{20}) = 0; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{\partial(A_2 N_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(A_1 N_2)}{\partial x_2} + A_1 A_2 (k_1 T_1 + k_2 T_2 + \Phi_{30}) = 0; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(A_2 M_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(A_1 H)}{\partial x_2} + \frac{\partial A_1}{\partial x_2} H - \frac{\partial A_2}{\partial x_1} M_2 - \\ - A_1 A_2 (Q_1 - f_{11}) = 0; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(A_1 M_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(A_2 H)}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_1} H - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} M_1 - \\ - A_1 A_2 (Q_2 - f_{21}) = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} N_1 = Q_1 - T_1 \theta_1 - S \theta_2; \quad N_2 = Q_2 - S \theta_1 - T_2 \theta_2; \\ \Phi_{30} = -p + q + f_{30}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $p$  и  $q$  — интенсивности поперечных нагрузок на лицевых поверхностях  $x_3 = h$  и  $x_3 = -h$  соответственно.

Граничные условия можно получить из смешанного вариационного принципа, сформулированного в [3].

2. Рассмотрим случай гибкой длинной полой некруговой цилиндрической панели, имеющей плоскую деформацию, параллельную поперечному сечению.

На срединной поверхности панели выберем в качестве гауссова параметра  $x_1$  длину отрезка образующей, отсчитываемую от начального поперечного сечения, в качестве гауссова параметра  $x_2$  — длину дуги поперечного сечения, отсчитываемую от начальной образующей и берущуюся со знаком «-» или со знаком «+» в зависимости от избранного положительно го направления на линии  $x_2$ . Тогда будем иметь

$$A_1 = A_2 = 1; \quad k_1 = 0; \quad \frac{\partial k_2}{\partial x_1} = 0; \quad (14)$$

$$u = 0; \quad \beta_1 = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial \beta_2}{\partial x_1} = 0; \quad f_{10} = 0; \quad f_{11} = 0.$$

Будем считать, что во втором уравнении (2) и в уравнении (9) можно пренебречь подчеркнутыми величинами по сравнению с теми, что перед ними. Эти условия соответствуют варианту теории гибких пологих оболочек типа Тимошенко [13, 14]. Будем считать полой оболочку с плавным изменением кривизны, для которой отношение ее подбема к линейному размеру не превышает 1/5.

И, наконец, положим  $f_{20} = 0$ .

В рамках таких предположений уравнения равновесия (8) и (11) выпадут, а уравнения (1)–(7), (9), (10) и (12) несколько упростятся и получат вид:

$$E_{22} = \frac{dv}{dx_2} - k_2 w + \frac{1}{2} \theta_2^2; \quad K_{22} = \frac{d\beta_2}{dx_2}; \quad \epsilon_{23} = -\theta_2 + \beta_2;$$

$$\theta_2 = -\frac{dw}{dx_2}; \quad T_2 = B E_{22}; \quad M_2 = D K_{22}; \quad Q_2 = \Lambda' \epsilon_{23};$$

$$T_2 = const; \quad \frac{dN_2}{dx_2} + k_2 T_2 + \Phi_{30} = 0; \quad \frac{dM_2}{dx_2} - Q_2 + f_{21} = 0; \quad (15)$$

$$E_{11} = 0; \quad E_{12} = 0; \quad K_{11} = 0; \quad K_{12} = 0; \quad \epsilon_{13} = 0; \quad \theta_1 = 0;$$

$$T_1 = B v E_{22}; \quad S = 0; \quad M_1 = D v K_{22}; \quad H = 0; \quad Q_1 = 0,$$

где

$$N_2 = Q_2 - T_2 \theta_2. \quad (16)$$

В (15) введены полные производные вместо частных.

Из формул (15) и (16) получим следующие соотношения:

$$\frac{dv}{dx_2} = \frac{T_2}{B} + k_2 w - \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dx_2} \right)^2;$$

$$\begin{aligned} \beta_2 = -\frac{dw}{dx_2} - \frac{D}{\Lambda'^2} (\Lambda' + T_2) \frac{d^3 w}{dx_2^3} + \frac{f_{21}}{\Lambda'} - \\ - \frac{D}{\Lambda'^2} \frac{d}{dx_2} (k_2 T_2 + \Phi_{30}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(\Lambda' + T_2) \frac{d^4 w}{dx_2^4} - \Lambda' T_2 \frac{d^2 w}{dx_2^2} = \\ = \Lambda' \left( k_2 T_2 + \Phi_{30} + \frac{df_{21}}{dx_2} \right) - D \frac{d^2}{dx_2^2} (k_2 T_2 + \Phi_{30}). \end{aligned} \quad (17)$$

Последнее из них можно рассматривать как решающее уравнение относительно прогиба панели.

Обозначим через  $b$  и  $k_{20}$  соответственно половину размера срединной поверхности панели вдоль дуги и значение  $k_2$  в точках срединной поверхности панели на начальной образующей. Будем считать, что  $k_{20} \neq 0$ .

Введем безразмерные величины

$$x_2 = b \eta; \quad k_{20} = \frac{1}{2} b^{-2} h k_{\eta 0}^*;$$

$$v = k_{20}^2 b^3 v^*; \quad w = k_{20} b^2 w^*; \quad \beta_2 = k_{20} b \beta_{\eta}^*;$$

$$E_{22} = k_{20}^2 b^2 E_{\eta\eta}^*; \quad K_{22} = k_{20} K_{\eta\eta}^*; \quad \epsilon_{23} = k_{20} b \epsilon_{\eta 3}^*; \quad \theta_2 = k_{20} b \theta_{\eta}^*;$$

$$T_2 = b^{-2} D T_{\eta}^*; \quad M_2 = k_{20} D M_{\eta}^*; \quad Q_2 = k_{20} b^{-1} D Q_{\eta}^*;$$

$$N_2 = k_{20} b^{-1} D N_{\eta}^*;$$

$$f_{30} = k_{20} b^{-2} D f_{30}^*; \quad f_{21} = k_{20} b^{-1} D f_{\eta 1}^*;$$

$$p = k_{20} b^{-2} D p^*; \quad q = k_{20} b^{-2} D q^*;$$

$$\Phi_{30} = k_{20} b^{-2} D \Phi_{30}^*. \quad (18)$$

Пользуясь обозначениями (18), перейдем от формул (15)–(17) к формулам

$$E_{\eta\eta}^* = \frac{dv^*}{d\eta} - \varphi w^* + \frac{1}{2}(\theta_{\eta}^*)^2; K_{\eta\eta}^* = \frac{\partial \beta_{\eta}^*}{d\eta};$$

$$\epsilon_{\eta 3}^* = -\theta_{\eta}^* + \beta_{\eta}^*; \theta_{\eta}^* = -\frac{dw^*}{d\eta};$$

$$T_{\eta}^* = \frac{3}{4}(k_{\eta 0}^*)^2 E_{\eta\eta}^*; M_{\eta}^* = K_{\eta\eta}^*; Q_{\eta}^* = \delta' \epsilon_{\eta 3}^*; \quad (19)$$

$$T_{\eta}^* = const; \frac{dN_{\eta}^*}{d\eta} + \varphi T_{\eta}^* + \Phi_{30}^* = 0;$$

$$\frac{dM_{\eta}^*}{d\eta} - Q_{\eta}^* + f_{\eta 1}^* = 0; N_{\eta}^* = Q_{\eta}^* - T_{\eta}^* \theta_{\eta}^*;$$

$$\frac{dv^*}{d\eta} = \frac{4T_{\eta}^*}{3(k_{\eta 0}^*)^2} + \varphi w^* - \frac{1}{2} \left( \frac{dw^*}{d\eta} \right)^2; \quad (20)$$

$$\beta_{\eta}^* = -\frac{dw^*}{d\eta} - \frac{\delta' + T_{\eta}^*}{\delta'^2} \frac{d^3 w^*}{d\eta^3} + \frac{f_{\eta 1}^*}{\delta'} -$$

$$-\frac{1}{\delta'^2} \frac{d}{d\eta} (\varphi T_{\eta}^* + \Phi_{30}^*); \quad (21)$$

$$(\delta' + T_{\eta}^*) \frac{d^4 w^*}{d\eta^4} - \delta' T_{\eta}^* \frac{d^2 w^*}{d\eta^2} =$$

$$= \delta' \left( \varphi T_{\eta}^* + \Phi_{30}^* + \frac{df_{\eta 1}^*}{d\eta} \right) - \frac{d^2}{d\eta^2} (\varphi T_{\eta}^* + \Phi_{30}^*); \quad (22)$$

