

УДК 539.376

А.П. ЯНКОВСКИЙ, д-р физ.-мат. наук

ведущий научный сотрудник лаборатории «Физики быстропротекающих процессов»

E-mail: yankovsky_ap@rambler.ru

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 07.04.2016.

НЕУСТАНОВИВШАЯСЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ СЛОИСТЫХ СТЕРЖНЕЙ НЕРЕГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРЫ ИЗ НЕЛИНЕЙНО-НАСЛЕДСТВЕННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Рассмотрена неустановившаяся ползучесть однородных и металлокомпозитных стержней (балок) нерегулярной слоистой структуры. Балки состоят из тонких стенок и прикрепленных к ним сверху и снизу полок (несущих слоев). Стенки и несущие слои изготовлены из однородных изотропных материалов. Механическое поведение этих материалов описывается нелинейно-наследственной теорией ползучести Ю.Н. Работнова. На базе гипотез теории Тимошенко с привлечением идеи метода шагов по времени сформулирована задача неупругого изгибного деформирования таких стержней с учетом ослабленного сопротивления их стенок поперечному сдвигу. Показано, что в дискретные моменты времени механическое поведение указанных материалов слоев формально подчиняется определяющим соотношениям нелинейно-упругого изотропного тела с начальным напряженным состоянием, которое известно. Для линеаризации поставленной задачи в каждый дискретный момент времени использован метод секущего модуля. Исследованы особенности изгибного поведения трех- и пятислойных однородных и металлокомпозитных стержней при кратковременном и длительном их нагружении. Для простоты рассмотрены лишь статически определимые двухопорные и консольные балки, находящиеся под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки класса Хевисайда. Установлено, что использование классической теории расчета таких балок приводит к предсказанию неоправданно заниженной их податливости, особенно в условиях ползучести. Показано, что в балках с усиленными несущими слоями ползучесть в основном развивается за счет деформаций поперечных сдвигов, которые активно накапливаются в стенках таких конструкций.

Ключевые слова: неустановившаяся ползучесть, слоистые балки, нелинейная наследственность, неупругое деформирование, теория Тимошенко

Введение. Стержневые элементы составляют основу силового набора многих современных инженерных изделий (например, тонкостенных конструкций [1 и др.]), поэтому актуальной является проблема адекватного расчета механического поведения такого силового каркаса и его отдельных элементов: балок и стержней. В настоящее время особый интерес вызывает создание гибридных композитных элементов конструкций, которые получают на базе комбинирования материалов с принципиально разными механическими характеристиками [2–6]. К ним, в частности, относятся балочно-стержневые элементы слоистой нерегулярной структуры [7 и др.].

Известно, что все конструкционные материалы в той или иной степени ползут [8, 9 и др.], поэтому для правильной оценки состояния конструкции необходимо учитывать реономные свойства ее материалов. Изучение особенностей деформирования в условиях ползучести балок и стержней, изготовленных из однородных конструкционных материалов, проводилось, например, в [8, 9 и др.],

а в качестве подкрепляющих элементов — в [1, 10 и др.]. Теория же расчета композитных балок, рам и т. п. (в частности, нерегулярной слоистой структуры), работающих в условиях длительного нагружения, находится в состоянии становления [7, 11, 12]. Так, в [7, 12 и др.] исследовалась неустановившаяся ползучесть слоистых композитных балок и рам. Разрешающие уравнения и соотношения в этих работах получены на базе классической теории, как и в [8]. Однако уже из курса «Сопротивление материалов» [13] известно, что даже в однородной, но рационально спроектированной балке несущие слои должны быть разнесены и соединены одной или несколькими тонкими стенками. Неучет деформации поперечного сдвига в стенках (как это имеет место в рамках классической теории) может привести к значительному занижению расчетной податливости конструкции и предсказанию совершенно иного «механизма» ее деформирования, что продемонстрировано в [14] на примерах металлокомпозитных балок, работающих в условиях установившейся ползучести.

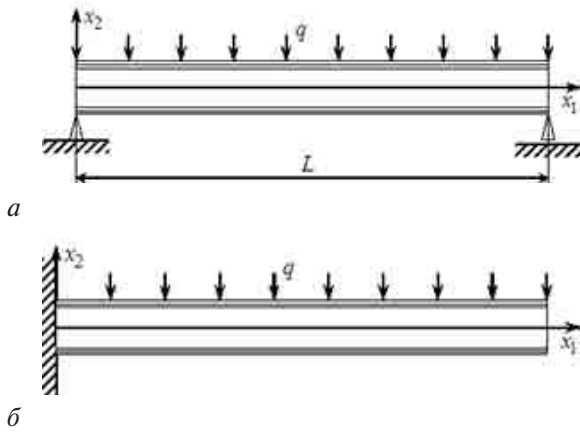


Рисунок 1 — Слоистые балки нерегулярной структуры: а — шарнирно опертая; б — консольная

В связи с этим настоящая работа посвящена построению неклассической теории деформирования слоистых балок нерегулярной структуры, механическое поведение материалов слоев которых подчиняется нелинейно-наследственной теории ползучести Ю.Н. Работнова [8, 9 и др.], а также проведению сравнительного анализа результатов расчетов, выполненных на базе классической и неклассической теории.

Постановка задачи. Исследуется механическое поведение прямолинейной слоистой балки постоянного поперечного сечения длиной L , с которой связана прямоугольная декартова система координат x_i так, что ось x_1 направлена вдоль балки, а x_2 — по ее высоте (рисунок 1). В направлении x_2 балка имеет нерегулярную слоистую структуру; слои изготовлены из однородных изотропных материалов. Поперечное сечение балки симметрично относительно оси x_2 (рисунок 2). Слои контактируют без отрыва и проскальзывания.

Как уже отмечалось, для получения рационально спроектированной балки несущие слои целесообразно разнести и соединить тонкой стенкой, которую условно обозначим как слой с номером $m = 0$. Полки (несущие слои), расположенные над стенкой, пронумеруем снизу вверх от 1 до $M^{(+)}$ ($1 \leq m \leq M^{(+)}$), а несущие слои под стенкой пронумеруем сверху вниз от -1 до $-M^{(-)}$ ($-M^{(-)} \leq m \leq -1$,

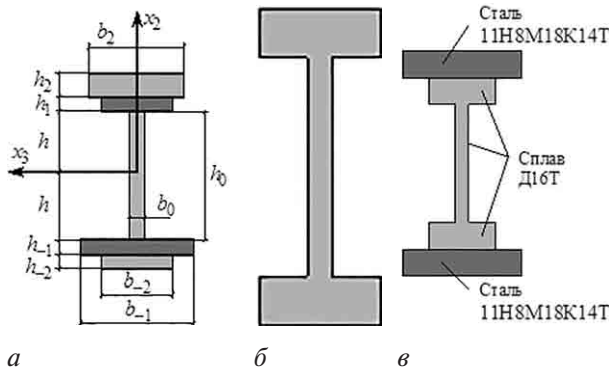


Рисунок 2 — Поперечные сечения слоистой балки:

а — произвольной пятислойной структуры; б — двутавровой однородной; в — двутавровой с усиливающими накладками

$M^{(-)} > 0$). На рисунках 2 а и 2 в изображены поперечные сечения слоистых балок в случае $M^{(\pm)} = 2$ (пятислойные стержни), а на рисунке 2 б — случай $M^{(\pm)} = 1$ (трехслойная балка). Такие слоистые стержни находят наиболее частое применение в инженерной практике проектирования каркасных систем [7].

