

УДК 539.374

Э.Г. МАМЕДГАСАНОВ, канд. физ.-мат. наук, доц.

E-mail: elxan_mg@rambler.ru

Азербайджанский Технический Университет, г. Баку, Азербайджан

Поступила в редакцию 09.03.2016.

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ В ТРЕХСОСТАВНОМ ВЯЗКОУПРУГОМ СТЕРЖНЕ

В работе получены точные аналитические решения задач о продольном ударе по тонкому, кусочно-однородному линейно вязкоупругому стержню, состоящему из трех частей с конечными длинами h_1 ($0 \leq x \leq l_1$), h_2 ($l_1 \leq x \leq l_2$) и полубесконечной длины ($l_2 \leq x < \infty$), которые соединены с жесткими контактными условиями, причем механические свойства указанных частей описываются линейными интегральными соотношениями с одинаковыми, произвольными разностными ядрами. Задача решается с применением интегрального преобразования Лапласа, а обратные преобразования находятся с использованием обобщенной теоремы Эфроса, специально разработанных функций и таблиц обратных преобразований. Численным анализом получены новые механические эффекты.

Ключевые слова: продольный удар, нестационарные волны, напряжение, кусочно-однородный стержень, линейно-вязкоупругость, ядро ползучести, интегральное преобразование

Введение. Среди динамических задач механики деформируемого твердого тела особенно сложными являются нестационарные задачи вязкоупругости, которые имеют важные практические приложения во многих областях техники, где используются полимерные, композитные и другие реологические материалы, подвергающиеся в процессе эксплуатации импульсивным воздействиям. В начале изучения этих проблем для описания поведения материалов применялись простейшие модели Максвелла [1], Фойста [2] и их простые комбинации [3–9].

Во многих известных работах поставлена цель выяснить влияние свойств материала на решение простых задач, предполагая затем качественно распространить полученные данные на более сложные задачи, в которых возможны упругие решения [3, 5, 10, 11].

Применение уравнений состояния Больцмана–Вольтерра в нестационарных динамических задачах вязкоупругости привело к большим математическим трудностям при решении этих задач. В связи с этим развивались численные методы [12–16], позволяющие определить в конечном счете значения некоторых функций вблизи переднего фронта волны [17, 18] или при коротких и больших временах после удара [6, 10, 19], а также различные аппроксимации [20–23]. В таких постановках задач существуют также некоторые приближения, связанные с выбором ядер интегральных операторов [6, 12, 24, 25].

В работах [26–28] разработан новый аналитический метод построения точного решения нестационарных краевых задач линейной вязкоупругости при произвольных разностных ядрах,

охватывающий все имеющиеся в литературе подходы к решению соответствующих задач.

Задачи о распространении нестационарных волн в вязкоупругих телах при произвольных наследственных функциях относятся к актуальным задачам механики и математической физики, которые усложняются с учетом неоднородности материала. В работе [29] рассмотрена задача о распространении волн напряжений в стержне, состоящем из вязкоупругой части конечной длины, наследственные свойства которой характеризуются ядром Роботнова, и полубесконечной упругой части, когда к концу стержня приложена импульсная синусоидальная нагрузка с учетом первой отраженной от стыка волны. Аналогичная задача о распространении волн напряжений в кусочно-однородном вязкоупругом полубесконечном стержне, состоящем из двух частей, свойства которых описываются линейными интегральными соотношениями с произвольными наследственными ядрами, исследована в работе [30].

В данной работе эти вопросы исследуются для полубесконечного кусочно-однородного стержня, состоящего из трех частей, причем наследственные свойства указанных частей описываются линейными интегральными соотношениями с одинаковыми произвольными разностными ядрами. Здесь найдено точное аналитическое решение поставленной задачи для любого числа отражений и любого ядра ползучести $K(t)$, придавая конкретный вид к которому можно получить частные решения, охватывающие известные в литературе результаты. Проведен численный анализ полученных решений и выявлены новые механические эффекты.

Решение задачи строится с помощью интегрального преобразования Лапласа, а обратные преобразования находятся с использованием обобщенной теоремы умножения Эфроса [31], специально разработанных функций [28] и таблиц обратных преобразований.