где  $\varphi = \frac{k_2}{k_{20}}$  — известная функция переменной  $\eta$ ;

$$\delta' = \frac{b^2 \Lambda'}{D} = \frac{5G'}{4G} (1-\nu) \left( \frac{b}{h} \right)^2.$$

Выражения (13) и (18) дают

$$\Phi_{30}^* = -p^* + q^* + f_{30}^*.$$

3. Будем считать, что:

- срединная поверхность панели в недеформированном состоянии симметрична относительно линии  $x_2 = 0$ . Тогда любая точка срединной поверхности панели подчинена условию  $-b \leq x_2 \leq b$ ;

$$\varphi = 1 + \gamma \left( \frac{x_2}{b} \right)^2, \quad (23)$$

где  $\gamma$  — действительная постоянная, которая не зависит от  $x_2$ . Это выражение используется в [10–12];  
- панель подвергается воздействию равномерно распределенной поперечной нагрузки с интенсивностью  $p$ , а

$$q = 0; f_{30} = 0; f_{21} = 0; \quad (24)$$

- панель защемлена по продольным краям, т. е.

$$w = 0; \beta_2 = 0 \text{ при } x_2 = \pm b. \quad (25)$$

Кроме того, будем считать, что взаимное смещение продольных краев  $\Delta$  должно быть равно нулю:

$$\Delta = -\int_{-b}^b \frac{dv}{dx_2} dx_2 = 0. \quad (26)$$

Если  $\gamma \geq -1$ , то из (23) следует, что  $k_2 > 0$  при  $-b < x_2 < b$ . Это означает, что если  $\gamma \geq -1$ , то нормаль

к срединной поверхности панели при  $-b < x_2 < b$  направлена к центру кривизны (рисунок 1).

Если выбор величин  $h, k_{20}$  и  $\gamma$  подчинить дополнительному условию

$$\frac{1}{h} \geq \begin{cases} 40k_{20} & \text{при } -1 \leq \gamma \leq 0; \\ 40k_{20}(1+\gamma) & \text{при } \gamma > 0, \end{cases}$$

то получим тонкую панель.

Примером поверхности с геометрическими характеристиками (14) и (23) может служить цилиндрическая поверхность с направляющей, заданной на плоскости  $yOz$  уравнениями

$$y = \int_0^{x_2} \cos k_{20} s \left( 1 + \frac{\gamma s^2}{3b^2} \right) ds; z = -\int_{x_2}^b \sin k_{20} s \left( 1 + \frac{\gamma s^2}{3b^2} \right) ds, \quad (27)$$

где  $-b \leq x_2 \leq b$ .

Достаточный признак пологости панели со срединной поверхностью с направляющей (27) (при условии  $\gamma \geq -1$ ) дает неравенство

$$k_{20} b \leq \frac{3}{3+\gamma} \operatorname{arctg} \frac{2}{5}.$$

Кривые, построенные по формулам (27) при некоторых значениях параметров  $k_{20}$  и  $\gamma$ , удовлетворяющих этому неравенству при  $b = 1$ , даны на рисунке 2.

Снова воспользуемся обозначениями (18); тогда формулы (23) и (24) приобретут вид:

$$\varphi = 1 + \gamma \eta^2; q^* = 0; f_{30}^* = 0; f_{\eta 1}^* = 0, \quad (28)$$

а вместо (25) будем иметь условия

$$w^* = 0; \beta_{\eta}^* = 0 \text{ при } \eta = \pm 1. \quad (29)$$

Введем безразмерный параметр

$$\Delta = k_{20}^2 b^3 \Delta^*.$$

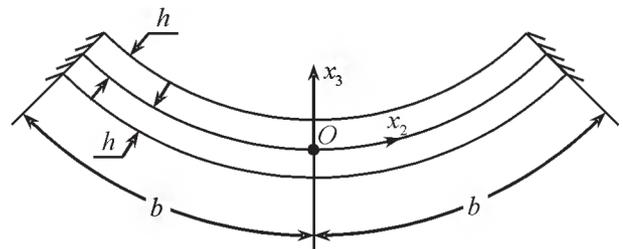


Рисунок 1 — Поперечное сечение длинной цилиндрической панели

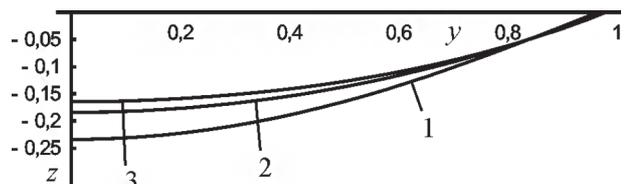


Рисунок 2 — Поперечное сечение срединной поверхности длинной пологой цилиндрической панели ( $b = 1$  м):  
1 —  $k_{20} = 0,5707 \text{ м}^{-1}, \gamma = -1$ ; 2 —  $k_{20} = 0,3728 \text{ м}^{-1}, \gamma = 0$ ;  
3 —  $k_{20} = 0,2854 \text{ м}^{-1}, \gamma = 1$

Пользуясь этим обозначением и обозначениями (18), вместо (26) получим:

$$\Delta^* = -\int_{-1}^1 \frac{dv^*}{d\eta} d\eta = 0. \quad (30)$$

Подставив (20) в (30), получим:

$$\Delta^* = -\frac{8T_{\eta}^*}{3(k_{\eta 0}^*)^2} - \int_{-1}^1 \phi w^* d\eta + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left( \frac{dw^*}{d\eta} \right)^2 d\eta = 0. \quad (31)$$

Внесем в краевые условия (29) выражение (21). Получим краевые условия относительно  $w^*$  и его производных. Таким образом, для определения  $w^*$  имеем линейное обыкновенное дифференциальное уравнение (22) с постоянными коэффициентами с краевыми условиями (29). Если  $-\delta' < T_{\eta}^* \leq 0$ , то количество краевых условий соответствует порядку уравнения (22). Решив задачу (22), (28), (29) для некоторого  $-\delta' < T_{\eta}^* \leq 0$ , с помощью выражения (21) через  $w^*$  найдем  $\beta_{\eta}^*$ . Подставив выражения для  $w^*$  и  $\beta_{\eta}^*$  в выражения (19), получим  $M_{\eta}^*$  и  $Q_{\eta}^*$ .

Условимся, что переменная  $k$  будет принимать натуральные значения. Условимся также, что если в каком-нибудь утверждении содержится переменная  $k$ , то это означает, что данное утверждение справедливо для любых значений этой переменной. Если же это не имеет места, то будет указано, при каких значениях  $k$  данное утверждение справедливо.