Систему координат x_i свяжем со стержнем так, чтобы плоскость x_1x_3 ($x_2 = 0$) совпала со средним слоем стенки (см. рисунок 2 а).

Для простоты изложения ограничимся случаем, когда поперечные сечения каждого слоя являются прямоугольниками с размерами $b_m, h_m, -M^{(-)} \leq m \leq M^{(+)}$ (см. рисунок 2), где b_m, h_m — ширина и толщина m -го слоя ($m \neq 0$); $h_0 = 2h$ — высота стенки, b_0 — ее толщина. (Описание более сложной геометрии поперечного сечения слоистого стержня дано в [7]. В рамках настоящего исследования принятое упрощение геометрии поперечного сечения не принципиально.) Предполагается: толщина полок намного меньше высоты стенки, а ширина полок (несущих слоев) существенно больше толщины стенки ($h_m \ll h_0, b_0 \ll b_m$); ширина полок не слишком велика и сравнима с высотой стенки ($b_m \approx h_0 = 2h, -M^{(-)} \leq m \leq M^{(+)}, m \neq 0$). Таким образом, балка не относится к классу тонкостенных стержней [15]. Указанные геометрические ограничения справедливы, например, для двутавровых прокатных профилей [13].

Задача рассматривается в геометрически линейной постановке, т. е. прогибы и деформации малы. Решение задачи не зависит от координаты x_3 , т. е. кручение и изгиб балки в плоскости x_1x_3 не изучаются. (В случае достаточно широких несущих слоев ($b_m \gg h_0, m \neq 0$) возникает необходимость учета изменяемости их деформированного состояния по переменной x_3 [15], поэтому результаты настоящей работы не могут быть перенесены без соответствующей корректировки на тонкостенные стержни с широкими полками).

Ослабленное сопротивление стенки ($m = 0$) рассматриваемой слоистой балки поперечному сдвигу в плоскости изгиба x_1x_2 будем учитывать на основе теории Тимошенко [16], т. е. для перемещений точек стержня используем следующие аппроксимации:

$$u_1(x_1, x_2, t) = u_1^0(x_1, t) - x_2\theta(x_1, t); \quad (1)$$

$$u_2(x_1, x_2, t) = u_2^0(x_1, t), \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad t \geq 0,$$

где u_2^0 — прогиб; u_1^0 — продольное перемещение точек срединного слоя стенки ($x_2 = 0$); θ — угол поворота поперечного сечения стержня вокруг оси x_3 ; t — время.

На основании (1) и дифференциальных соотношений Коши [8] получим выражения для деформаций [16]:

$$\varepsilon_{11}(x_1, x_2, t) = \partial_1 u_1 = \partial_1 u_1^0(x_1, t) - x_2 \partial_1 \theta(x_1, t), \quad (2)$$

$$0 \leq x_1 \leq L;$$

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{12}(x_1, x_2, t) &= \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1 = \partial_1 u_2^0(x_1, t) - \\ &- \theta(x_1, t) = 2\varepsilon_{12}^0(x_1, t), \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где ∂_i — оператор дифференцирования по переменной x_i . Выразим функцию θ из последнего равенства (3) и исключим ее из соотношений (1), (2), тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, t) &= u_1^0(x_1, t) - x_2 \partial_1 u_2^0(x_1, t) + \\ &+ 2x_2 \varepsilon_{12}^0(x_1, t), \quad 0 \leq x_1 \leq L; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(x_1, x_2, t) &= \partial_1 u_1^0(x_1, t) - x_2 \partial_1^2 u_2^0(x_1, t) + \\ &+ 2x_2 \partial_1 \varepsilon_{12}^0(x_1, t), \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Согласно рисунку 2 и соотношениям (3), (5), в стенке ($m = 0$) реализуется обобщенное плоское напряженное состояние, на основании принятых допущений о размерах поперечных сечений слоев (h_m, b_m) с приемлемой для инженерных приложений точностью можно считать, что в полках реализуется одноосное напряженное состояние. Предполагается, что механическое поведение материалов слоев описывается определяющими соотношениями нелинейно-наследственной теории ползучести Ю.Н. Работнова [8, 9], которые с учетом статической гипотезы теории Тимошенко ($\sigma_{22}^{(m)} \approx 0$) имеют следующий вид [17]:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} g_*^{(m)}(\varepsilon_*^{(m)}) (\varepsilon_{11}^{(m)} - \varepsilon_0^{(m)}) &= \sigma_{11}^{(m)}(t) + \\ &+ \int_0^t K_*^{(m)}(t-\tau) \sigma_{11}^{(m)}(\tau) d\tau; \\ g_*^{(0)}(\varepsilon_*^{(0)}) \varepsilon_{12}^{(0)} &= \sigma_{12}^{(0)}(t) + \int_0^t K_*^{(0)}(t-\tau) \sigma_{12}^{(0)}(\tau) d\tau, \\ &-M^{(-)} \leq m \leq M^{(+)}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_*^{(m)} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3(\varepsilon_{11}^{(m)} - \varepsilon_0^{(m)})^2 + 4\delta_{0m} \varepsilon_{12}^{(m)2}}; \\ \varepsilon_0^{(m)} &= \frac{\sigma_{11}^{(m)}}{9K^{(m)}}; \quad K^{(m)} = \frac{E^{(m)}}{3(1-2\nu^{(m)})}; \end{aligned} \quad (7)$$

$\sigma_{ij}^{(m)}, \varepsilon_{ij}^{(m)}$ — компоненты тензоров напряжений и деформаций в m -м слое; $g_*^{(m)}(\varepsilon_*^{(m)})$ — заданная функция, являющаяся при умножении на $3/2$ коэффициентом пропорциональности между интенсивностями напряжений $\sigma_*^{(m)}$ и деформаций $\varepsilon_*^{(m)}$ в материале m -го слоя; $E^{(m)}, \nu^{(m)}$ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала m -го слоя; $K_*^{(m)}(t-\tau)$ — известные разностные ядра ползучести для компонент тензора-девиатора напряжений в m -м слое (см. (1) в [17]); δ_{0m} — символ Кронекера.

Соотношения (6), (7) получены с учетом того, что в каждом слое $\sigma_{13}^{(m)} = \sigma_{23}^{(m)} = \sigma_{33}^{(m)} = 0, \sigma_{22}^{(m)} \approx 0$, и в традиционном предположении о том, что связь между шаровыми тензорами напряжений и деформаций является линейно-упругой [8, 9]. Равенства (6), (7) существенно упрощаются, если сжимаемость материалов не учитывается (т. е. при $K^{(m)} \rightarrow \infty, \varepsilon_0^{(m)} \rightarrow 0$).

Определяющие соотношения (6) удовлетворительно описывают нелинейно-наследственное поведение слоев не только из полимерных материалов [8, 9, 18], но и упругопластическую наследственность некоторых металлов на стадии их активного нагружения [8, 19, 20]. Ядра ползучести в (6) предполагаются слабосингулярными, т. е. имеют вид [8, 9, 20]:

$$K_*^{(m)}(t) = t^{-\alpha_m} B_*^{(m)}(t), \quad 0 \leq \alpha_m < 1, -M^{(-)} \leq m \leq M^{(+)}, \quad (8)$$

где $B_*^{(m)}(t)$ — регулярные функции (возможно, постоянные).