Постановка задачи. Выберем направление оси x вдоль оси стержня, составленного из трех частей с конечными длинами h_1 ($0 \leq x \leq l_1$), h_2 ($l_1 \leq x \leq l_2$) и полубесконечной длины ($l_2 \leq x < \infty$), которые соединены с жесткими контактными условиями, причем механические свойства указанных частей описываются линейными интегральными соотношениями с одинаковыми, произвольными разностными ядрами. Величины, характеризующие эти части, обозначим соответственно индексами 1, 2 и 3. Стержень считаем предварительно не нагруженным и находящимся в состоянии покоя, а в начальный момент времени к его концу мгновенно прикладывается нагрузка (рисунок 1).

Возникшее при этом волновое поле в стержне определяется из решения уравнения движения (суммирование по повторяющимся индексам не производится):

$$a_i^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \int_0^t K(t-\tau) \frac{\partial^2 u_i}{\partial \tau^2} d\tau \quad (i=1, 2, 3) \quad (1)$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$u_i(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (i=1, 2, 3); \quad (2)$$

$$\sigma_1(0, t) = f(t); \quad (3)$$

$$u_1(x, t) = u_2(x, t); \quad \sigma_1(x, t) = \sigma_2(x, t) \quad \text{при } x = h_1 = l_1; \quad (4)$$

$$u_2(x, t) = u_3(x, t); \quad \sigma_2(x, t) = \sigma_3(x, t) \quad \text{при } x = h_1 + h_2 = l_2; \quad (5)$$

$$u_3(x, t) = 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Здесь $u_i(x, t)$ — продольное смещение стержня; $a_i = \sqrt{E_i/\rho_i}$ — скорость распространения волны; $\sigma_i(x, t)$ — напряжение; E_i — мгновенный модуль упругости; ρ_i — плотность соответствующей среды; $K(t)$ — ядро ползучести; $f(t)$ — заданная функция.

Система (1)–(6) замыкается определяющим уравнением

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{1}{E} \left[\sigma_i + \int_0^t K(t-\tau) \sigma_i(x, \tau) d\tau \right] \quad (i=1, 2, 3). \quad (7)$$

Решение задачи. Применяя одностороннее преобразование Лапласа по времени t к уравнениям (1), (7) и граничным условиям (3)–(6) с учетом начальных условий (2), получаем (чертой сверху обозначаются изображения одноименных функций):

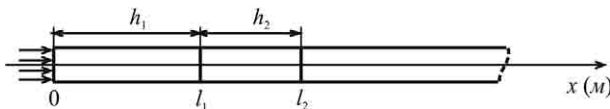


Рисунок 1 — Схематическое изображение задачи о продольном ударе по трехсоставному полубесконечному стержню

$$\frac{d^2 \bar{u}_i(x, p)}{dx^2} = \frac{p^2}{a_i^2} (1 + \bar{K}(p)) \bar{u}_i(x, p) \quad (i=1, 2, 3); \quad (8)$$

$$\frac{d \bar{u}_i(x, p)}{dx} = \frac{1}{E_i} (1 + \bar{K}(p)) \bar{\sigma}_i(x, p) \quad (i=1, 2, 3); \quad (9)$$

$$\bar{\sigma}_1(0, p) = \bar{f}(p); \quad (10)$$

$$\bar{u}_1(l_1, p) = \bar{u}_2(l_1, p); \quad \bar{\sigma}_1(l_1, p) = \bar{\sigma}_2(l_1, p); \quad (11)$$

$$\bar{u}_2(l_2, p) = \bar{u}_3(l_2, p); \quad \bar{\sigma}_2(l_2, p) = \bar{\sigma}_3(l_2, p); \quad (12)$$

$$\bar{u}_3(x, p) = 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Решения уравнения (8) будут в виде:

$$\bar{u}_i(x, p) = A_i e^{-\frac{xp\sqrt{1+\bar{K}}}{a_i}} + B_i e^{\frac{xp\sqrt{1+\bar{K}}}{a_i}} \quad i=(1, 2, 3). \quad (14)$$

Здесь A_i, B_i ($i=1, 2, 3$) — неизвестные коэффициенты. В силу граничного условия (13), $B_3 = 0$.

