

УДК 539.4

Е. В. ШМАТОК

аспирант<sup>1</sup>

E-mail: arjgay@ya.ru

О. М. ОСТРИКОВ, канд. физ.-мат. наук, доцент

заведующий кафедрой «Инженерная графика»<sup>1</sup>

E-mail: ostrikov@gstu.by

<sup>1</sup>Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого, г. Гомель, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 06.09.2015.

## ВЛИЯНИЕ ТРЕЩИНЫ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА НА ОСОБЕННОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ У ЕДИНИЧНОГО ЛИНЗОВИДНОГО МЕХАНИЧЕСКОГО ДВОЙНИКА В СПЛАВАХ $Ni_2MnGa$

*Разработан метод расчета полей напряжений в окрестностях системы «полубесконечная трещина поперечного сдвига — механический линзовидный двойник» в монокристалле  $Ni_2MnGa$  в случае постдеформационного состояния при равной нулю внешней нагрузке, спровоцировавшей появление трещины и двойника. На основании анализа полученных результатов показаны особенности распределения напряжений вблизи источников их формирования, а также выявлены области локализации наибольших напряжений.*

**Ключевые слова:** память формы, сплавы Гейслера, двойникование, разрушение, напряжения, трещина поперечного сдвига

**Введение.** Сплавы с управляемой магнитным полем памятью формы обладают уникальными физико-механическими свойствами, которые находят широкое применение во многих технических системах нового поколения: актюаторы, сенсоры, холодильники, источники питания и др. [1, 2]. Важнейшей характеристикой материала является его прочность. Исследование данного аспекта в ферромагнитных сплавах Гейслера, в частности в  $Ni_2MnGa$ , в настоящее время является актуальной и важной научной задачей.

Целью данной работы является расчет в приближении сплошной неограниченной изотропной среды полей напряжений, обусловленных наличием системы «полубесконечная трещина поперечного сдвига — механический линзовидный остаточный двойник» в монокристалле  $Ni_2MnGa$ .

**Постановка задачи.** В процессе увеличения площади свободной поверхности трещины, исходя из возникающих смещений и удобства проведения расчетов, в рассматриваемом материале выделяют три основные формы разрушения: нормальный отрыв, продольный и поперечный сдвиги [3]. В данной работе осуществляется постановка и решение задачи о распределении напряжений вблизи вершины полубесконечной трещины, образованной поперечным сдвигом (рисунок 1). Трещина, как источник напряжений, стимулирует образование двойника [4–7], обладающего, в свою очередь, собственным полем напряжений.

Помимо этого следует отметить, что образовавшаяся система рассматривается в случае, когда нагрузка, спровоцировавшая разрушение, снята.

На рисунке 2 представлена схема поставленной задачи, отражающая расположение ключевых объектов расчета относительно друг друга.

Вблизи вершины трещины, параллельно направлению ее роста, вследствие деформаций материала образовался единственный остаточный линзовидный двойник длиной  $2L$  [7]. Исходя из принципа суперпозиции полей напряжений, в данном случае справедливо равенство:

$$\sigma_{ij}(x, y) = \sigma_{ij}^{nw}(x, y) + \sigma_{ij}^{cr}(x, y),$$

где  $\sigma_{ij}^{nw}(x, y)$  — напряжения, создаваемые механическим линзовидным двойником;  $\sigma_{ij}^{cr}(x, y)$  — напряжения вершины полубесконечной трещины второго типа [1];  $i, j$  — принимают значения  $x$  и  $y$  в соответствии с компонентами тензора напряжений из [3].