В случае  $-\delta' < T_{\eta}^* < 0$  и  $T_{\eta}^* \neq -\frac{\delta' k^2 \pi^2}{\delta' + k^2 \pi^2}$

$$w^* = \left[ \gamma \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{\delta'} \right) + 2\phi \right] f (\cos \lambda \eta - \cos \lambda) + \phi (1 - \eta^2) + \frac{\gamma}{12} (1 - \eta^4); \quad (32)$$

$$\beta_{\eta}^* = \left( 1 + \frac{T_{\eta}^*}{\delta'} \right) \left[ \gamma \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{\delta'} \right) + 2\phi \right] \lambda f \sin \lambda \eta + 2 \left( \frac{\gamma}{\delta'} + \phi \right) \eta + \frac{\gamma \eta^3}{3};$$

$$M_{\eta}^* = \left( 1 + \frac{T_{\eta}^*}{\delta'} \right) \left[ \gamma \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{\delta'} \right) + 2\phi \right] \lambda^2 f \cos \lambda \eta + 2 \left( \frac{\gamma}{\delta'} + \phi \right) + \gamma \eta^2;$$

$$Q_{\eta}^* = \left[ \gamma \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{\delta'} \right) + 2\phi \right] \lambda T_{\eta}^* f \sin \lambda \eta + 2\gamma \eta,$$

где

$$\lambda = \sqrt{-\frac{\delta' T_{\eta}^*}{\delta' + T_{\eta}^*}}; \phi = \frac{2\gamma - p^* + T_{\eta}^*}{2T_{\eta}^*}; f = \frac{\lambda}{T_{\eta}^* \sin \lambda}. \quad (33)$$

Отсюда имеем

$$T_{\eta}^* = -\frac{\delta' \lambda^2}{\delta' + \lambda^2}; \phi = \frac{1}{2} - \frac{2\gamma - p^*}{2} \left( \frac{1}{\delta'} + \frac{1}{\lambda^2} \right); \quad (34)$$

$$f = -\left( \frac{\lambda}{\delta'} + \frac{1}{\lambda} \right) \frac{1}{\sin \lambda}.$$

Из (33) следует, что при  $T_{\eta}^* \rightarrow -\frac{\delta' k^2 \pi^2}{\delta' + k^2 \pi^2}$   $\lambda \rightarrow k\pi$ .

Поэтому в случае  $T_{\eta}^* = -\frac{\delta' k^2 \pi^2}{\delta' + k^2 \pi^2}$  будем считать, что  $\lambda = k\pi$ . Этот случай мы рассмотрим в следующем пункте.

Подставив (32) в (31) и интегрируя, найдем:

$$\Delta^* = -(a_0 + a_1 \phi + a_2 \phi^2) = 0, \quad (35)$$

где

$$a_i = \sum_{j=0}^2 \alpha_{ij} f^j, \quad i = 0, 1, 2, \quad (36)$$

причем

$$\alpha_{00} = \frac{2}{3} \left[ \frac{4T_{\eta}^*}{(k_{\eta 0}^*)^2} + \gamma \left( \frac{1}{5} + \frac{\gamma}{42} \right) \right]; \alpha_{01} = \gamma \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{\delta'} \right) L_1;$$

$$\alpha_{02} = -\frac{\gamma^2}{2} \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{\delta'} \right)^2 L_2;$$

$$\alpha_{10} = \frac{4}{3}; \alpha_{11} = 2 \left[ 1 - \gamma \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{\delta'} \right) \right] L_1;$$

$$\alpha_{12} = -2\gamma \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{\delta'} \right) L_2;$$

$$\alpha_{20} = -\frac{4}{3}; \alpha_{21} = -4L_1; \alpha_{22} = -2L_2, \quad (37)$$

где

$$L_1 = 2 \left( -\cos \lambda + \frac{\sin \lambda}{\lambda} \right); L_2 = \lambda^2 \left( 1 - \frac{\sin 2\lambda}{2\lambda} \right).$$

Из (33) следует, что

$$p_{1,2}^* = 2\gamma + T_{\eta}^* - 2\phi_{1,2} T_{\eta}^*, \quad (38)$$

где

$$\phi_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \text{sign } f \sqrt{\Xi}}{2a_2} \text{ — корни уравнения (35),} \quad (39)$$

причем

$$\Xi = a_1^2 - 4a_0 a_2. \quad (40)$$

В случае  $T_{\eta}^* = 0$

$$w^* = \frac{p^*}{12} \left[ -\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{12}{\delta'} \right) + \left( 1 + \frac{6}{\delta'} \right) \eta^2 - \frac{\eta^4}{2} \right]; \quad (41)$$

$$\beta_{\eta}^* = \frac{p^*}{6} (-\eta + \eta^3); M_{\eta}^* = \frac{p^*}{6} (-1 + 3\eta^2); Q_{\eta}^* = p^* \eta.$$

Подставив (41) в (31) и интегрируя, получим алгебраическое уравнение с неизвестным  $p^*$ . Его корни

$$p_1^* = 0; p_2^* = -\frac{6\left[\frac{1}{15} + \frac{1}{\delta'} + \frac{\gamma}{5}\left(\frac{1}{21} + \frac{1}{\delta'}\right)\right]}{\frac{2}{105} + \frac{2}{5\delta'} + \frac{3}{\delta'^2}}. \quad (42)$$

К выражениям (41) и (42) можно прийти, перейдя к пределу при  $\lambda \rightarrow 0$  в выражениях (32) и (38) соответственно.

Выражения (32) и (41) соответствуют симметричным изогнутым срединным поверхностям.

В случае  $\text{tg } \lambda = \frac{\delta'\lambda}{\delta' + \lambda^2}$  оказывается возможным другое решение задачи (22), (28), (29). Выражение для прогиба будет тогда иметь несимметричный член  $A(\sin\lambda\eta - \eta\sin\lambda)$ . Подставив это выражение в (31) и интегрируя, получим, что

$$A^2 = \frac{4(a_0 + a_1\phi + a_2\phi^2)}{2(-1 + \lambda^2 + \cos 2\lambda) + \lambda \sin 2\lambda}$$

при  $\text{tg } \lambda = \frac{\delta'\lambda}{\delta' + \lambda^2}$ .

Это условие удовлетворяется только в случае, если

$$\Theta \geq 0 \text{ при } \text{tg } \lambda = \frac{\delta'\lambda}{\delta' + \lambda^2},$$

где  $\Theta = a_0 + a_1\phi + a_2\phi^2$ .

Нетрудно проверить, что при  $\text{tg } \lambda = \frac{\delta'\lambda}{\delta' + \lambda^2} a_2 < 0$ .

Следовательно, при  $\text{tg } \lambda = \frac{\delta'\lambda}{\delta' + \lambda^2} \Theta = 0$  тогда и только тогда, когда  $\phi = \phi_1$  или  $\phi = \phi_2$ . При  $\phi = -\frac{a_1}{2a_2}$  имеем

$\Theta = -\frac{\Xi}{4a_2}$ . Это означает, что если  $\text{tg } \lambda = \frac{\delta'\lambda}{\delta' + \lambda^2}$ , то:

-  $\Theta \geq 0$  при  $\min(\phi_1, \phi_2) \leq \phi \leq \max(\phi_1, \phi_2)$  и  $\Theta < 0$  при  $\phi < \min(\phi_1, \phi_2)$  или  $\phi > \max(\phi_1, \phi_2)$  при условии, что  $\Xi \geq 0$ ;

-  $\Theta < 0$  при условии, что  $\Xi < 0$ .