Подставив решение (14) в условия (10), (11) и (12), задача сводится к следующей системе алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 :

$$\begin{cases} \frac{E_1 p}{a_1 \sqrt{1+\bar{K}}} (A_1 - B_1) = -\bar{f}(p); \\ \frac{E_1}{a_1} \left(A_1 e^{-\frac{l_1 p \sqrt{1+\bar{K}}}{a_1}} - B_1 e^{\frac{l_1 p \sqrt{1+\bar{K}}}{a_1}} \right) = \frac{E_2}{a_2} \left(A_2 e^{-\frac{l_1 p \sqrt{1+\bar{K}}}{a_2}} - B_2 e^{\frac{l_1 p \sqrt{1+\bar{K}}}{a_2}} \right); \\ A_1 e^{-\frac{l_1 p \sqrt{1+\bar{K}}}{a_1}} + B_1 e^{\frac{l_1 p \sqrt{1+\bar{K}}}{a_1}} = A_2 e^{-\frac{l_1 p \sqrt{1+\bar{K}}}{a_2}} - B_2 e^{\frac{l_1 p \sqrt{1+\bar{K}}}{a_2}}; \\ \frac{E_2}{a_2} \left(A_2 e^{-\frac{l_2 p \sqrt{1+\bar{K}}}{a_2}} - B_2 e^{\frac{l_2 p \sqrt{1+\bar{K}}}{a_2}} \right) = \frac{E_3}{a_3} A_3 e^{-\frac{l_2 p \sqrt{1+\bar{K}}}{a_3}}; \\ A_2 e^{-\frac{l_2 p \sqrt{1+\bar{K}}}{a_2}} + B_2 e^{\frac{l_2 p \sqrt{1+\bar{K}}}{a_2}} = A_3 e^{-\frac{l_2 p \sqrt{1+\bar{K}}}{a_3}}. \end{cases} \quad (15)$$

Отсюда получаем:

$$\begin{cases} A_1 = -\frac{\bar{f}(p) a_1 \sqrt{1+\bar{K}(p)}}{E_1 p} \frac{1}{1 - \bar{\theta}_1 e^{-\frac{2l_1}{a_1} \sqrt{1+\bar{K}(p)}}}; \\ B_1 = -\frac{\bar{f}(p) a_1 \sqrt{1+\bar{K}(p)}}{E_1 p} \frac{\bar{\theta}_1 e^{-\frac{2l_1}{a_1} \sqrt{1+\bar{K}(p)}}}{1 - \bar{\theta}_1 e^{-\frac{2l_1}{a_1} \sqrt{1+\bar{K}(p)}}}; \\ A_2 = \frac{A_1 (1 + \bar{\theta}_1) e^{-\frac{l_1}{a_1} \sqrt{1+\bar{K}(p)}} e^{\frac{l_1}{a_2} \sqrt{1+\bar{K}(p)}}}{1 + \bar{\theta}_2 e^{-\frac{2(l_2-l_1)}{a_2} \sqrt{1+\bar{K}(p)}}}; \\ B_2 = A_2 \bar{\theta}_2 e^{-\frac{2l_1}{a_2} \sqrt{1+\bar{K}(p)}}; \\ A_3 = (1 + \bar{\theta}_2) A_2 e^{-\left(\frac{l_2}{a_2} - \frac{l_2}{a_3}\right) p \sqrt{1+\bar{K}(p)}} = \\ = \frac{A_1 (1 + \bar{\theta}_1) (1 + \bar{\theta}_2) e^{-\left(\frac{l_1}{a_1} + \frac{l_2-l_1}{a_2}\right) p \sqrt{1+\bar{K}(p)}} e^{\frac{l_2}{a_3} \sqrt{1+\bar{K}(p)}}}{1 + \bar{\theta}_2 e^{-\frac{2l_2}{a_2} \sqrt{1+\bar{K}(p)}}}, \end{cases} \quad (16)$$