Напряженное состояние у вершины трещины  $\sigma_{ij}^{cr}(x, y)$  рассчитывается посредством метода комплексных потенциалов Колосова–Мусхелишвили [8]. В соответствии с [3] напряжения у вершины

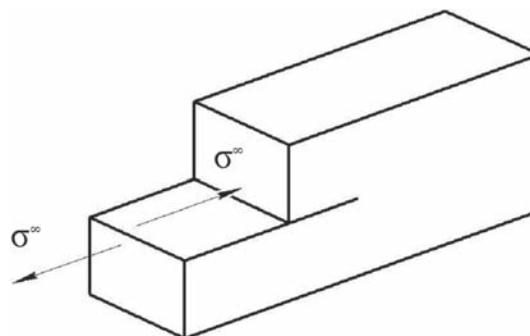


Рисунок 1 — Схема действия внешних напряжений при образовании трещины поперечного сдвига [1]

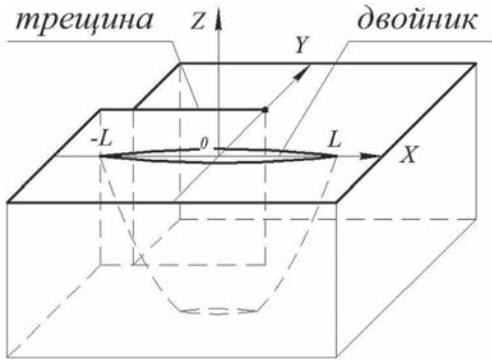


Рисунок 2 – Схема расположения элементов системы «полубесконечная трещина поперечного сдвига – механический линзовидный двойник»

полубесконечной трещины поперечного сдвига рассчитываются по формулам:

$$\sigma_{xx}^{cr}(x, y) = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left( -\sin \frac{\theta}{2} \cdot \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \right);$$

$$\sigma_{yy}^{cr}(x, y) = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left( \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right);$$

$$\sigma_{xy}^{cr}(x, y) = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left( \cos \frac{\theta}{2} \cdot \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \right),$$

где  $K_{II}$  — коэффициент интенсивности напряжений трещины поперечного сдвига.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \theta = \arctg \left( \frac{x}{y} \right).$$

Вследствие деформирования монокристалла  $Ni_2MnGa$  образуется множество единичных двойников, групп двойников и полос скольжения [5–7]. В рассматриваемом случае напряженно-деформированного состояния, вызванного трещиной, образуется единичный линзовидный двойник, имеющий собственное поле напряжений  $\sigma_{ij}^{nw(m,0)}(x, y, \xi)$  [9]. Искомые напряжения рассчитываются из определенных компонент матрицы тензора напряжений, выбранных согласно формулам расчета напряжений у вершины трещины  $\sigma_{ij}^{cr}(x, y)$  из [3].

Используя приближение о непрерывном распределении двойникоующих дислокаций вдоль границ двойника [9–11], напряжения  $\sigma_{xx}^{nw}(x, y)$ ,  $\sigma_{yy}^{nw}(x, y)$ ,  $\sigma_{xy}^{nw}(x, y)$  находятся из равенства:

$$\sigma_{ij}^{nw}(x, y) = \sum_m \sigma_{ij}^{nw}(x, y),$$

где  $m$  — количество функций, описывающих форму границ линзовидного двойника, ( $m = \text{const}$ );  $\sigma_{ij}^{nw}(x, y)$  — напряжения границы двойника, определяемые из выражения [9]:

$$\sigma_{ij}^{nw}(x, y) = \int_{-L}^L \sqrt{1 + (f_1'(\xi))^2} \rho_1(\xi) \sigma_{ij}^{nw(1,0)}(x, y, \xi) d\xi + \int_{-L}^L \sqrt{1 + (f_2'(\xi))^2} \rho_2(\xi) \sigma_{ij}^{nw(2,0)}(x, y, \xi) d\xi,$$

где  $L$  — половина длины двойника;  $\rho_m(\xi)$  — плотность распределения двойникоующих краевых дислокаций вдоль двойниковых границ, которая в частном случае равномерна;  $\sigma_{ij}^{nw(m,0)}(x, y, \xi)$  — напряжения единичной краевой дислокации;  $\xi$  — параметр интегрирования;  $f_1(\xi)$  и  $f_2(\xi)$  — функции, описывающие форму верхней и нижней границ двойника:

$$f_1(\xi) = \frac{H}{2} \left( \frac{\xi^2}{L^2} - 1 \right); f_2(\xi) = -\frac{H}{2} \left( \frac{\xi^2}{L^2} - 1 \right),$$

где  $H$  — наибольшая ширина линзовидного двойника (по оси  $OY$ ).