В силу формул (33) и (38) первое из этих утверждений равносильно такому утверждению: если

$\text{tg } \lambda = \frac{\delta'\lambda}{\delta' + \lambda^2}$ , то  $\Theta \geq 0$  при  $\min(p_1^*, p_2^*) \leq p^* \leq \max(p_1^*, p_2^*)$

и  $\Theta < 0$  при  $p^* < \min(p_1^*, p_2^*)$  или  $p^* > \max(p_1^*, p_2^*)$  при условии, что  $\Xi \geq 0$ .

В случае  $\text{tg } \lambda = \frac{\delta'\lambda}{\delta' + \lambda^2}$  прогиб панели при  $\eta = 0$  можно, как и раньше, найти по (32).

4. Из (34) следует, что при  $\lambda \rightarrow k\pi f \rightarrow \infty$ . Поэтому необходимо изучить границы  $\lim_{\substack{\lambda \rightarrow k\pi \\ (\lambda > (<) k\pi)}} \phi_{1,2}$  и

$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow k\pi \\ (\lambda > (<) k\pi)}} \left[ \gamma \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{\delta'} \right) + 2\phi_{1,2} \right] f$ , чтобы выяснить, суще-

ствуют ли границы  $\lim_{\substack{\lambda \rightarrow k\pi \\ (\lambda > (<) k\pi)}} w^*$ ,  $\lim_{\substack{\lambda \rightarrow k\pi \\ (\lambda > (<) k\pi)}} \beta_\eta^*$ ,  $\lim_{\substack{\lambda \rightarrow k\pi \\ (\lambda > (<) k\pi)}} M_\eta^*$  и  $\lim_{\substack{\lambda \rightarrow k\pi \\ (\lambda > (<) k\pi)}} Q_\eta^*$  при  $\eta \in [-1, 1]$ .

Поскольку границы  $\lim_{\lambda \rightarrow k\pi} \alpha_{20}$ ,  $\lim_{\lambda \rightarrow k\pi} \alpha_{21}$  и  $\lim_{\lambda \rightarrow k\pi} \alpha_{22}$  существуют, причем граница  $\lim_{\lambda \rightarrow k\pi} \alpha_{22} \neq 0$ , а граница  $\lim_{\lambda \rightarrow k\pi} f = \infty$ , то в некоторой проколотой окрестности точки  $\lambda = k\pi$  верно

$$\frac{1}{a_2} = \frac{1}{\alpha_{20} + \alpha_{21}f + \alpha_{22}f^2} = \frac{1}{\alpha_{22}f^2} \frac{1}{1 + \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}f} + \frac{\alpha_{20}}{\alpha_{22}f^2}} = \frac{1}{\alpha_{22}f^2} \left( 1 - \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}f} \right) + \frac{\iota}{f^4}, \quad (43)$$

где  $\iota: \iota(\lambda)$  — функция, определенная в этой окрестности, и  $\lim_{\lambda \rightarrow k\pi} \iota < \infty$ .

Пользуясь выражениями (36), выражение (40) можно записать в следующей форме:

$$\Xi = \xi_0 + \xi_1 f + \xi_2 f^2 + \xi_3 f^3 + \xi_4 f^4, \quad (44)$$

где

$$\xi_0 = \alpha_{10}^2 - 4\alpha_{00}\alpha_{20}; \quad \xi_1 = 2(\alpha_{10}\alpha_{11} - 2\alpha_{00}\alpha_{21} - 2\alpha_{01}\alpha_{20});$$

$$\xi_2 = 2\alpha_{10}\alpha_{12} + \alpha_{11}^2 - 4\alpha_{00}\alpha_{22} - 4\alpha_{01}\alpha_{21} - 4\alpha_{02}\alpha_{20};$$

$$\xi_3 = 2(\alpha_{11}\alpha_{12} - 2\alpha_{01}\alpha_{22} - 2\alpha_{02}\alpha_{21}); \quad \xi_4 = \alpha_{12}^2 - 4\alpha_{02}\alpha_{22}.$$

С помощью формул (37) выводим  $\xi_3 \equiv 0; \xi_4 \equiv 0$ .

Из этих тождеств и формул (36), (39), (43) и (44) следует, что в некоторой проколотой окрестности точки  $\lambda = k\pi$  верно

$$\phi_{1,2} = -\frac{\alpha_{12}}{2\alpha_{22}} + \frac{1}{2\alpha_{22}f} \left( -\alpha_{11} \pm \sqrt{\frac{\Xi}{f^2} + \frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{\alpha_{22}}} \right) + \frac{\kappa}{f^2}, \quad (45)$$

где  $\kappa: \kappa(\lambda)$  — функция, определенная в этой окрестности, и  $\lim_{\lambda \rightarrow k\pi} |\kappa| < +\infty$ .

Согласно формулам (37) выполняется равенство

$$\gamma \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{\delta'} \right) - \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}} \equiv 0.$$

Из этого тождества и равенства (45) следует, что в некоторой проколотой окрестности точки  $\lambda = k\pi$  верно

$$\left[ \gamma \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{\delta'} \right) + 2\phi_{1,2} \right] f = \frac{1}{\alpha_{22}} \left( -\alpha_{11} \pm \sqrt{\frac{\Xi}{f^2} + \frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{\alpha_{22}}} \right) + \frac{2\kappa}{f}. \quad (46)$$

Из равенств (45) и (46) следует, что если  $\Xi \geq 0$  в некотором интервале с левым (правым) концом в точке  $\lambda = k\pi$ , то границы  $\phi_{1,2}$  и  $\left[ \gamma \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{\delta'} \right) + 2\phi_{1,2} \right] f$  при  $\lambda \rightarrow k\pi$  и  $\lambda > (<) k\pi$  существуют, а потому существуют соответствующие границы функций  $w^*$ ,  $\beta_\eta^*$ ,  $M_\eta^*$  и  $Q_\eta^*$  при  $\eta \in [-1, 1]$ .

Установим связь между свойствами величин  $\phi_{1,2}$  при  $\lambda \rightarrow k\pi$  и  $\lambda > (<) k\pi$  и знаком величины  $\xi_2$  при  $\lambda = k\pi$ .

Пусть  $\xi_2 > 0$  при  $\lambda = k\pi$ . Тогда  $\Xi < 0$  в некоторой проколотой окрестности точки  $\lambda = k\pi$ . При этом величины  $\phi_{1,2}$  не являются действительными, а выражения для  $w^*$ ,  $\beta_n^*$ ,  $M_n^*$  и  $Q_n^*$  лишены физического смысла.

Пусть  $\xi_2 < 0$  при  $\lambda = k\pi$ . Тогда  $\Xi > 0$  в некоторой проколотой окрестности точки  $\lambda = k\pi$ . При этом величины  $\phi_{1,2}$  являются действительными. Кроме того, из (44)–(46) следует, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow k\pi} \phi_1 = \lim_{\lambda \rightarrow k\pi} \phi_2 \text{ и}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow k\pi} \left[ \gamma \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{\delta'} \right) + 2\phi_1 \right] f \neq \lim_{\lambda \rightarrow k\pi} \left[ \gamma \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{\delta'} \right) + 2\phi_2 \right] f.$$

Пусть  $\xi_2 = 0$  при  $\lambda = k\pi$  и  $\Xi \geq 0$  в некотором интервале с левым (правым) концом в точке  $\lambda = k\pi$ . При этом величины  $\phi_{1,2}$  являются действительными. Кроме того, из (44)–(46) следует, что

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow k\pi \\ (\lambda > (<) k\pi)}} \phi_1 = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow k\pi \\ (\lambda > (<) k\pi)}} \phi_2 \text{ и}$$

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow k\pi \\ (\lambda > (<) k\pi)}} \left[ \gamma \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{\delta'} \right) + 2\phi_1 \right] f = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow k\pi \\ (\lambda > (<) k\pi)}} \left[ \gamma \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{\delta'} \right) + 2\phi_2 \right] f.$$

Установим зависимости, которыми связаны величины  $k_{\eta 0}^*$ ,  $\gamma$  и  $\delta'$ , когда  $\xi_2 < (=, >) 0$  при  $\lambda = k\pi$ .