Для моделирования нелинейно-наследственного поведения слоистых балок нерегулярной структуры используем метод шагов по времени [1, 8, 10 и др.], т. е. решение рассматриваемой задачи будем разыскивать в дискретные моменты времени, причем предполагается, что в моменты времени t_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) решение уже известно, т. е. известны значения величин

$$\begin{aligned} \sigma_{li}^{(m)} \equiv \sigma_{li}^{(m)}(t_k), \quad \varepsilon_{li}^{(m)} \equiv \varepsilon_{li}^{(m)}(t_k), \quad i = 1, 2, \\ -M^{(-)} \leq m \leq M^{(+)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (9)$$

Используя равенства (6)–(8), подстроим определяющие соотношения для m -го слоя в следующий момент времени $t_{n+1} = t_n + \Delta_{n+1}$, где Δ_{n+1} — шаг по времени (возможно, переменный).

Аппроксимируем в (6) с учетом (8), (9) функции $B_*^{(m)}(t_{n+1} - \tau) \sigma_{li}^{(m)}(\tau)$ на интервале $\tau \in [t_n, t_{n+1}]$ по линейному закону [21], тогда после несложных вычислений в момент времени t_{n+1} получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(m)} = a_{11}^{n+1} \varepsilon_{11}^{n+1} + p_{11}^{n+1}, \quad \sigma_{12}^{(m)} = a_{12}^{n+1} \varepsilon_{12}^{n+1} + p_{12}^{n+1}, \\ -M^{(-)} \leq m \leq M^{(+)}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} a_{li}^{n+1} \left(\varepsilon_*^{(m)} \right) &\equiv \frac{3}{2} z_{li}^{n+1} \left(\varepsilon_*^{(m)} \right) g_*^{(m)} \left(\varepsilon_*^{(m)} \right); \\ a_{12}^{n+1} \left(\varepsilon_*^{(0)} \right) &\equiv z_{12}^{n+1} g_*^{(0)} \left(\varepsilon_*^{(0)} \right); \\ p_{11}^{n+1} \left(\varepsilon_*^{(m)} \right) &\equiv -z_{11}^{n+1} \left(\varepsilon_*^{(m)} \right) s_{11}^{(m)}, \quad p_{12}^{n+1} \equiv -z_{12}^{n+1} s_{12}^{(0)}; \\ s_{li}^{n+1} &\equiv \chi_n^{n+1} \sigma_{li}^{(m)} + \sum_{k=0}^n \left(\gamma_k^{n+1} \sigma_{li}^{k+1} + \chi_k^{n+1} \sigma_{li}^{(m)} \right); \\ z_{11}^{n+1} \left(\varepsilon_*^{(m)} \right) &\equiv \left[1 + \gamma_n^{n+1} + \frac{1}{9K^{(m)}} g_*^{(m)} \left(\varepsilon_*^{(m)} \right) \right]^{-1}; \\ z_{12}^{n+1} &\equiv \left(1 + \gamma_n^{(0)} \right)^{-1}; \\ \gamma_k^{n+1} &\equiv \frac{B_*^{(m)}(t_{n+1} - t_{k+1})}{t_{k+1} - t_k} \left[T_{k,2}^{n+1} - (t_{n+1} - t_k) T_{k,1}^{n+1} \right]; \\ \chi_k^{n+1} &\equiv \frac{B_*^{(m)}(t_{n+1} - t_k)}{t_{k+1} - t_k} \left[(t_{n+1} - t_{k+1}) T_{k,1}^{n+1} - T_{k,2}^{n+1} \right]; \\ T_{k,l}^{n+1} &\equiv \frac{1}{l - \alpha_m} \left[(t_{n+1} - t_{k+1})^{l - \alpha_m} - (t_{n+1} - t_k)^{l - \alpha_m} \right], \\ &i, l = 1, 2. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, равенства (10) в рассматриваемый момент времени t_{n+1} можно трактовать как определяющие соотношения для материала m -го слоя балки, механическое поведение которого формально подчиняется зависимостям нелинейно-упругого изотропного тела с начальным напряженным состоянием, которое характеризуется величинами $p_{11}^{n+1}, p_{12}^{n+1}$.

Линеаризуем соотношения (10), предполагая, что левые части равенств (6) с учетом (7) удовлетворяют достаточным условиям сходимости метода секущего модуля (см. с. 199 в [22]), т. е. предполагаем, что в момент времени t_{n+1} в равенствах (11) в каждой точке каждого слоя балки известны величины $\varepsilon_*^{(m)}$ (см. (7)) из решения рассматриваемой задачи на предыдущей итерации.

На основании линеаризованных равенств (10) с учетом соотношений (3), (5), (11) в момент времени t_{n+1} на текущей итерации метода секущего модуля можем вычислить соответствующие приближения для всех внутренних силовых факторов в балке:

$$\begin{aligned} F_{11}^{n+1}(x_1) &= A_{11}^{n+1} \partial_1 u_1^0(x_1) - B_{11}^{n+1} \partial_1^2 u_2^0(x_1) + \\ &+ 2B_{11}^{n+1} \partial_1 \varepsilon_{12}^0(x_1) + F_{11}^0(x_1); \\ M_{11}^{n+1}(x_1) &= B_{11}^{n+1} \partial_1 u_1^0(x_1) - D_{11}^{n+1} \partial_1^2 u_2^0(x_1) + \\ &+ 2D_{11}^{n+1} \partial_1 \varepsilon_{12}^0(x_1) + M_{11}^0(x_1); \\ F_{12}^{n+1}(x_1) &= A_{12}^{n+1} \varepsilon_{12}^0(x_1) + F_{12}^0(x_1), \quad 0 \leq x_1 \leq L, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} F_{li}^{n+1}(x_1) &= \iint_S \sigma_{li}^{n+1} dS = \sum_{m=M^{(-)}}^{M^{(+)}} \iint_{S_m} \sigma_{li}^{(m)} dS \quad (i=1, 2); \\ M_{11}^{n+1}(x_1) &= \iint_S \sigma_{11}^{n+1} x_2 dS = \sum_{m=M^{(-)}}^{M^{(+)}} \iint_{S_m} \sigma_{11}^{(m)} x_2 dS; \\ A_{11}^{n+1}(x_1) &= b_0 \int_{-h}^h a_{11}^{(0)} dx_2 + \sum_{m=M^{(-)}}^{M^{(+)}} (1 - \delta_{0m}) b_m h_m a_{11}^{(m)}; \\ B_{11}^{n+1}(x_1) &= b_0 \int_{-h}^h a_{11}^{(0)} x_2 dx_2 + \sum_{m=M^{(-)}}^{M^{(+)}} \text{sign}(m) b_m h_m x_2^{(m)} a_{11}^{(m)}; \\ D_{11}^{n+1}(x_1) &= b_0 \int_{-h}^h a_{11}^{(0)} x_2^2 dx_2 + \\ &+ \sum_{m=M^{(-)}}^{M^{(+)}} (1 - \delta_{0m}) b_m h_m (x_2^{(m)})^2 a_{11}^{(m)}; \\ A_{12}^{n+1}(x_1) &= b_0 \int_{-h}^h a_{12}^{(0)} dx_2, \quad F_{12}^0(x_1) = b_0 \int_{-h}^h p_{12}^{(0)} dx_2; \\ F_{11}^0(x_1) &= b_0 \int_{-h}^h p_{11}^{(0)} dx_2 + \\ &+ \sum_{m=M^{(-)}}^{M^{(+)}} (1 - \delta_{0m}) b_m h_m p_{11}^{(m)}(x_1, x_2^{(m)}); \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} M_{11}^0(x_1) &= b_0 \int_{-h}^h p_{11}^{(0)} x_2 dx_2 + \\ &+ \sum_{m=M^{(-)}}^{M^{(+)}} \text{sign}(m) b_m h_m x_2^{(m)} p_{11}^{(m)}(x_1, x_2^{(m)}), \end{aligned}$$

где $x_2^{(m)}$ — ордината центра тяжести поперечного сечения m -го слоя; S — общая площадь поперечного сечения стержня; S_m — площадь поперечного сечения m -го слоя стержня (в настоящей работе $S_m = b_m h_m$); F_{11}, F_{12} — продольная и поперечная силы соответственно; M_{11} — изгибающий момент.