Напряжения двойника  $\sigma_{ij}^{nw(m,0)}(x, y, \xi)$  для избранных компонент определяются по формулам [9]:

$$\sigma_{xx}^{nw(m,0)}(x, y, \xi) = -\frac{\mu b_{kp}}{2\pi(1-\nu)} \left[ (y - f_m(\xi)) - B \right] \times$$

$$\times \frac{\left[ 3((x - \xi) - A)^2 + ((y - f_m(\xi)) - B)^2 \right]}{\left[ ((x - \xi) - A)^2 + ((y - f_m(\xi)) - B)^2 \right]^2};$$

$$\sigma_{yy}^{nw(m,0)}(x, y, \xi) = \frac{\mu b_{kp}}{2\pi(1-\nu)} \left[ (y - f_m(\xi)) - B \right] \times$$

$$\times \frac{\left[ ((x - \xi) - A)^2 - ((y - f_m(\xi)) - B)^2 \right]}{\left[ ((x - \xi) - A)^2 + ((y - f_m(\xi)) - B)^2 \right]^2};$$

$$\sigma_{xy}^{nw(m,0)}(x, y, \xi) = \frac{\mu b_{kp}}{2\pi(1-\nu)} \left[ (x - \xi) - A \right] \times$$

$$\times \frac{\left[ ((x - \xi) - A)^2 - ((y - f_m(\xi)) - B)^2 \right]}{\left[ ((x - \xi) - A)^2 + ((y - f_m(\xi)) - B)^2 \right]^2},$$

где  $\mu$  — модуль сдвига;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $A, B$  — параметры, определяющие положение двойника в плоскости  $XOY$ ;  $b_{kp}$  — модуль краевой составляющей вектора Бюргерса частичной двойникоующей дислокации.

**Результаты расчетов и их обсуждение.** Результаты решения задачи о расчете полей напряжений системы «полубесконечная трещина поперечного сдвига — механический линзовидный остаточный двойник» [3, 4], образованной в монокристалле  $Ni_2MnGa$ , представлены на рисунках 3 и 4. Отправной точкой для расчетов были следующие исходные данные:  $L = 60$  мкм;  $H = 15$  мкм;  $\rho_m(\xi) = \text{const} = \rho = 0,02 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1}$ ;  $\nu = 0,33$ ;  $\mu = 19,231 \text{ ГПа}$ ;  $b_{kp} = 2,91 \text{ \AA}$ ;  $K_{II} = 10 \text{ ГПа} \cdot \text{мкм}^{1/2}$ . Расчеты проводились в программном продукте Pascal.

Полученные данные могут быть полезны для решения задач, связанных с прогнозированием надежности работы технических систем на основе ферромагнитных материалов с памятью формы. Механическое двойникование может выступать как очаг зарождения разрушения, так и тормозить начавшееся разрушение путем перераспределения энергии