Равенство  $\xi_2 = 0$  можно записать в виде

$$\frac{\alpha_{22} T_{\eta}^*}{(k_{\eta 0}^*)^2} = -\frac{\gamma \alpha_{22}}{4} \left( \frac{1}{5} + \frac{\gamma}{42} \right) +$$

$$+ \frac{3(2\alpha_{10}\alpha_{12} + \alpha_{11}^2 - 4\alpha_{01}\alpha_{21} - 4\alpha_{02}\alpha_{20})}{32}.$$

Обозначим через  $k_{\eta 0,k}^*$  значение  $k_{\eta 0}^*$ , для которого справедливо это соотношение при  $\lambda = k\pi$ . Имеем

$$\frac{1}{(k_{\eta 0,k}^*)^2} = \frac{\delta' + k^2 \pi^2}{48' k^2 \pi^2} \left\langle \gamma \left( \frac{1}{5} + \frac{\gamma}{42} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2k^2 \pi^2} \left[ 2 + \gamma \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{\delta'} \right) \left( 2 - \frac{k^2 \pi^2}{3} \right) \left[ 2 + \gamma \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{\delta'} \right) \right] \right] \right\rangle.$$

Легко убедиться, что при  $\lambda = k\pi$   $\xi_2 < (=, >) 0$  тогда и только тогда, если

$$\frac{1}{(k_{\eta 0}^*)^2} > (=, <) \frac{1}{(k_{\eta 0,k}^*)^2}. \quad (47)$$

Рассмотрим рисунок 3. Кривые  $p^*(T_{\eta}^*)$  на рисунке 3 а построены по формулам (38) и (42), кривые  $w^*(T_{\eta}^*)$  при  $\eta = 0$  на рисунке 3 б построены по формулам (32), (39) и (41), кривые  $w^*(p^*)$  при  $\eta = 0$  на рисунке 3 в построены по формулам (32), (38), (39), (41) и (42). Эти результаты соответствуют симметричной форме прогиба.

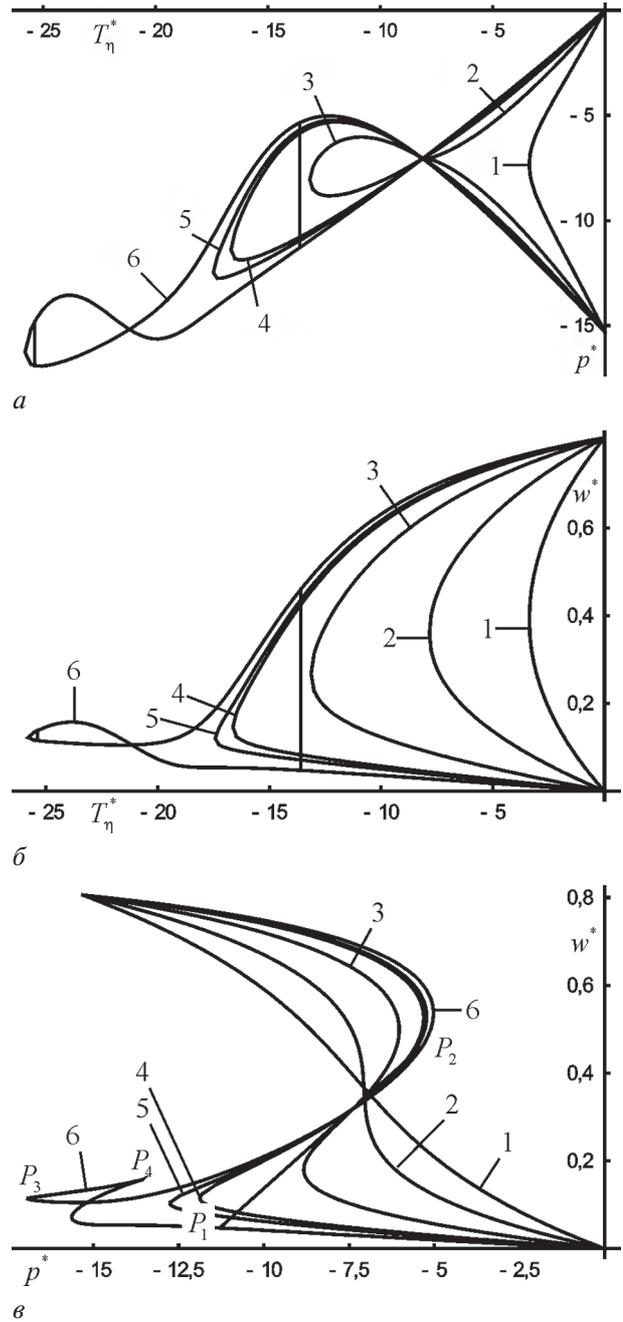


Рисунок 3 — Влияние величины  $k_{\eta 0}^*$  на деформирование длинных цилиндрических панелей ( $\gamma = -1$ ,  $\delta' = 45,61$ ) (а — зависимость между величинами  $p^*$  и  $T_{\eta}^*$ ; б — зависимость между величинами  $w^*$  и  $T_{\eta}^*$  при  $\eta = 0$ ; в — зависимость между величинами  $p^*$  и  $w^*$  при  $\eta = 0$ ):  
 1 —  $k_{\eta 0}^* = 7$ ; 2 —  $k_{\eta 0}^* = 11,2$ ; 3 —  $k_{\eta 0}^* = 16,6$ ; 4 —  $k_{\eta 0}^* = 22$ ;  
 5 —  $k_{\eta 0}^* = 23,05$ ; 6 —  $k_{\eta 0}^* = 26,06$

Случаю несимметричного прогиба соответствуют вертикальные прямые  $T_{\eta}^* \approx -25,38$  и  $T_{\eta}^* \approx -13,59$  на рисунках 3 а и 3 б и прямые, построенные на рисунке 3 в по формулам (32) и (33) при  $\gamma = -1$ ,  $\delta' = 45,61$ ,  $\eta = 0$ ,  $T_{\eta}^* \approx -25,38$ ;  $-13,59$ .