При вычислении коэффициентов A_{11}, B_{11}, D_{11} и функций $F_{11}^0, F_{12}^0, M_{11}^0$ (которые можно рассматривать как начальные силовые факторы в балке) интегралы по поперечным сечениям полок ($m \neq 0$) определялись приближенно по правилу средней точки, т. е. в пределах m -го слоя приближенно

принималось, что $\sigma_{11}^{(m)}(x_1, x_2) x_2^l = \sigma_{11}^{(m)}(x_1, x_2^{(m)}) (x_2^{(m)})^l$, $l = 0, 1, 2$, $H_{m-1} \leq x_2 < H_m$, $m \neq 0$ (где H_m — ордината границы между m -м и $(m+1)$ -м слоями).

При квазистатическом нагружении балки силовые факторы должны удовлетворять уравнениям равновесия [13, 16]:

$$\begin{aligned} \partial_1 F_{11}(x_1, t) &= -p_1(x_1, t); \quad \partial_1 F_{12}(x_1, t) = q(x_1, t); \\ \partial_1 M_{11}(x_1, t) &= F_{12}(x_1, t) - m_1(x_1, t), \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где p_1, q — распределенные продольная и поперечная приведенные нагрузки (положительное направление для q выбрано так, как изображено на рисунке 1); m_1 — распределенный внешний изгибающий момент.

Для однозначного интегрирования рассматриваемой задачи необходимо использовать соответствующие граничные условия. Например, если в сечении $x_1 = x_1^*$ задана неподвижная шарнирная опора (см. левую опору на рисунке 1 а), то

$$u_1^0(x_1^*, t) = 0; \quad u_2^0(x_1^*, t) = 0; \quad M_{11}(x_1^*, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (15)$$

При задании подвижной шарнирной опоры (см. правую опору на рисунке 1 а) имеем:

$$u_2^0(x_1^*, t) = 0; \quad F_{11}(x_1^*, t) = 0; \quad M_{11}(x_1^*, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (16)$$

Если в сечении $x_1 = x_1^*$ задана жесткая заделка (см. левый конец балки на рисунке 1 б), то, согласно (1) и (4),

$$\begin{aligned} u_1^0(x_1^*, t) &= 0; \quad u_2^0(x_1^*, t) = 0; \quad \partial_1 u_2^0(x_1^*, t) - \\ &- 2\varepsilon_{12}^0(x_1^*, t) = 0, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (17)$$

В случае свободного конца балки (см. правое сечение балки на рисунке 1 б) имеем:

$$F_{11}(x_1^*, t) = 0; \quad F_{12}(x_1^*, t) = 0; \quad M_{11}(x_1^*, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (18)$$

(Возможно задание и других, более сложных, типов граничных условий [16]).

В настоящем исследовании ограничимся рассмотрением механического поведения только статически определимых балок (хотя это и не принципиально). В этом случае левые части в равенствах (12) — заранее известные функции переменной x_1 . В частности, для равномерно нагруженной в поперечном направлении ($p_1 = 0, m_1 = 0$) двухопорной балки (см. рисунок 1 а) на основании (14)–(16) силовые факторы в дискретные моменты времени определяются так [13]:

$$\begin{aligned} F_{11}^{n+1}(x_1) &\equiv 0; & F_{12}^{n+1}(x_1) &= q(t_{n+1})(x_1 - L/2); \\ M_{11}^{n+1}(x_1) &= q(t_{n+1})x_1(x_1 - L)/2; \end{aligned} \quad (19)$$

при равномерном же нагружении консольной балки (см. рисунок 1 б) из (14), (18) при $p_1 = 0, m_1 = 0$ имеем:

$$\begin{aligned} F_{11}^{n+1}(x_1) &\equiv 0; & F_{12}^{n+1}(x_1) &= q(t_{n+1})(x_1 - L); \\ M_{11}^{n+1}(x_1) &= q(t_{n+1})(L - x_1)^2/2, & 0 \leq x_1 \leq L. \end{aligned} \quad (20)$$

Согласно (13) равенства (12) с учетом (19), (20) в момент времени t_{n+1} на текущей s -й итерации метода секущего модуля представляют собой замкнутую систему разрешающих линейных дифференциальных уравнений относительно s -х приближений

неизвестных функций $u_1^{n+1}(x_1), u_2^{n+1}(x_1), \varepsilon_{12}^{n+1}(x_1)$. Соответствующий итерационный процесс реализуется следующим образом. Предположим, что на предыдущей r -й итерации ($r = s - 1$) известны функции

$u_1^0, u_2^0, \varepsilon_{12}^0$ и $\sigma_{1i}^{(m)}$, тогда, согласно формулам (3), (5), (7), известны r -ые приближения интенсивностей

деформаций $\varepsilon_*^{(m)}$ во всех точках балки. Далее, на основании (13) можем определить r -ые приближения

коэффициентов $A_{11}^{n+1}, B_{11}^{n+1}, D_{11}^{n+1}, A_{12}^{n+1}$ и функций $F_{11}^{n+1}(x_1), M_{11}^{n+1}(x_1)$. (Функция $F_{12}^{n+1}(x_1)$ от номера итерации не зависит.) Решение линейной системы (12) на текущей s -й итерации получается следующим образом: из третьего равенства (12) с учетом (19) или (20) имеем:

$$\varepsilon_{12}^{n+1}(x_1) = \frac{1}{A_{12}^{n+1}} \left(F_{12}^{n+1}(x_1) - F_{12}^0(x_1) \right), \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad (21)$$

после чего при известном s -м приближении функции

$\varepsilon_{12}^{n+1}(x_1)$ из первых двух равенств (12) как из системы линейных алгебраических уравнений определяем

s -ые приближения производных $\partial_1 u_1^{n+1}, \partial_1^2 u_2^{n+1}$ ($0 \leq x_1 \leq L$). Интегрируя эти функции требуемое число раз с учетом соответствующих кинематических граничных условий (15)–(17), получим s -ые

приближения разыскиваемых функций $u_1^{n+1}(x_1), u_2^{n+1}(x_1)$.

Аналогично строится решение на следующей $(s + 1)$ -й итерации и т. д., пока метод переменных параметров упругости не сойдется с требуемой точностью.

При исследовании поведения двухопорной балки (см. рисунок 1 а) необходимо использовать кинематические граничные условия, приведенные в (15), (16), а при изучении консольной балки (см. рисунок 1 б) — граничные условия (17), где значе-

ние деформации $\varepsilon_{12}^{n+1}(0)$ определено из (21) при $x_1 = 0$.