где

$$\bar{\theta}_1(p, h_2) = \frac{\frac{E_1}{a_1} \left(1 + \theta_2 e^{-p \frac{2h_2}{a_2} \sqrt{1+\bar{K}(p)}} \right) - \frac{E_2}{a_2} \left(1 - \theta_2 e^{-p \frac{2h_2}{a_2} \sqrt{1+\bar{K}(p)}} \right)}{\frac{E_1}{a_1} \left(1 + \theta_2 e^{-p \frac{2h_2}{a_2} \sqrt{1+\bar{K}(p)}} \right) + \frac{E_2}{a_2} \left(1 - \theta_2 e^{-p \frac{2h_2}{a_2} \sqrt{1+\bar{K}(p)}} \right)},$$

$$\theta_2 = \frac{\frac{E_2}{a_2} - \frac{E_3}{a_3}}{\frac{E_2}{a_2} + \frac{E_3}{a_3}} = \frac{\sqrt{E_2 \rho_2} - \sqrt{E_3 \rho_3}}{\sqrt{E_2 \rho_2} + \sqrt{E_3 \rho_3}}, \quad h_2 = l_2 - l_1.$$

Учитывая (16), выражения для функции смещений в интегральных преобразованиях Лапласа после некоторых упрощений будут иметь вид:

$$\begin{cases} \bar{u}_1(p, x_1) = -\frac{\bar{f}(p) a_1 \sqrt{1+\bar{K}(p)}}{E_1 p} \times \\ \times \frac{e^{-p \frac{x_1}{a_1} \sqrt{1+\bar{K}(p)}} + \theta_1 e^{-p \frac{2h_1 - x_1}{a_1} \sqrt{1+\bar{K}(p)}}}{1 - \theta_1 e^{-p \frac{2h_1}{a_1} \sqrt{1+\bar{K}(p)}}}; \\ \bar{u}_2(p, x_2) = \bar{u}_1(p, l_1) \frac{e^{-p \frac{x_2}{a_2} \sqrt{1+\bar{K}(p)}} + \theta_2 e^{-p \frac{2h_2 - x_2}{a_2} \sqrt{1+\bar{K}(p)}}}{1 + \theta_2 e^{-p \frac{2h_2}{a_2} \sqrt{1+\bar{K}(p)}}}; \\ \bar{u}_3(p, x_3) = \bar{u}_2(p, l_2) e^{-p \frac{x_3}{a_3} \sqrt{1+\bar{K}(p)}}. \end{cases} \quad (17)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$x_1 = x \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad \text{где} \quad l_1 = h_1;$$

$$x_2 = x - l_1 \quad \text{при} \quad l_1 \leq x \leq l_2, \quad \text{где} \quad l_2 = h_1 + h_2;$$

$$x_3 = x - l_2 \quad \text{при} \quad l_2 \leq x \leq +\infty.$$

Учитывая, что при $\text{Re } p > 0$ выполняются условия:

$$\text{Re}(\sqrt{1+\bar{K}(p)}) > 0;$$

$$\left| \bar{\theta}_1 e^{-p \frac{2h_1}{a_1} \sqrt{1+\bar{K}(p)}} \right| < 1 \quad \text{и} \quad \left| \theta_2 e^{-p \frac{2h_2}{a_2} \sqrt{1+\bar{K}(p)}} \right| < 1,$$

то формулу для перемещения (17) можно записать в виде равномерно и абсолютно сходящихся рядов:

$$\begin{cases} \bar{u}_1(x_1, p) = -\frac{\bar{f}(p) a_1 \sqrt{1+\bar{K}(p)}}{E_1 p} \left(e^{-p \frac{x_1}{a_1} \sqrt{1+\bar{K}(p)}} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{-p \frac{(2k-1)h_1 - x_1}{a_1} \sqrt{1+\bar{K}(p)}} + e^{-p \frac{2kh_1 - x_1}{a_1} \sqrt{1+\bar{K}(p)}} \right) \bar{\theta}_1^k \right); \\ \bar{u}_2(x_2, p) = \bar{u}_1(l_1, p) \left(e^{-p \frac{x_2}{a_2} \sqrt{1+\bar{K}(p)}} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \times \right. \\ \left. \times \left(e^{-p \frac{(2k-1)h_2 - x_2}{a_2} \sqrt{1+\bar{K}(p)}} - e^{-p \frac{2kh_2 - x_2}{a_2} \sqrt{1+\bar{K}(p)}} \right) \theta_2^k \right); \\ \bar{u}_3(x_3, p) = \bar{u}_2(l_2, p) e^{-p \frac{x_3}{a_3} \sqrt{1+\bar{K}(p)}}. \end{cases} \quad (18)$$