Из (32), (37)–(39), (44) и (47) следует, что существует связь между свойствами кривых  $p^*(T_{\eta}^*)$ ,  $w^*(T_{\eta}^*)$ ,  $w^*(p^*)$  и величиной  $k_{\eta 0}^*$ :

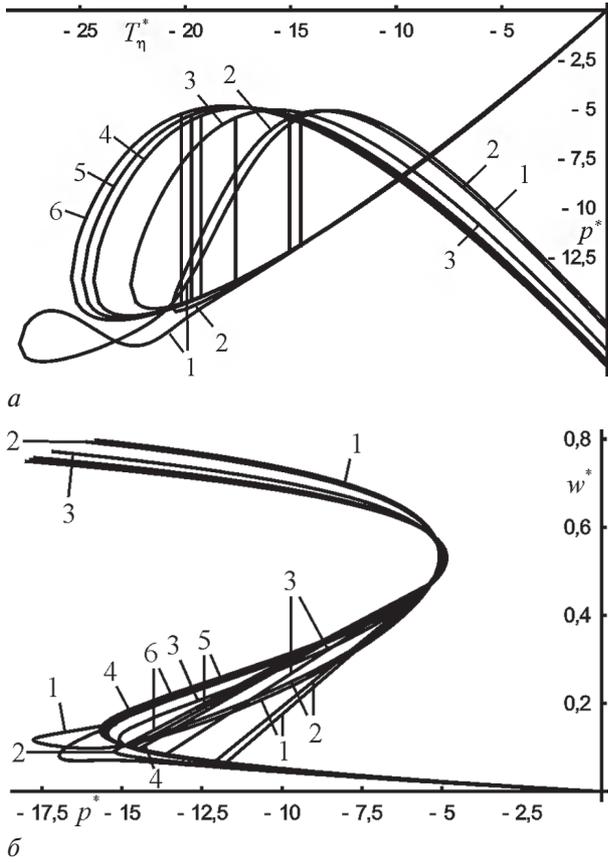


Рисунок 4 — Влияние параметра  $\delta'$  на деформирование длинных цилиндрических панелей ( $k_{\eta_0}^* = 26,06, \gamma = -1$ ) (а — зависимость между величинами  $p^*$  и  $T_\eta^*$ ; б — зависимость между величинами  $p^*$  и  $w^*$  при  $\eta = 0$ ): 1 —  $\delta' = 57,01$ ; 2 —  $\delta' = 65,16$ ; 3 —  $\delta' = 152$ ; 4 —  $\delta' = 456,1$ ; 5 —  $\delta' = 912,2$ ; 6 —  $\delta' = +\infty$

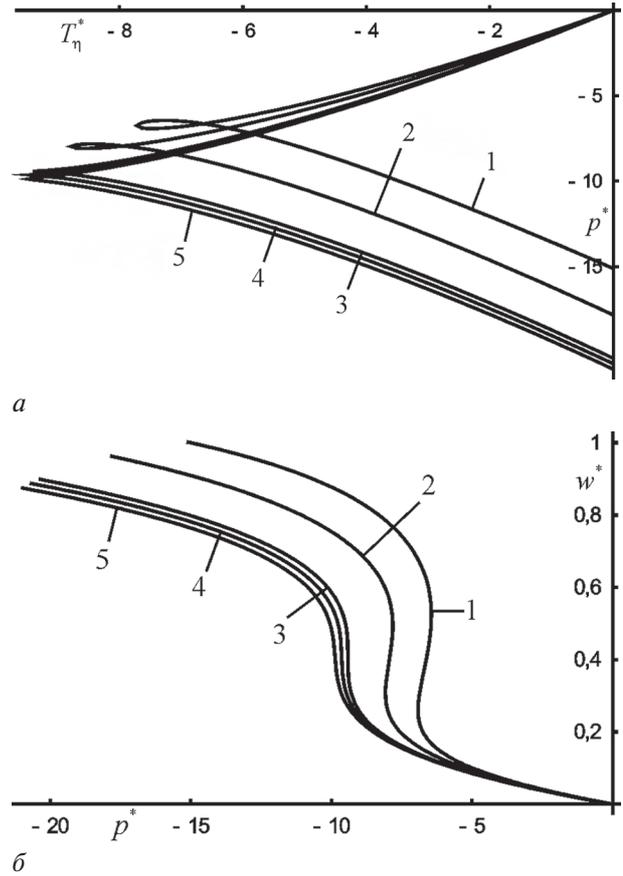


Рисунок 5 — Влияние параметра  $\delta'$  на деформирование длинных круговых цилиндрических панелей ( $k_{\eta_0}^* = 11,12$ ) (а — зависимость между величинами  $p^*$  и  $T_\eta^*$ ; б — зависимость между величинами  $p^*$  и  $w^*$  при  $\eta = 0$ ): 1 —  $\delta' = 20,27$ ; 2 —  $\delta' = 40,54$ ; 3 —  $\delta' = 202,7$ ; 4 —  $\delta' = 405,4$ ; 5 —  $\delta' = +\infty$

- если хотя бы при одном  $k = 1, 2, 3, \dots$  выполняется неравенство  $(k_{\eta_0, k}^*)^2 < (k_{\eta_0}^*)^2$ , то кривая  $p^*(T_\eta^*)$  проходит через точку, для которой  $p^* = 2\gamma + T_\eta^* + \gamma \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{\delta'} \right) T_\eta^*$

при  $T_\eta^* = -\frac{\delta' k^2 \pi^2}{\delta' + k^2 \pi^2}$ , и образует петлю, а кривая  $w^*(p^*)$  имеет верхние и нижние критические предельные точки;

- если  $\eta = 0$  и хотя бы при одном  $k = 2, 4, 6, \dots$  выполняется неравенство  $(k_{\eta_0, k}^*)^2 < (k_{\eta_0}^*)^2$ , то кривая  $w^*(T_\eta^*)$  проходит через точку, для которой  $w^* = -\frac{\gamma}{2} \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{\delta'} \right) + \frac{\gamma}{12}, T_\eta^* = -\frac{\delta' k^2 \pi^2}{\delta' + k^2 \pi^2}$ , и образует петлю.

Поведение кривых на рисунке 3 согласуется с этими выводами.

Из рисунка 3 видно, что:

- участок линии симметричной формы прогиба между точками  $P_3$  и  $P_4$  почти совпадает с отрезком  $P_3 P_4$  несимметричной формы прогиба;
- абсциссы точек пересечения прямой  $P_1 P_2$  с кривыми  $w^*(p^*)$  для  $k_{\eta_0}^* = 22; 23,05; 26,06$  дают меньшие и большие по абсолютным величинам соответственно верхние и нижние границы для  $p^*$ .

5. В заключение проанализируем характер изменения линий симметричной формы прогиба и прямых несимметричной формы прогиба в зависимости от параметра  $\delta'$  (рисунки 4, 5 и 6).

Кривые  $p^*(T_\eta^*)$  на рисунках 4 а, 5 а и 6 а построены по формулам (38) и (42), а кривые  $w^*(p^*)$  при  $\eta = 0$  на рисунках 4 б, 5 б и 6 б построены по формулам (32), (38), (39), (41) и (42).

Каждому из значений величины  $\delta' = 57,01; 65,16; 152; 456,1; 912,2; +\infty$  для кривых симметричной формы прогиба, представленных на рисунке 4, соответствует одно значение величины  $T_\eta^*$  для несимметричной формы прогиба:

$$T_\eta^* \approx -14,54; -15,06; -17,62; -19,25; -19,71; -20,19.$$

Эти вертикальные прямые даны на рисунке 4 а. Подставив в (32) и (33)  $\gamma = 1$ , а  $\delta' = 57,01, T_\eta^* \approx -14,54$ , или  $\delta' = 65,16, T_\eta^* \approx -15,06$  и т. д., получим уравнения прямых, изображенных на рисунке 4 б.