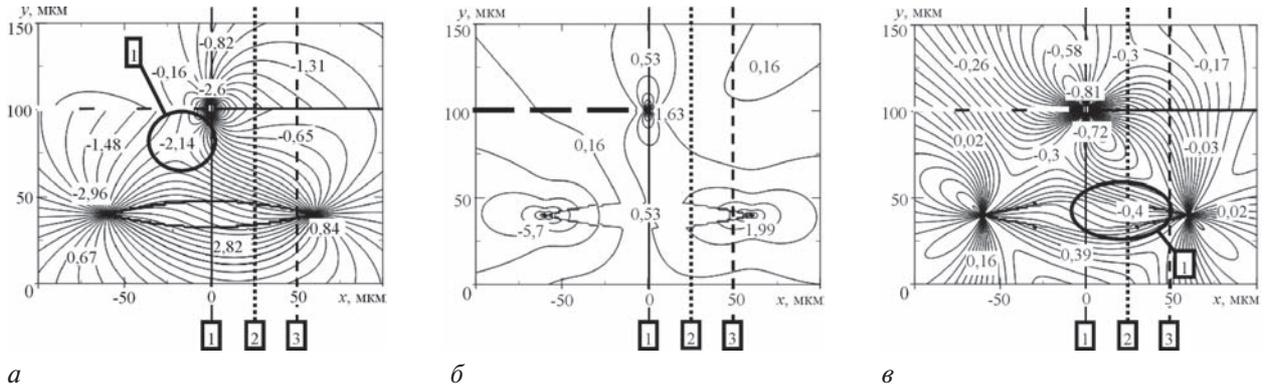


Рисунок 3 — Картина распределения напряжений в окрестностях рассматриваемой системы «полубесконечная трещина поперечного сдвига — механический линзовидный двойник»: а —  $\sigma_{xx}(x, y)$ ; б —  $\sigma_{xy}(x, y)$ ; в —  $\sigma_{yy}(x, y)$  (МПа) (1 —  $A = 0$  мкм; 2 —  $A = 25$  мкм; 3 —  $A = 50$  мкм)

разрушения на двойникование. Наличие рассматриваемых в статье двойников способно оказывать существенное влияние на прочность и долговечность монокристалла Гейслера.

Картина напряжений, представленная на рисунке 3 а, является результатом расчета напряженного состояния системы для нормальной компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xx}(x, y)$ . Здесь наблюдается симметрия распределения линий равных напряжений относительно  $OY$  лишь у двойника. Картина напряжений у вершины трещины симметрична по модульным значениям относительно  $OX$  и  $OY$  при рассмотрении вершины трещины с началом координат в ее центре.

В результате взаимодействия полей напряжений трещины и двойника отрицательного направления (см. рисунок 3 а) образовалась область 1 близких по величине напряжений. Под их влиянием изменяется картина распределения напряжений у верхней границы двойника посредством смещения линий равных величин напряжений внутри двойниковой линзы параллельно направлению возмущения со стороны напряжений области 1.

Расчет сдвиговой компоненты  $\sigma_{xy}(x, y)$  дал результат, представленный на рисунке 3 б. В отличие от напряжений компонент  $\sigma_{xx}(x, y)$  и  $\sigma_{yy}(x, y)$ , напряжения сдвиговой компоненты  $\sigma_{xy}(x, y)$  распределяются равномерно по всей расчетной плоскости со сравнительно небольшими перепадами численных значений. Более высокие, относительно общего уровня значе-

ний, напряжения концентрируются у краев двойника и вершины трещины. Здесь, в сравнении с другими компонентами, наблюдается наибольшая численная величина напряжений. Причем вершины двойника сконцентрировали напряжения диаметрально противоположного направления параллельного  $OZ$ .

Расчетная плоскость распределения напряжений нормальной компоненты  $\sigma_{yy}(x, y)$  показана на рисунке 3 в. Линии равных величин данной компоненты, прежде всего, обладают сложным рельефом по всей расчетной области, обусловленным наличием большого количества перепадов значений напряжений. Также сложный рельеф напряжений данной расчетной области дополняют изменения направления напряжений вблизи двойника и вершины трещины поперечного сдвига.

Напряжения компоненты  $\sigma_{yy}(x, y)$  вокруг двойника при равномерном распределении дислокаций вдоль двойниковых границ симметричны относительно  $OY$ . Причем, как и у компоненты  $\sigma_{xx}(x, y)$ , здесь заметно влияние напряжений вершины трещины, в результате чего в области 1 (см. рисунок 3 в) перестроились линии равных величин внутри двойника параллельно линиям напряжений трещины.