Для конкретности допустим $f(t) = \sigma_0 H(t)$, где σ_0 — постоянная, $H(t)$ — единичная функция Хевисайда.

Учитывая, что обратное преобразование функции $W(x, p) = \frac{1}{p} \exp\left(-\frac{px}{a} \sqrt{1+\bar{K}(p)}\right)$, построенное в [28], имеет вид:

$$W(x, t) = H\left(t - \frac{x}{a}\right) \left[1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^m m!} \times \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2m-k-2)!}{k!(m-k-1)!} \left(\frac{2x}{a}\right)^{k+1} K_m^{(k)}\left(t - \frac{x}{a}\right) \right], \quad (19)$$

где $K_m(t)$ — итерированные ядра,

$$K_1(t) = K(t), \quad K_m(t) = \int_0^t K_1(t-\tau) K_{m-1}(\tau) d\tau$$

$$K_m^{(k)} = \frac{d^k K_m(t)}{dt^k},$$

и, имея ввиду равенства

$$\bar{\Pi}_1 = \frac{(1+\bar{K}(p))}{E_1 p}; \quad \bar{\Pi}_2 = \frac{(1+\bar{K}(p))}{E_2 p};$$

$$\bar{\Pi}_3 = \frac{(1+\bar{K}(p))}{E_3 p}; \quad \bar{f}(p) = \frac{\sigma_0}{p}$$

с использованием интеграла Дюамеля [31], для де-

формаций $\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x}; \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x}; \frac{\partial u_3(x, t)}{\partial x}$; получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x} = \sigma_0 \int_0^t (t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \int_0^\tau [W_1(x_1, \tau) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} [W_1((2k-1)h_1 - x_1, \tau) - W_1(2kh_1 - x_1, \tau)] \theta_1^k(\tau-s) ds \right\} d\tau; \\ \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l_1} \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \int_0^\tau [W_2(x_2, \tau) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} [W_2((2k-1)h_2 - x_2, \tau) - W_2(2kh_2 - x_2, \tau)] \theta_2^k d\tau \right\}; \\ \frac{\partial u_3(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l_2} \frac{\partial}{\partial \tau} \{W_3(x_3, \tau)\}. \end{cases} \quad (20)$$

Здесь $\Pi_1(t), \Pi_2(t), \Pi_3(t)$ — функции ползучести, а $W_i(x, t)$ ($i = 1, 2, 3$) — функция типа (19) для соответствующей среды.

Используя известное соотношение линейной

вязкоупругости между деформацией $\frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x}$ и напряжением $W_i(x, \tau)$

$$\frac{\partial u_i(x, t)}{\partial x} = \int_0^t \Pi_i(t-\tau) dW_i(x, \tau); \quad i = 1, 2, 3;$$

из соотношения (20) можно получить выражения для напряжений $\sigma_1(x, t)$, $\sigma_2(x, t)$ и $\sigma_3(x, t)$:

$$\begin{cases} \sigma_1(x, t) = \sigma_0 \int_0^t [W_1(x, \tau) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} [W_1((2k-1)h_1 - x_1, \tau) - \\ - W_1(2kh_1 - x_1, \tau)]] \theta_1^k(t - \tau) d\tau; \\ \sigma_2(x, t) = \int_0^t \sigma_1(l_1, t - \tau) \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} [W_2(x_2, \tau) + \right. \\ + \sum_{k=1}^{\infty} (W_2((2k-1)h_2 - x_2, \tau) - \\ - W_2(2kh_2 - x_2, \tau))] \theta_2^k \} d\tau; \\ \sigma_3(x, t) = \int_0^t \sigma_2(l_2, t - \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \{W_3(x_3, \tau)\} d\tau. \end{cases}$$