Если в момент времени t_{n+1} итерационный процесс метода секущего модуля сошелся с требуемой точностью, т. е. в каждой точке балки извест-

ны деформации ε_{1i}^{n+1} и, согласно (10), напряжения

$\sigma_{1i}^{(m)}$ ($i = 1, 2, -M^{(-)} \leq m \leq M^{(+)}$), то все величины, указанные в (9), становятся известными в каждой точке слоистой балки в этот момент времени. Повторяя проведенные выше рассуждения, можем получить решение рассматриваемой задачи для следующего момента времени t_{n+2} и т. д. Предполагаем, что до начального момента времени $t = t_0 = 0$ балка находилась в естественном состоянии, т. е. $\sigma_{1i}^{(m)} \equiv 0, \varepsilon_{1i}^{(m)} \equiv 0$ при $t \leq t_0$ (что соответствует нижним пределам интегралов в правых частях соотношений (6)). Следовательно, при $k = 0$ все величины в (9) равны нулю, а значит, по описанной выше схеме в дискретные моменты времени можно последовательно получить решение рассматриваемой задачи о неустановившейся ползучести слоистой балки нерегулярной структуры, изготовленной из материалов, механическое поведение которых подчиняется нелинейно-наследственной теории ползучести Ю.Н. Работнова.

Обсуждение результатов расчетов. В качестве конкретных примеров исследуем особенности механического поведения в условиях ползучести трех- и пятислойных однородных и металлокомпозитных балок, изображенных на рисунке 1 и имеющих длину $L = 2$ м. Слои балок изготовлены из алюминиевого сплава Д16Т или стали марки 11Н8М18К14Т. Внешняя поперечная нагрузка q условно прикладывается в виде функции класса Хевисайда:

$$q(t) = q_0 \times \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0, \\ 1 & \text{при } t > 0, \end{cases} \quad q_0 = \text{const} > 0; \quad (22)$$

другие нагрузки отсутствуют ($p_1 = 0, m_1 = 0$); температура балок $\Theta = 200$ °С.

Так как указанная температура существенно ниже половины температуры плавления стали марки 11Н8М18К14Т, то ее ползучестью можно пренебречь [23]. При этом механическое поведение стальных слоев предполагается линейно-упругим с характеристиками [24] (см. (6), (7)):

$$\begin{aligned} K_*^{(m)}(t) &\equiv 0, & g_*^{(m)} &= E^{(m)} / (1 + \nu^{(m)}) = \text{const}, \\ E^{(m)} &= 210 \text{ ГПа}, & \nu^{(m)} &= 0,3, & \sigma_{0,2}^{(m)} &= 3400 \text{ МПа}, \end{aligned} \quad (23)$$

где $\sigma_{0,2}^{(m)}$ — условный предел текучести стали 11Н8М18К14Т.

Для алюминиевого сплава Д16Т нелинейно-наследственное поведение при $\Theta = 200$ °С задается следующими соотношениями [20] (см. (6)–(8)):

$$g_*^{(m)}(\varepsilon_*^{(m)}) = \frac{2}{3} A_*^{(m)} (\varepsilon_*^{(m)})^{\mu_m - 1};$$

$$B_*^{(m)} = b_*^{(m)} (1 - \alpha_m) = \text{const}, \quad E^{(m)} = 64 \text{ ГПа}, \quad (24)$$

$$v^{(m)} = 0,31, \quad A_*^{(m)} = 30,55 \text{ ГПа},$$

$$b_*^{(m)} = 0,119 \text{ ч}^{1-\alpha_m}, \quad \alpha_m = 0,635, \quad \mu_m = 0,87.$$

Податливость рассматриваемых балок будем оценивать величиной

$$u_2^*(t) = \min_{0 \leq x_1 \leq L} u_2^0(x_1, t), \quad (25)$$

а для сравнения расчетных значений податливости балок, полученных на основе классической и неклассической теорий, используем величину

$$\delta u_2(t) = \frac{u_2^T(t) - u_2^B(t)}{u_2^T(t)} \cdot 100 \%, \quad (26)$$

где u_2^T — значение величины $|u_2^*|$, определенное в момент времени t по теории Тимошенко; u_2^B — значение $|u_2^*|$, вычисленное по классической теории Бернулли (решение по этой теории получается, если в соотношениях (3)–(5), (12), (17) принять $\varepsilon_{12}^0 \equiv 0$).

В случае двухопорной балки (см. рисунок 1 а) согласно (25) $u_2^*(t) = u_2^0(L/2, t)$, а для консольной балки (см. рисунок 1 б) $u_2^*(t) = u_2^0(L, t)$.

Поперечные сечения исследуемых трехслойных ($M^{\pm} = 1$) алюминиевых балок (см. рисунок 2 б) определяются следующими размерами:

$$h_0 = 183,2 \text{ мм}, \quad b_0 = 5,2 \text{ мм},$$

$$h_1 = h_{-1} = 8,4 \text{ мм}, \quad b_1 = b_{-1} = 100 \text{ мм}, \quad (27)$$

которые соответствуют характерным размерам поперечного сечения двутаврового прокатного профиля № 20 [13].

Пятислойные же ($M^{\pm} = 2$) металлокомпозитные конструкции представляют собой двутавровые алюминиевые балки прежних размеров (см. (27)), к полкам которых сверху и снизу прикреплены стальные слои следующих поперечных размеров (поперечное сечение таких конструкций изображено на рисунке 2 в):

$$h_2 = h_{-2} = h_1 = h_{-1} = 8,4 \text{ мм}; \quad b_2 = b_{-2} = \text{const} \geq 0, \quad (28)$$

т. е. толщина стальных накладок равна толщине полки базовой трехслойной алюминиевой балки, а ширина стальных полки варьируется, что позволяет изучить эффект усиления металлокомпозитных балок. Для удобства дальнейшего изложения введем в рассмотрение безразмерную величину

$$\beta = b_2/b_1 = b_{-2}/b_{-1} = \text{const} \geq 0, \quad (29)$$

которая согласно (27), (28) определяет отношение площадей поперечных сечений усиливаю-

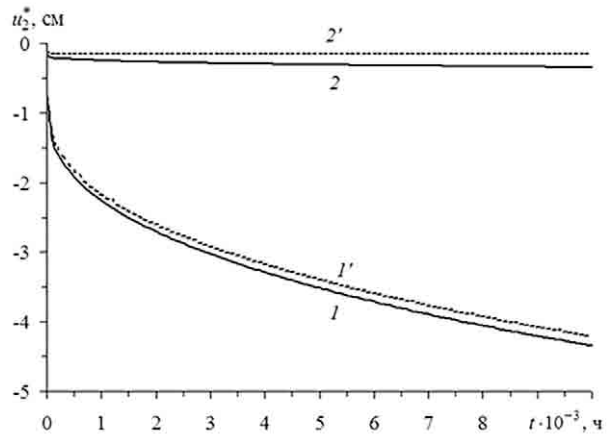


Рисунок 3 — Зависимости прогибов концевых сечений однородных и металлокомпозитных консольных балок от времени, рассчитанные по разным теориям

щих стальных слоев (накладок) к аналогичным величинам полки алюминиевой базовой двутавровой балки.

На рисунке 3 приведены зависимости $u_2^*(t)$, рассчитанные для консольных балок (см. рисунок 1 б) при нагрузке $q_0 = 5$ кН/м (см. (22)). Сплошные кривые на рисунке 3 (как и на рисунках 4, 5) рассчитаны по теории Тимошенко, а штриховые линии, номера которых помечены штрихом, определены при тех же условиях, но по классической теории. Кривые 1 и 1' на рисунке 3 характеризуют неустойчивую ползучесть трехслойных однородных алюминиевых балок ($\beta = 0$; см. (29) и рисунок 2 б), а линии 2 и 2' — пятислойных металлокомпозитных балок при $\beta = 2$ (см. рисунок 2 в). Сопоставление кривых 1 и 1' свидетельствует о том, что расчет ползучести трехслойных однородных алюминиевых балок заданных размеров (см. (27)) вполне можно проводить в рамках классической теории Бернулли, так как величина ошибки этой теории по податливости (см. (26)) составляет: $\delta u_2 = 4,9$ % при $t = 0$ и $\delta u_2 = 3,2$ % при $t = 10^4$ ч, т. е. не превышает традиционной инженерной 5 % точности.