Как видим, на рисунках 4–6 по мере роста параметра  $\delta'$  кривые симметричной формы прогиба, построенные по теории оболочек типа Тимошенко, сближаются с кривыми симметричной формы прогиба, построенными по теории обо-

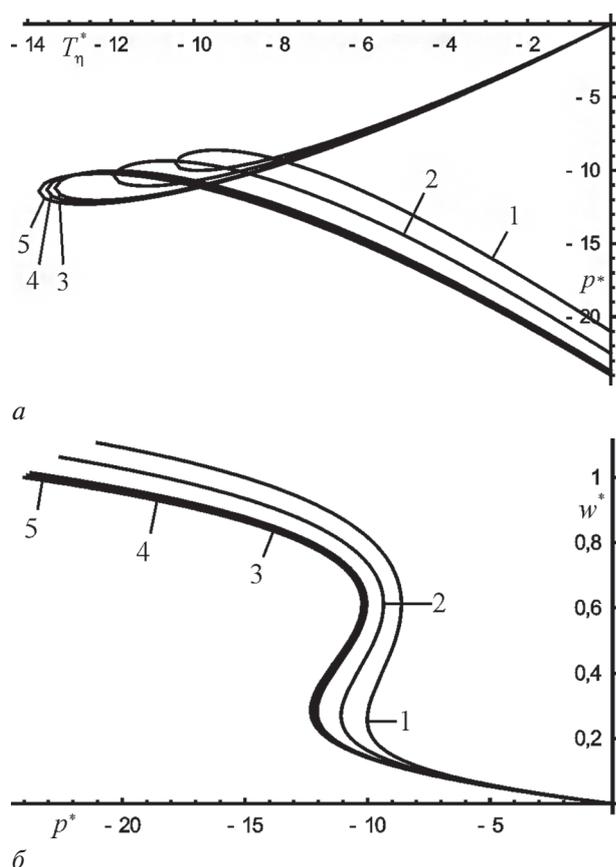


Рисунок 6 — Влияние параметра  $\delta'$  на деформирование длинных цилиндрических панелей ( $k_{\eta 0}^* = 13,03, \gamma = 1$ ) (а — зависимость между величинами  $p^*$  и  $T_n^*$ ; б — зависимость между величинами  $p^*$  и  $w^*$  при  $\eta = 0$ ): 1 —  $\delta' = 45,61$ ; 2 —  $\delta' = 91,22$ ; 3 —  $\delta' = 456,1$ ; 4 —  $\delta' = 912,2$ ; 5 —  $\delta' = +\infty$

лочек Доннелла–Муштари–Власова. Это верно и для прямых несимметричной формы прогиба на рисунке 4.

**Выводы.** Рассмотрен упрощенный вариант геометрически нелинейной уточненной теории тонких трансверсально-изотропных оболочек постоянной толщины. На его основе построено решающее уравнение теории гибких длинных пологих некруговых цилиндрических панелей.

Для длинных некруговых цилиндрических панелей определенного класса получено достаточное условие пологости.

Для случая нерастягивающих нормальных усилий в срединной поверхности получено точное аналитическое решение задачи о напряженно-деформированном состоянии длинной некруговой цилиндрической панели с защемленными продольными краями, находящейся под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки.

Проведено сравнение результатов расчета с помощью этого решения и точного аналитического решения на основе теории Доннелла–Муштари–Власова. Исследовано деформирование длинных некруговых цилиндрических панелей в закритической области. Принято во внимание решения, отвечающие несимметричной изогнутой поверхности.

Получен достаточный признак появления экстремальных точек на кривой «нагрузка—прогиб».

### Список обозначений

- $Ox, Oy, Oz$  — прямоугольная система координат;
- $O$  — начало координат;
- $xOy, yOz, zOx$  — координатные плоскости;
- $x_1, x_2, x_3$  — координатные линии;
- $h$  — полутолщина оболочки;
- $E$  — модуль Юнга для растяжения — сжатия по направлениям  $x_1$  и  $x_2$ ;
- $\nu$  — коэффициент Пуассона, характеризующий сжатие в направлениях  $x_1$  и  $x_2$  при растяжении в направлениях  $x_2$  и  $x_1$  соответственно;
- $G$  — модуль сдвига, характеризующий изменение углов между направлениями  $x_1$  и  $x_2$ ;
- $G'$  — модуль сдвига для плоскостей, нормальных срединной поверхности;
- $B$  — тангенциальная жесткость;
- $B_{12}$  — коэффициент тангенциального сдвига срединной поверхности;
- $D$  — цилиндрическая жесткость;
- $D_{12}$  — коэффициент кручения срединной поверхности;
- $\Lambda'$  — коэффициент поперечного сдвига;
- $A_1, A_2$  — параметры Ламе срединной поверхности;
- $k_1, k_2$  — главные кривизны срединной поверхности;
- $u, v, w$  — перемещения точек срединной поверхности вдоль линий  $x_1, x_2, x_3$  соответственно;
- $\beta_1, \beta_2$  — углы поворота нормали к срединной поверхности;
- $E_{11}, E_{22}$  — удлинения срединной поверхности;
- $E_{12}$  — сдвиг срединной поверхности;
- $K_{11}, K_{22}$  — изменения кривизн срединной поверхности;
- $K_{12}$  — кручение срединной поверхности;
- $\epsilon_{13}, \epsilon_{23}$  — поперечные сдвиги;
- $T_1, T_2$  — удельные нормальные усилия в срединной поверхности;
- $S$  — удельное касательное усилие в срединной поверхности;
- $M_1, M_2$  — удельные изгибные моменты;
- $H$  — удельный крутящий момент;
- $Q_1, Q_2$  — удельные поперечные усилия;
- $F_1, F_2, F_3$  — проекции объемных сил, отнесенных к единице объема оболочки, на координатные направления  $x_1, x_2, x_3$  соответственно;
- $p, q$  — интенсивности поперечных нагрузок на лицевых поверхностях  $x_3 = h, x_3 = -h$  соответственно;
- $b$  — половина размера срединной поверхности длинной цилиндрической панели вдоль дуги;
- $k_{20}$  — значение  $k_2$  в точках срединной поверхности длинной цилиндрической панели на начальной образующей;
- $\Delta$  — взаимное смещение продольных краев длинной цилиндрической панели;
- $\eta$  — безразмерная дуговая координата на срединной поверхности длинной цилиндрической панели.