Проведем анализ полученных решений. На рисунке 2 построены графики при следующих исходных параметрах: $l_1 = h_1 = 1$ м, $h_2 = 0,5$ м, $l_2 = h_1 + h_2 = 1,5$ м, $\sigma_0 = 10^3$ Па, $E_1 = E_2 = E_3 = 63 \cdot 10^8$ Па, $\rho_1 = 1200$ кг/м³, $\rho_2 = \rho_3 = \rho_1/2,25$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 109$ Пз, $K(t) = E_1 H(t)/\mu_1$ ($H(t)$ — единичная функция Хевисайда).

Отметим, что при расчетах для ядра Максвелла используется следующая форма функции (19) [28]:

$$W(x, t) = H\left(t - \frac{x}{a}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n! \mu^n} \frac{E^n}{\mu^n} \times \\ \times \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n-k-2)!}{k! [(n-k-1)!]^2} \left(\frac{2x}{a}\right)^{k+1} \left(t - \frac{x}{a}\right)^{n-k-1}. \quad (22)$$

Из графика видно, что с увеличением времени волны напряжений становятся стационарными и приближаются к значению σ_0 . Цифрами у кривых указаны координаты наблюдаемых точек. Аналогичные графики (рисунок 3) с некоторыми изменениями исходных параметров так, что $l_1 = h_1 = 1$ м, $h_2 = 0,5$ м, $l_2 = h_1 + h_2 = 1,5$ м, $\sigma_0 = 10^3$ Па, $E_1 = 63 \cdot 10^7$ Па, $E_2 = E_3 = 0,2E_1$, $\rho_1 = \rho_3 = \rho_1 = 1200$ кг/м³, $\mu_1 = 108$ Пз, $\mu_2 = \mu_3 = 0,2\mu_1$, $K(t) = E_1 H(t)/\mu_1$ позволяют сделать вывод, что при $a_2 = a_3 > a_1$ волны напряжений быстрее становятся гладкими, чем при условии $a_2 = a_3 < a_1$.

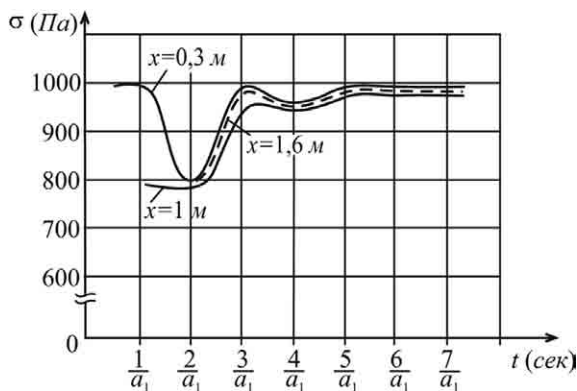


Рисунок 2 — Зависимость напряжения от времени в различных сечениях стержня при $a_1 < a_2 = a_3$, где свойство всех частей стержня описываются ядрами Максвелла; нагружение ступенчатое

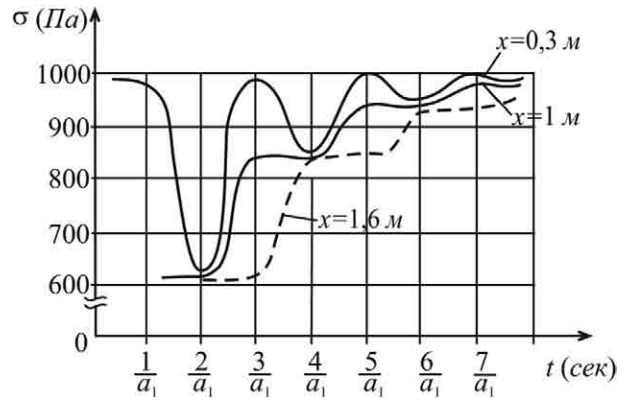


Рисунок 3 — Зависимость напряжения от времени в различных сечениях стержня при $a_1 > a_2 = a_3$, где свойство всех частей стержня описываются ядрами Максвелла; нагружение ступенчатое