Однако сравнение кривых 2 и 2' показывает, что в случае балок, усиленных стальными несущими

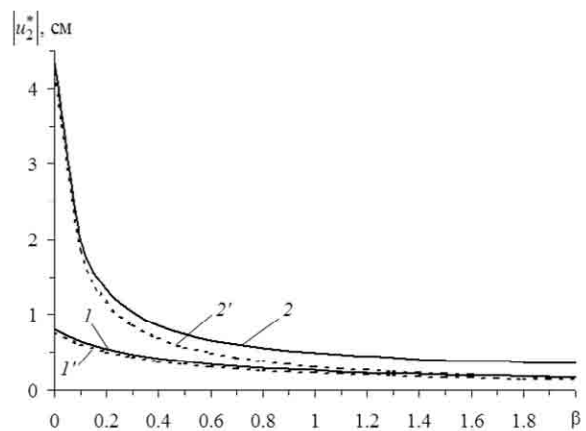


Рисунок 4 — Зависимости максимальных по модулю прогибов металлокомпозитных консольных балок от параметра упрочнения несущих слоев

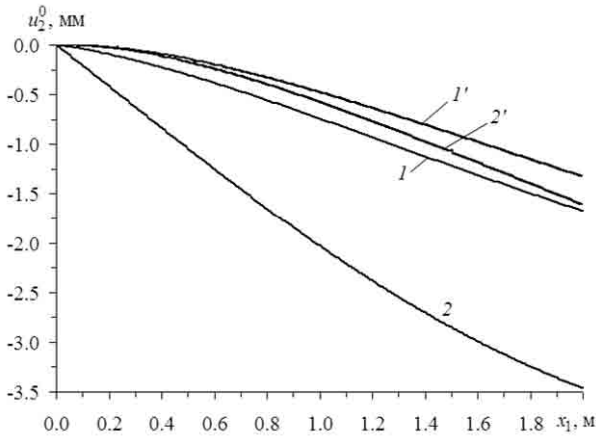


Рисунок 5 — Зависимости прогибов металлокомпозитной консольной балки от продольной координаты, рассчитанные по разным теориям для разных моментов времени

щими слоями, расчет податливости металлокомпозитных конструкций по классической теории становится неприемлемым как при кратковременном, так и при длительном нагружении: $\delta u_2 = 21\%$ при $t = 0$ и $\delta u_2 = 53,8\%$ при $t = 10^4$ ч, т. е. с течением времени податливость, определенная по классической теории, все более отличается от податливости, рассчитанной по уточненной теории. Даже если принять традиционное допущение, что 20 % точность расчетов ползучести является вполне приемлемой [8], то согласно поведению кривых 2 и 2' классическая теория вообще неприемлема для расчета рассматриваемых металлокомпозитных пятислойных балок при $\beta = 2$ (см. (29)). Объясняется это тем, что при столь значительном усилении несущих слоев механическое поведение балки определяется в основном деформацией поперечного сдвига алюминиевой стенки ($m = 0$), которую не учитывает классическая теория (подробнее см. ниже).

Аналогичные расчеты, проведенные для двухопорных балок (см. рисунок 1 а) при $q_0 = 40$ кН/м (см. (22)), показали (соответствующие кривые на рисунке 3 не изображены): для однородных трехслойных ($\beta = 0$) алюминиевых балок при $t = 0$ (кратковременное нагружение) величина $\delta u_2 = 10,8\%$, а при $t = 10^4$ ч (длительное нагружение) $\delta u_2 = 9,9\%$; для металлокомпозитных пятислойных балок при $\beta = 2$: в начальный момент времени $t = 0$ величина $\delta u_2 = 42,9\%$, а при $t = 10^4$ ч относительная ошибка $\delta u_2 = 77,6\%$. (При этом прогибы u_2^0 по модулю оставались малыми и не превышали $1/5$ высоты балки). Следовательно, в случае двухопорных балок точность классической теории еще хуже, чем при расчетах консольных балок. При этом теория Бернулли уже не обеспечивает 5 % точности расчетов по податливости не только при длительном, но и при кратковременном нагружении однородных трехслойных алюминиевых балок двутаврового поперечного сечения (см. (27)).

Кривые 2 и 2' на рисунке 3 лежат существенно выше линий 1 и 1', что свидетельствует

о значительном эффекте усиления алюминиевых балок при использовании достаточно широких стальных внешних несущих слоев: при $\beta = 2$ согласно (29) ширина стальных накладок $b_{\pm 2} = 200$ мм, т. е. равна высоте двутавровой балки № 20 (см. [13]). В связи с этим целесообразно проследить за изменением величины $|u_2^0|$ (т. е. податливости) в зависимости от параметра β , т. е. согласно (29) — в зависимости от относительной ширины усиливающих стальных слоев. На рисунке 4 изображены эти зависимости, рассчитанные для консольных пятислойных металлокомпозитных балок (см. рисунок 1 б) при $q_0 = 5$ кН/м. (Качественно аналогичные зависимости получаются и для двухопорных металлокомпозитных балок (см. рисунок 1 а) при $q_0 = 40$ кН/м. На рисунке 4 они не изображены, чтобы не загромождать его). Кривые 1 и 1' на рисунке 4 определены при $t = 0$ (кратковременное нагружение), а линии 2 и 2' — при $t = 10^4$ ч (длительное нагружение).

Все кривые на рисунке 4 монотонно убывают, что свидетельствует об эффекте усиления рассматриваемых балок как при кратковременном, так и при длительном их нагружении. Однако изменимость кривых 2 и 2' существенно больше, чем кривых 1 и 1', т. е. эффект усиления в значительно большей степени сказывается при работе балки в условиях длительного нагружения. С увеличением параметра β (см. (29)) все кривые на рисунке 4 выполаживаются, т. е. с увеличением β эффект усиления балок ослабевает. Так, при характеристиках материалов (23), (24), согласно поведению кривой 2, при $t = 10^4$ ч податливость консольной балки (см. (25)) уменьшается в 5,1 раза при увеличении β от нуля до значения 0,4 и всего в 2,5 раза при увеличении β от 0,4 до 2,0 (при этом объем усиливающих стальных слоев согласно (29) увеличивается в 5 раз). Следовательно, в этом случае целесообразно ставить вопрос о рациональном сочетании надежной работы металлокомпозитной балки (например, по критерию ее податливости) с экономичностью расхода материала в ней.

Согласно поведению кривых 1 и 1' на рисунке 4, разность ординат их точек ($|u_2^T| - |u_2^B|$) практически не зависит от параметра β . Однако в силу того, что эти линии монотонно убывают, относительная ошибка (26) с увеличением параметра β монотонно возрастает. Аналогично поведение кривых 2 и 2' свидетельствует о том, что и при $t = 10^4$ ч с увеличением β возрастает ошибка (26) расчета податливости слоистой конструкции при использовании классической теории, которая (ошибка) при $\beta = 2$ превышает 50 % (а для двухопорных балок — 75 %).

Чтобы объяснить причину, почему с увеличением β при длительном нагружении металлокомпозитных балок точность расчетов по классической теории резко ухудшается, рассмотрим эпюры

прогибов $u_2^0(x_1, t)$ таких балок, рассчитанные в разные моменты времени t .