## Список литературы

1. Напряжения в обшивке судов от давления воды / И.Г. Бубнов // Труды по теории пластин. — М.: Гос. изд-во техн.-теоретич. лит-ры, 1953. — С. 11–100.
2. Вольмир, А.С. Гибкие пластинки и оболочки / А.С. Вольмир. — М.: Гос. изд-во техн.-теоретич. лит-ры, 1956. — 420 с.
3. Григолюк, Э.И. Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин / Э.И. Григолюк, Г.М. Куликов. — М.: Машиностроение, 1988. — 288 с.
4. Reddy, J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis / J.N. Reddy. — 2nd ed. — Boca Raton: CRC Press LLC, 2004. — 831 p.
5. Birman, V. Closed-form solutions of static and dynamic problems of long, composite cylindrical shells / V. Birman, M.G. Magid // Composites Engineering. — 1991. — Vol. 1, Is. 4. — Pp. 225–233.
6. Yang, J.-L. Nonlinear stability analysis of infinitely long laminated cylindrical shallow shells including shear deformation under lateral pressure / J.-L. Yang, Y. Zhang, Z.-M. Zhang // International Journal of Mechanical Sciences. — 1992. — Vol. 34, Is. 5. — Pp. 345–354.
7. Ганеева, М.С. Большие прогибы и устойчивость длинной пологой ортотропной цилиндрической панели под действием локальной нагрузки / М.С. Ганеева, М.С. Корнишин // Исслед. по теор. пластин и оболочек. — Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1972. — Вып. 9. — С. 283–293.
8. Carper, D.M. Large deformation behavior of long shallow cylindrical composite panels. Report No. VPI-E-83-37 / D.M. Carper, M.W. Hyer, E.R. Johnson. — Blacksburg: Virginia Polytechnic Inst. and State Univ. — 1983. — 171 p.
9. Григоренко, Я.М. До розв'язання задачі про деформацію гнучкої довгої циліндричної оболонки зі змінними параметрами / Я.М. Григоренко // Допов. АН УРСР. Сер. А. — 1977. — № 5. — С. 417–421.
10. Григоренко, Я.М. Вплив граничних умов на стійкість та закритичне поведіння гнучких некругових довгих циліндричних панелей / Я.М. Григоренко, Л.В. Харитонова // Доповіді НАН України. — 1995. — № 7. — С. 35–37.
11. Григоренко, Я.М. К определению критических значений нагрузки при деформировании гибких некруговых цилиндрических оболочек с жестко закрепленными краями / Я.М. Григоренко, Л.В. Харитонова // Прикладная механика. — 2005. — Т. 41 (51), № 11. — С. 78–87.
12. Григоренко, Я.М. Дослідження деформативності гнучких пологих циліндричних оболонок при критичних значеннях навантаження / Я.М. Григоренко, Л.В. Харитонова // Доповіді НАН України. — 2011. — № 4. — С. 54–59.
13. Пелех, Б.Л. Распределение напряжений возле отверстий в податливых на сдвиг оболочках / Б.Л. Пелех, А.А. Сяский. — Киев: Наук. думка, 1975. — 200 с.
14. Пелех, Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью / Б.Л. Пелех. — Киев: Наук. думка, 1973. — 248 с.

MARCHUK Mykhailo V., Dr. Phys.-Math. Sc., Professor

Head of the Department of Mechanics of Thin-Walled Structure Elements<sup>1</sup>

E-mail: marchuk@iapmm.lviv.ua

TUCHAPSKYY Roman I., Cand. Phys.-Math. Sc.

Junior Researcher of the Department of Mechanics of Thin-Walled Structure Elements<sup>1</sup>

E-mail: roman.tuch@gmail.com

PAKOSH Vira S., Cand. Phys.-Math. Sc.

Senior Researcher of the Department of Mechanics of Thin-Walled Structure Elements<sup>1</sup>

E-mail: V.Pakosh@ukr.net

<sup>1</sup>Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, L'viv, Ukraine

Received 10 August 2015.

## STUDY OF DEFORMATION OF FLEXIBLE LONG SHALLOW NONCIRCULAR CYLINDRICAL PANELS WITH CLAMPED LONGITUDINAL EDGES BY REFINED THEORY

*The basic equations and relations of geometrically nonlinear Timoshenko type theory of transversely isotropic flexible long shallow noncircular cylindrical shells were considered and the solvable equation for the deflection of the shell was built on their basis. An exact analytical solution for the stress-strain state of a long non-circular cylindrical panel with clamped longitudinal edges under a uniformly distributed transverse load was obtained for the case of non-tensile normal forces in the middle surface. The calculation results by means of this solution were compared with the results of the exact analytical solution based on the Donnell—Mushtari—Vlasov theory. Deformation of long non-circular cylindrical panels was investigated in the supercritical region.*

**Keywords:** flexible long shallow noncircular cylindrical panel, Timoshenko type theory of shells

### References

1. Bubnov I.G. Naprjazhenija v obshivke sudov ot davlenija vody [Stresses in the hull of vessels from the water pressure]. *Tруды по теории пластин* [Works on the theory of plates]. Moscow, Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoj literatury, 1953, pp. 11–100.
2. Vol'mir A.S. *Gibkie plastinki i obolochki* [Flexible plates and shells]. Moscow, Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoj literatury, 1956. 420 p.
3. Grigoljuk Je.I., Kulikov G.M. *Mnogoslojnye armirovannye obolochki: Raschet pnevmaticheskikh шин* [Multilayer reinforced shells: Calculation of pneumatic tires]. Moscow, Mashinostroenie, 1988. 288 p.

4. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. Boca Raton, CRC Press LLC, 2004. 831 p.
5. Birman V., Magid M.G. Closed-form solutions of static and dynamic problems of long, composite cylindrical shells. *Composites Engineering*, 1991, vol. 1, issue 4, pp. 225–233.
6. Yang J.-L., Zhang Y., Zhang Z.-M. Nonlinear stability analysis of infinitely long laminated cylindrical shallow shells including shear deformation under lateral pressure. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1992, vol. 34, issue 5, pp. 345–354.
7. Ganeeva M.S., Kornishin M.S. Bol'shie progiby i ustojchivost' dlinnoj pologoj ortotropnoj cilindricheskoj paneli pod dejstviem lokal'noj nagruzki [Large deflections and stability of long shallow orthotropic cylindrical panels under the influence of a local load]. *Issled. po teor. plastin i obolochek* [Investigations in the theory of plates and shells]. Kazan', Izd-vo Kazanskogo un-ta, 1972, no. 9, pp. 283–293.
8. Carper D.M., Hyer M.W., Johnson E.R. *Large deformation behavior of long shallow cylindrical composite panels*. Report No. VPI-E-83-37. Blacksburg, Virginia Polytechnic Inst. and State Univ., 1983. 171 p.
9. Grygorenko Ja.M. Do rozv'jazannja zadachi pro deformaciju gnuchkoi' dovgoi' cilindrychnoi' obolonky zi zminnymy parametramy [On solution of the problem on deformation of flexible long cylindrical shell with variable parameters]. *Dopov. AN URSSR* [Reports of the Academy of Sciences of USSR], 1977, no. 5, pp. 417–421.
10. Grygorenko Ja.M., Harytonova L.V. Vplyv granychnyh umov na stijkist' ta zakrytychne povodzhennja gnuchkyh nekrugovyh dovgyh cilindrychnyh panelej [Influence of boundary conditions on stability and supercritical behavior of non-circular long flexible cylindrical panels]. *Dopovidi Nacional'noi' akademii' nauk Ukrainy* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine], 1995, no. 7, pp. 35–37.
11. Grigorenko Ja.M., Haritonova L.V. K opredeleniju kriticheskikh znachenij nagruzki pri deformirovanii gibkikh nekrugovyh cilindricheskikh obolochek s zhestko zakreplennymi krajami [A note on the determination of critical loads for flexible noncircular cylindrical shells with clamped edges]. *Prikladnaja mehanika* [International Applied Mechanics], 2005, vol. 41(51), no. 11, pp. 78–87.
12. Grygorenko Ja.M., Harytonova L.V. Doslidzhennja deformatyvnosti gnuchkyh pologyh cilindrychnyh obolonok pry krytychnyh znachenjah navantazhennja [Investigation of deformability of flexible shallow cylindrical shells under critical loading]. *Dopovidi Nacional'noi' akademii' nauk Ukrainy* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine], 2011, no. 4, pp. 54–59.
13. Peleh B.L., Sjas'kij A.A. *Raspredelenie naprjazhenij vozle otverstij v podatlivykh na sdvig obolochkah* [Stress distribution near the holes in shells pliable to shear]. Kiev, Nauk. dumka, 1975. 200 p.
14. Peleh B.L. *Teorija obolochek s konechnoj sdvigovoj zhestkost'ju* [The theory of shells with finite shear stiffness]. Kiev, Nauk. dumka, 1973. 248 p.