В целом напряжения компонент, представленных на рисунке 3 концентрируют наибольшие значения ближе к вершине трещины и границам двойника. Напряжения нормальных компонент  $\sigma_{xx}(x, y)$ ,  $\sigma_{yy}(x, y)$  двойника, распространяются симметрично

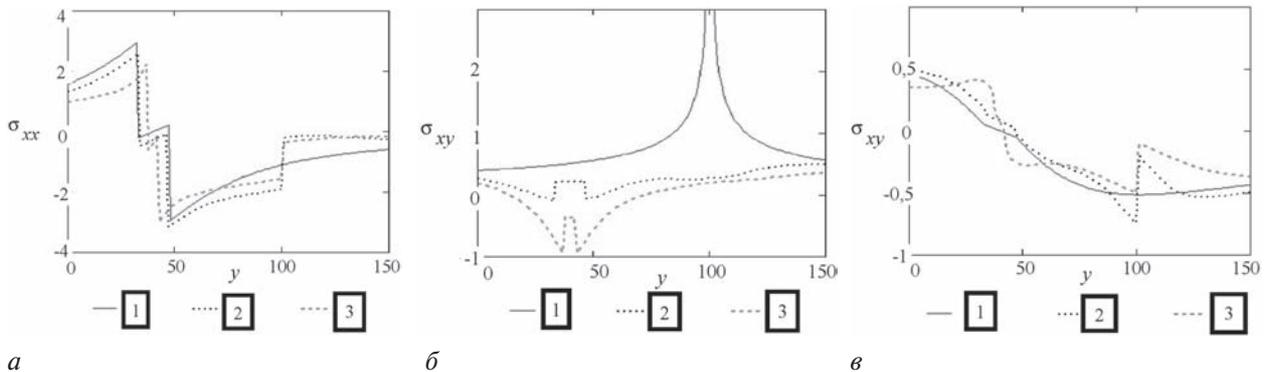


Рисунок 4 — Графики зависимости компонент тензора напряжений от координаты  $Y$ , мкм: а —  $\sigma_{xx}$ ; б —  $\sigma_{xy}$ ; в —  $\sigma_{yy}$  (МПа). Построены вдоль прямых при  $B = 0$  мкм: 1 —  $A = 0$  мкм; 2 —  $A = 25$  мкм; 3 —  $A = 50$  мкм

относительно  $OY$  его границ и имеют противоположные направления. Вблизи вершины трещины, как основного концентратора, величины напряжений распределены симметрично относительно  $OX$  и  $OY$ .

На рисунке 4 изображены графики зависимости рассчитываемых компонент тензора напряжений от координаты  $Y$  в ключевых сечениях 1, 2 и 3 расчетной плоскости.

Здесь наглядно видны перепады напряжений компонент  $\sigma_{xx}(x, y)$  и  $\sigma_{yy}(x, y)$  на границах двойника, а также симметричный  $OX$  рельеф напряжений компоненты  $\sigma_{xy}(x, y)$  внутри двойника.

Напряжения вблизи вершины трещины поперечного сдвига из графиков на рисунке 4 представлены экстремумом лишь у сдвиговой компоненты  $\sigma_{xy}(x, y)$ . Напряженность данного участка убывает по мере удаления от трещины, как видно на графиках сечений 2 и 3 (см. рисунок 4 б). Расчет нормальных компонент тензора напряжений  $\sigma_{xx}(x, y)$  и  $\sigma_{yy}(x, y)$  показал наличие растягивающих напряжений у вершины трещины (см. графики сечений 2 и 3 на рисунках 4 а и 4 в).

**Заключение.** В результате расчетов полей напряжений системы «полубесконечная трещина поперечного сдвига — механический линзовидный остаточный двойник», образованной в монокристалле  $Ni_2MnGa$ , установлено, что напряженное состояние, обусловленное наличием трещины, способно в значительной степени видоизменить распределение собственных напряжений линзовидного двойника. Установлено, что вершина трещины является концентратором значительных напряжений, на порядок превышающих уровень напряжений у границ двойника. Полученные данные могут быть использованы при прогнозировании надежности

механизмов на основе ферромагнитных монокристаллов Гейслера.