На рисунке 4 построен график с теми же исходными параметрами, что и на рисунке 3. Этот график иллюстрирует зависимость значения напряжений от координаты x при значениях времени $t = 4l_1/a_1 = 0,005520523$ с. Такой выбор значения времени t связан с тем, чтобы было удобно произвести анализ отражающих и проходящих волн в точках скрепления l_1 и l_2 . Из графика видно, что в точке $x = l_1$ ($l_1 = 1$ м) и $x = l_2$ ($l_2 = 1,5$ м) с высокой точностью обеспечиваются граничные условия (4) и (5). Фронт очередного слагаемого напряжения заканчивается в $x = 1,4472135$ м, за счет чего значение напряжения при $x > 1,4472135$ м становится равным значению предыдущего слагаемого.

Проведены численные исследования решения, когда свойства материала описываются слабосингулярным ядром Абеля $K(t) = At^{-\alpha}$, где $A = \text{const}$, $0 < \alpha < 1$. При расчетах использовано асимптотическое выражение функции (19), верное при $(t - x/a) \ll 1$ и $x > 0$, имеющее следующий вид [28]:

$$W(x, t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\alpha)}} \left[\frac{2a}{A\Gamma(1-\alpha)ax} \right]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} \times \\ \times \left(t - \frac{x}{a} \right)^{\frac{\alpha}{2(1-\alpha)}} \exp \left\{ -\frac{1-\alpha}{\alpha} \left[\frac{A\Gamma(1-\alpha)ax}{2a} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(t - \frac{x}{a} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \right\}, \quad (23)$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера, $x > 0$.

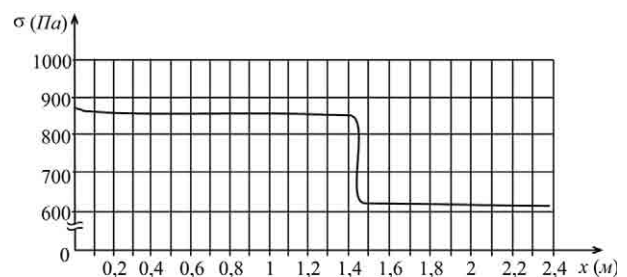


Рисунок 4 — Зависимость напряжения от координаты после отражения волны на конечном участке при $t = 4l_1/a_1 = 0,005520523$ для материала Максвелла; нагружение ступенчатое

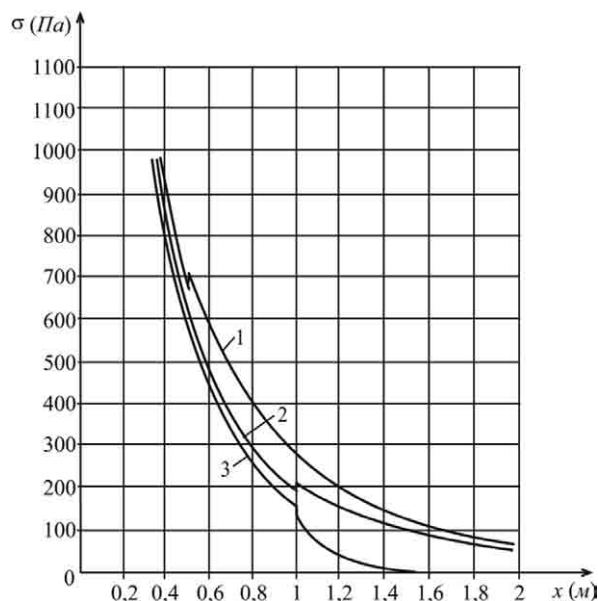


Рисунок 5 — Зависимость напряжения от координаты и от модулей упругости для ядра ползучести Абеля

На рисунке 5 построены графики для следующих исходных данных: $A = 10^3$, $\alpha = 0,2$, $t = 0,005520523$ с, $E_1 = 63 \cdot 10^7$ кг/м², $E_2 = E_3 = 2E_1$, $\rho_1 = \rho_3 = \rho_1 = 1200$ кг/м³.