Так, на рисунке 5 приведены зависимости $u_2^0(x_1, t)$ ($0 \leq x_1 \leq L$), определенные для консольной металлокомпозитной балки при параметре $\beta = 2$ в начальный момент времени (кривые 1 и 1') и при $t = 10^4$ ч (линии 2 и 2').

Кривые 1, 1' и 2' на рисунке 5 качественно подобны, причем линии 1' и 2' при $x_1 = 0$ имеют горизонтальные касательные, что является следствием отсутствия поперечных сдвиговых деформаций в рамках расчетов, выполненных по классической теории. Кривая же 2 на рисунке 5 отличается от остальных линий не только количественно, но и качественно: она имеет кривизну другого знака. Поведение кривой 2 в окрестности опорного сечения ($x_1 \approx 0$) свидетельствует о том, что, согласно теории Тимошенко, в стенке металлокомпозитной балки при ее длительном нагружении накапливаются значительные деформации поперечного сдвига. Линия же 1 качественно подобна кривым 1' и 2', причем ее поведение в окрестности заделки ($x_1 \approx 0$) показывает, что при кратковременном нагружении ($t = 0$) поперечные сдвиги в стенке такой балки незначительны, поэтому-то, согласно поведению линий 1 и 1', величина (26) при $t = 0$ имеет относительно небольшое значение ($\delta u_2 = 21\%$). Согласно же поведению кривых 2 и 2', при $t = 10^4$ ч величина (26) имеет достаточно большое значение ($\delta u_2 = 53,8\%$). Последнее свидетельствует о том, что при длительном нагружении рассматриваемой металлокомпозитной балки ее прогибы развиваются в основном за счет накопления деформации поперечного сдвига стенки.

Заключение. Проведенный анализ решений изгибного деформирования балок, рассчитанных по классической и уточненной теориям, показывает, что теория Бернулли при исследовании неустановившейся ползучести может приводить к совершенно неприемлемым результатам, занижая податливость металлокомпозитных слоистых балок нерегулярной структуры на десятки процентов и даже в разы. Кроме того, классическая теория может оказаться непригодной даже в случаях расчетов однородных металлических балок, имеющих двутавровое поперечное сечение унифицированного прокатного профиля. Для получения же адекватных результатов расчетов механического поведения слоистых балок, работающих в условиях длительного нагружения, необходимо использовать неклассическую теорию Тимошенко, учитывающую ослабленное сопротивление тонких стенок таких балок поперечному сдвигу. На основании этого установлено, что при рациональном и оптимальном проектировании металлокомпозитных балок нерегулярной слоистой структуры, работающих в условиях ползучести, целесообразно не только усиливать несущие слои

(полки), как это традиционно принято считать [7], но и стенки этих балок.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 14-01-00102-а).

Список литературы

1. Карпов, В.В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения: в 2 ч. / В.В. Карпов. — М.: Физматлит, 2010. — Ч. 1: Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. — 288 с.
2. Casanova, P. Analysis of metallic fibre-reinforced concrete beams submitted to bending / P. Casanova, P. Rossi // *Matér. Construct.* — 1966. — Vol. 29. — Pp. 354–361.
3. Purkiss, J.A. Comparison between the short and long term behaviour of fibre reinforced and unreinforced beams / J.A. Purkiss, P. Blagojević // *Composite Struct.* — 1993. — Vol. 25. — Pp. 45–49.
4. Arduini, M. Brittle failure in FRP plate and sheet bonded beams / M. Arduini, A. Di Tommaso, A. Nanni // *ACI Structural J.* — 1997. — Vol. 94, No. 4. — Pp. 363–370.
5. Chen, J.F. Shear capacity of FRP strengthened RC beams: FRC debonding / J.F. Chen, J.G. Teng // *Construction and Building Materials.* — 2003. — Vol. 17, No. 1. — Pp. 27–41.
6. Jumaat, M.Z. Problems associated with plate bonding methods of strengthening reinforced concrete beams / M.Z. Jumaat, M.A. Alam // *J. of Appl. Sci. Res.* — 2006. — Vol. 2, No. 10. — Pp. 703–708.
7. Немировский, Ю.В. Рациональное и оптимальное проектирование слоистых стержневых систем / Ю.В. Немировский, А.В. Мищенко, И.Т. Вохмянин. — Новосибирск: НГАСУ, 2004. — 488 с.
8. Работнов, Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работнов. — М.: Наука, 1966. — 752 с.
9. Работнов, Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел / Ю.Н. Работнов. — М.: Наука. Физматгиз, 1977. — 384 с.
10. Карпов, В.В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения: в 2 ч. / В.В. Карпов. — М.: Физматлит, 2011. — Ч. 2: Вычислительный эксперимент при статическом механическом воздействии. — 248 с.
11. Chami, G.A. Creep behaviour of CFRP-strengthened reinforced concrete beams / G.A. Chami, M. Theriault, K.W. Neale // *Construction and Building Materials.* — 2009. — Vol. 23, No. 4. — Pp. 1640–1652.
12. Мищенко, А.В. Ползучесть однородных и слоистых рам на основе трехкомпонентной модели / А.В. Мищенко, Ю.В. Немировский // *Изв. вузов. Строительство.* — 2009. — № 5. — С. 16–24.
13. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов: учеб. для вузов. — 9-е изд., перераб. / В.И. Феодосьев. — М.: Наука, 1986. — 512 с.
14. Янковский, А.П. Исследование установившейся ползучести слоистых металлокомпозитных балок с учетом ослабленного сопротивления поперечному сдвигу / А.П. Янковский // *Теоретич. и прикл. механика: междунар. науч.-техн. сб.* — 2016. — Вып. 31. — С. 168–175.
15. Юзиков, В.П. Строительная механика тонкостенных стержней / В.П. Юзиков, Н.Н. Панасенко. — Волгоград: Волгоградское науч. изд-во, 2013. — 361 с.
16. Перельмутер, А.В. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы: в 2 т. / А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер — М.: Изд-во СКАД СОФТ, 2007. — Т. 1. — 670 с.
17. Янковский, А.П. Анализ ползучести армированных балок-стенок из нелинейно-наследственных материалов в рамках второго варианта теории Тимошенко / А.П. Янковский // *Механика композиционных материалов и конструкций.* — 2014. — Т. 20, № 3. — С. 469–489.
18. Goldhoff, R.M. The application of Rabotnov's creep parameter / R.M. Goldhoff // *Proc. ASTM.* — 1961. — Vol. 61.
19. Turner, F.H. A study of the applicability of Rabotnov's creep parameter for aluminium alloy / F.H. Turner, K.E. Blomquist // *JAS.* — 1956. — Vol. 23, No 12.
20. Никитенко, А.Ф. Ползучесть и длительная прочность металлических материалов / А.Ф. Никитенко. — Новосибирск: НГАСУ, 1997. — 278 с.

21. Бахвалов, Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения) / Н.С. Бахвалов. — М.: Наука, 1973. — 631 с.
22. Ильюшин, А.А. Труды / А.А. Ильюшин, сост. Е.А. Ильюшина, В.Г. Тунгусова. — М.: Физматлит, 2007. — Т. 3: Теория термовязкоупругости. — 288 с.
23. Хажинский, Г.М. Модели деформирования и разрушения металлов / Г.М. Хажинский. — М: Науч. мир, 2011. — 231 с.
24. Композиционные материалы: справ. / под ред. Д.М. Карпиноса. — Киев: Наук. думка, 1985. — 592 с.

YANKOVSKIY Andrei P., D. Sc. in Phys.-Math.