#### Список литературы

1. Basic properties of magnetic shape memory actuators / J. Tellinen [et al.] // AdaptaMat Ltd., Helsinki. Published in 8th Int. Conf. "Actuator 2002", 10–12 June 2002, Bremen, Germany. — 2002. — P. 4.
2. Giant two-way shape memory effect in high-temperature Ni-Mn-Ga single crystal / V.A. Chernenko [et al.] // 3rd Int. Symposium on Shape Mem. Mat. Smart Systems. — 2010. — Pp. 94–98.
3. Астафьев, В.И. Нелинейная механика разрушения / В.И. Астафьев, Ю.Н. Радаев, Л.В. Степанова. — Самара: Самарский ун-т, 2001. — С. 57–60.
4. Классен-Неклюдова, М.В. Механическое двойникование кристаллов / М.В. Классен-Неклюдова. — М.: АН СССР, 1960. — 262 с.
5. Остриков, О.М. Особенности механического двойникования, локального разрушения и формирования каналов Розе в монокристаллах  $Ni_2MnGa$  при индентировании их поверхности пирамидой Виккерса / О.М. Остриков, Е.В. Шматок // Материалы. Технологии. Инструменты. — 2013. — Т. 18, № 3. — С. 5–10.
6. Остриков, О.М. Закономерности механического двойникования мартенситной фазы монокристалла  $Ni_2MnGa$  при деформировании его поверхности (100) пирамидой Виккерса / О.М. Остриков, Е.В. Шматок // Вест. ГГТУ им. П.О. Сухого. — 2013. — № 3(54). — С. 37–42.
7. Остриков, О.М. Разрушение и сопутствующие ему эффекты в ферромагнитном монокристалле  $Ni_2MnGa$  с эффектом памяти формы / О.М. Остриков, Е.В. Шматок // ИФЖ. — 2015. — Т. 88, № 1. — С. 272–278.
8. Мухелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мухелишвили. — М.: АН СССР, 1954. — 648 с.
9. Остриков, О.М. Механика двойникования твердых тел / О.М. Остриков. — Гомель: ГГТУ им. П.О. Сухого. — 2008. — 301 с.
10. Остриков, О.М. Напряженное состояние у поверхности кристалла, деформируемой сосредоточенной нагрузкой, при наличии клиновидного двойника / О.М. Остриков // ЖТФ. — 2009. — Т. 79, № 5. — С. 137–139.
11. Остриков, О.М. Метод расчета распределения деформаций у клиновидного двойника с использованием подходов макроскопической дислокационной модели / О.М. Остриков // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 2009. — № 4. — С. 52–58.

SHMATOK Evgeniy V.

Post-Graduate Student<sup>1</sup>

E-mail: arrjay@ya.ru

OSTRIKOV Oleg M., Cand. Phys.-Math. Sc., Associate Professor

Head of the Department "Engineering graphics"<sup>1</sup>

E-mail: ostrikov@gstu.by

<sup>1</sup>Gomel State Technical University named after Pavel Sukhoi, Gomel, Republic of Belarus

Received 06 September 2015.

## INFLUENCE OF THE CROSS-SECTION SHEAR CRACK ON FEATURES OF DISTRIBUTION A PRESSURE AT THE INDIVIDUAL MECHANICAL LENTIFORM TWIN IN ALLOYS $Ni_2MnGa$

*The developed method of stress fields in system "semi-infinite cross-section shear crack — mechanical lentiform twin" in single crystal  $Ni_2MnGa$  in case of a postdeformation state at equal zero value to the exterior loading, which has to become the reason appearance of crack and the twin. Being based on the analys of the received results, are shown the features of distribution of pressure close to the sources of their formation, and also are revealed the areas of localisation of the greatest pressure.*