Leading Research Scientist of Laboratory of Fast Processes Physics

E-mail: yankovsky_ap@rambler.ru

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics the Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Novosibirsk, Russia

Received 07 April 2016.

UNSTEADY CREEP OF LAYERED RODS OF IRREGULAR STRUCTURE FROM NONLINEAR-HEREDITARY MATERIALS

The unsteady creep of homogeneous and metal-composite beams with irregular layered structure is considered. Beams consist of thin walls and shelves attached to them at top and bottom (bearing layers). The walls and bearing layers made of homogeneous isotropic materials. The mechanical behavior of these materials is described by a nonlinear hereditary theory of creep (Yu. Rabotnov). On the basis of the hypotheses of the Timoshenko theory with involvement of the ideas of method of steps in time the problem is formulated for the inelastic flexural deformation of such beams with account of their weakened resistance of their walls to the transverse shear. It is shown that in discrete moments of time the mechanical behavior of these materials layers obeys formally the defining relations of nonlinear-elastic isotropic body with an initial stress state that is known. The secant modulus method is used for linearization of the task at each discrete time moment. Characteristics of the flexural behavior of three- and five-layer homogeneous and metal-composite beams under short- and long-term loading are studied. Statically determinate double-seat and cantilever beams are considered under the action of uniformly distributed transverse load of Heaviside type. It is found that the use of the classical theory of calculation of such beams leads to the prediction of unreasonably understated their flexibility, especially under creep conditions. In beams with reinforced bearing layers it is shown that the creep mainly develops due to the shear strain which actively accumulates in the walls of such structures.

Keywords: unsteady creep, laminated beams, nonlinear strain, inelastic deformation, Timoshenko theory

References

1. Karpov V.V. *Prochnost' i ustoychivost' podkreplyennykh obolochek vrashcheniya. V 2 ch. Ch. 1. Modeli i algoritmy issledovaniya prochnosti i ustoychivosti podkreplyennykh obolochek vrashcheniya* [Strength and stability of the supported shells of rotation. In 2 parts. A part 1. Models and algorithms of research of strong and stability of the supported shells of rotation]. Moscow, Fizmatlit, 2010. 288 p.
2. Casanova P., Rossi P. *Analysis of metallic fibre-reinforced concrete beams submitted to bending*. Matér. Construct., 1966, vol. 29, pp. 354–361.
3. Purkiss J.A., Blagojević P. *Comparison between the short and long term behaviour of fibre reinforced and unreinforced beams*. Composite Struct., 1993, vol. 25, pp. 45–49.
4. Arduini M., Di Tommaso A., Nanni A. *Brittle failure in FRP plate and sheet bonded beams*. ACI Structural J., 1997, vol. 94, no 4, pp. 363–370.
5. Chen J.F., Teng J.G. *Shear capacity of FRP strengthened RC beams: FRC debonding*. Construction and Building Materials, 2003, vol. 17, no 1, pp. 27–41.
6. Jumaat M.Z., Alam M.A. *Problems associated with plate bonding methods of strengthening reinforced concrete beams*. J. of Appl. Sci. Res., 2006, vol. 2, no 10, pp. 703–708.
7. Nemirovskiy Yu.V., Mishchenko A.V., Vokhmianin I.T. *Racional'noe i optimal'noe proektirovanie sloistykh sterzhnevyykh sistem* [Rational and optimum designing of layered rod systems]. Novosibirsk, NSUCE Publ., 2004. 488 p.
8. Rabotnov Yu.N. *Polzuchest' elementov konstruktivnykh [Creep of structural elements]*. Moscow, Nauka Publ., 1966. 752 p.
9. Rabotnov Yu.N. *Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel* [Elements of hereditary mechanics of solids]. Moscow, Fizmatgiz, 1977. 384 p.
10. Karpov V.V. *Prochnost' i ustoychivost' podkreplyennykh obolochek vrashcheniya. V 2 ch. Ch. 2. Vychislitel'nyy eksperiment pri staticheskom mekhanicheskom vozdeystvii* [Strength and stability of the supported shells of rotation. In 2 parts. A part 2. Computing experiment at static mechanical load]. Moscow, Fizmatlit, 2011. 248 p.
11. Chami G.A., Theriault M., Neale K.W. *Creep behaviour of CFRP-strengthened reinforced concrete beams*. Construction and Building Materials, 2009, vol. 23, no 4, pp. 1640–1652.
12. Mishchenko A.V., Nemirovskiy Yu.V. *Polsuchest' odnorodnykh i sloistykh ram na osnove trekhkomponentnykh modeli [Creep of homogenous and layered frames based on three-multiplier model]*. Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo [News of higher educational institutions. Construction], 2009, no 5, pp. 16–24.
13. Feodosiev V.I. *Soprotivlenie materialov: uchebnik dlja vtuzov* [Resistance of materials: the textbook for technical colleges]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 512 p.
14. Yankovskii A.P. *Issledovanie ustanovivshiesya polzuchesti sloistykh metallokompozitnykh balok s uchedom oslablenogo soprotivleniya poperechnomu sdvigu* [Research of steady creep of layered metal-composite beams with account of their weakened resistance to the transverse shear]. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika: mezhdunarodnyy nauchno-tekhnicheskij*

- sbornik* [Theoretical and applied mechanics: the international scientific and technical collection], 2016, vol. 31, pp. 168–175.
15. Yuzikov V.P., Panasenko N.N. *Stroitel'naja mekhanika tonkostennykh sterzhnej* [Building mechanics of thin-walled rods]. Volgograd, Volgograd scientific Publ., 2013. 361 p.
 16. Perelmuter A.V., Slivker V.I. *Ustoichivost' ravnovesia konstrukcij i rodstvennye problemy. Tom 1* [Stability of balance of designs and related problems. That 1], Moscow, SKAD SOFT Publ., 2007. 670 p.
 17. Yankovskiy A.P. Analiz polzuchesti armirovannykh balok-stenok iz nelinejno-nasledstvennykh materialov v ramkakh vtorogo varianta teorii Timoshenko [Analysis of creep of reinforced beams-wall from nonlinear-hereditary materials within of the second variant of Tymoshenko theory]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstrukcij* [Mechanics of composite materials and designs], 2014, vol. 20, no 3, pp. 469–489.
 18. Goldhoff R.M. *The application of Rabotnov's creep parameter*. Proc. ASTM, 1961, vol. 61.
 19. Turner F.H. *A study of the applicability of of Rabotnov's creep parameter for aluminium alloy*. JAS, 1956, vol. 23, no. 12.
 20. Nikitemko A.F. *Polzuchest' i dlitel'naya prochnost' metallicheskih materialov* [Creep and creep rupture strength metallic materials]. Novosibirsk, NSUCE Publ., 1997. 278 p.
 21. Bakhvalov N.S. *Chislennyye metody (analiz, algebra, obyknovennyye differentsial'nyye uravneniya)* [Numerical methods (the analysis, algebra, the ordinary differential equations)]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 631 p.
 22. Ilyushin A.A. *Trudy. Tom 3. Teoriya termovyazkoprugosti* [Works. Vol. 3. The theory of thermo-visco-elastic]. Moscow, Fizmatlit, 2007. 288 p.
 23. Khazhinskiy G.M. *Modeli deformirovaniya i razrusheniya metallov* [Model of deformation and fracture of metals]. Moscow, Nauchny mir Publ., 2011. 231 p.
 24. Karpinos D.M. *Kompozitsionnye materialy. Spravochnik* [Composite materials. Reference Book]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1985. 592 p.