**Keywords:** shape memory, Heisler alloys, twinning, destruction, pressure, crack of cross-ception shear

## References

1. Tellinen J., Suorsa I., Jaaskelainen A., Aaltio I., Ullakko K. Basic properties of magnetic shape memory actuators. *Proc. 8th Int. Conf. "Actuator 2002"*, Germany, Helsinki, AdaptaMat Ltd., 2002. 4 p.
2. Chernenko V.A., Villa E., Besseghini S., Barandiaran J.M. Giant two-way shape memory effect in high-temperature Ni-Mn-Ga single crystal. *Proc. 3rd Int. Symposium on Shape Mem. Mat. Smart Systems*. 2010, pp. 94–98.
3. Astafev V.I., Radaev Ju.N., Stepanova L.V. *Nelinejnaja mehanika razrushenija* [Non-Linear Fracture Mechanics]. Samara, Samarskij universitet, 2001, pp. 57–60.
4. Klassen-Neklyudova M.V. *Mehanicheskoe dvojnিকovanie kristallov* [Mechanical twinning crystals]. Moscow, AN SSSR, 1960, 262 p.
5. Ostrikov O.M. Osobnosti mehanicheskogo dvojnিকovanija, lokal'nogo razrushenija i formirovanija kanalov Roze v monokristallah  $Ni_2MnGa$  pri indentirovanii ih poverhnosti piramidoy Vikkersa [Features mechanical twinning, local destruction and the formation of channels Rose in the  $Ni_2MnGa$  single crystals with indentation their surface Vickers pyramid]. *Materialy. Tehnologii. Instrumenty*. [Materials. Tehnology. Tools.], Gomel, 2013, vol. 18, no. 3, pp. 5–10.
6. Ostrikov O.M. Zakonomernosti mehanicheskogo dvojnিকovanija martensitnoj fazy monokristalla  $Ni_2MnGa$  pri deformirovanii ego poverhnosti (100) piramidoy Vikkersa [Regularities of mechanical twinning martensite phase  $Ni_2MnGa$  single crystal at the deformation surface (100) by the Vickers pyramid]. *Vestnik Gomel. gos. tehn. un-ta im. P.O. Suhogo* [Bulletin GSTU], Gomel, 2013, no. 3(54), pp. 37–42.
7. Ostrikov O.M. Razrushenie i soputstvujushhie emu jeffekty v ferromagnitnom monokristalle  $Ni_2MnGa$  s jeffektom pamjati formy [Destruction and accompanying its effects in single crystal of ferromagnetic shape memory alloy  $Ni_2MnGa$ ]. *Inzh.-fiz. Zhurn.* [Engineering Physics Journal], 2015, vol. 88, no. 1, pp. 272–278.
8. Muskhelishvili N.I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]. Moscow, AN SSSR, 1954. 648 p.
9. Ostrikov O.M. *Mehanika dvojnিকovanija tverdyh tel* [Mechanics of twinning a solid bodies]. Gomel, GGTU im. P.O. Suhogo, 2008, 301 p.
10. Ostrikov O.M. Naprjazhennoe sostojanie u poverhnosti kristalla, deformiruemoy sosredotochennoj nagruzkoy, pri nalichii klinovidnogo dvojnika [The stress state at the surface of the crystal, deformable concentrated load in the presence of a wedgeform twin]. *Zhurnal tehnicheckoj fiziki* [Journal of Technical Physics], 2009, vol. 79, no. 5, pp. 137–139.
11. Ostrikov O.M. Metod rascheta raspredelenija deformacij u klinovidnogo dvojnika s ispol'zovaniem podhodov makroskopicheskoy dislokacionnoj modeli [The method of calculating the distribution of strains in wedgeform twin with approaches macroscopic dislocation model]. *Izvestija RAN. Mehanika tverdogo tela* [News the Russian Academy of Sciences. Mechanics of solid bodies], 2009, no. 4, pp. 52–58.