Кривая, обозначенная цифрой 1, соответствует $l_1 = 0,5$ м, $l_2 = 1,5$ м, а цифрой 2 — $l_1 = 1$ м, $l_2 = 1,5$ м. Из графиков видно, что с изменением материала частей стержня изменяется скорость сглаживания волн напряжения. Так, в данном случае $a_2 = a_3 > a_1$ (кривая 1, 2) и, вследствие этого, на участке $l_1 \leq x < +\infty$ значение напряжения уменьшается медленнее (в зависимости от координаты точек), чем на участке $0 \leq x \leq l_1$.

График (кривая 3), построенный с теми же исходными параметрами, только с изменением $E_2 = 0,2E_1$, подтверждает вышеизложенное: так как в этом случае $a_1 > a_2 = a_3$ и за счет этого происходит обратный процесс, так что на участке $l_1 \leq x < +\infty$ скорость затухания становится больше, чем на $0 \leq x \leq l_1$.

Отметим, что в контактирующих точках полученный скачок (см. рисунок 5) объясняется тем, что при расчетах вместо $W(x, t)$ использовано ее асимптотическое разложение (23), которое верно при больших значениях координаты x . Поэтому с увеличением значения l_1 скачки уменьшаются, т. е. погрешности в удовлетворении контактных условий при использовании формулы (23) уменьшаются, а в точке $x = l_2$ скачок не отмечается, так как все физические параметры материала в частях $l_1 < x \leq l_2$ и $l_2 \leq x < +\infty$ в численных расчетах выбраны одинаково.

Список литературы

1. Lee, E.H. Wave propagation in finite rods of viscoelastic material / E.H. Lee and I. Kanter // Journal of applied physics. — 1953. — Vol. 24. — Pp. 1115–1122.
2. Зверев, И.Н. Распространение возмущений в вязкоупругом и вязкопластическом стержне / И.Н. Зверев // Прикладная математика и механика. — 1950. — Вып. 14, № 3. — С. 295–302.

3. Bland, D.R. Nonlinear dynamic elasticity / D.R. Bland. — Waltham: Blaisdell Publishing Company, 1969. — 93 p.
4. Ишлинский, А.Ю. Продольные колебания стержня при наличии линейного закона последствия и релаксации / А.Ю. Ишлинский // Прикладная математика и механика. — 1940. — Т. 4, вып. 1. — С. 79–92.
5. Christensen, R.M. Theory of Viscoelasticity: An Introduction: Second Ed. / R.M. Christensen. — New York—London: Academic Press, 1982. — 364 p.
6. Сабодаш, П.Ф. Распространение продольных вязкоупругих волн в трехслойной среде / П.Ф. Сабодаш // Механика полимеров. — 1971. — № 1. — С. 151–156.
7. Chu, B.T. Stress wave in isotropic linear viscoelastic materials / B.T. Chu // J. Mécanique. — 1962. — Vol. 1, № 1. — Pp. 439–462.
8. Lee, T.M. Spherical waves in viscoelastic media / T.M. Lee // Journal of the Acoustical Society of America. — 1964. — Vol. 36, Is. 12. — Pp. 2402–2407.
9. Berry, D.S. The propagation of dynamic stress in viscoelastic rods / D.S. Berry, S.C. Hunter // Journal of Mechanics and Physics of Solids. — 1956. — Vol. 4, Is. 2. — Pp. 72–95.
10. Локшин, А.А. Математическая теория распространения волн в средах с памятью / А.А. Локшин, Ю.В. Суворова. — М.: МГУ, 1982. — 152 с.
11. Филиппов, И.Г. Волновые процессы в линейных вязкоупругих средах / И.Г. Филиппов, О.А. Егорычев. — М.: Машиностроение, 1983. — 269 с.
12. Белов, М.А. Численное обращение преобразования Лапласа методом асимптотического расширения интервала в динамических задачах вязкоупругости / М.А. Белов, А.Е. Богданович // Механика полимеров. — 1976. — № 5. — С. 864–870.
13. Кокошвили, С.М. Численное решение задачи об ударе жесткой массы по вязкоупругому стержню конечной длины / С.М. Кокошвили, В.П. Музыченко, В.П. Тамуж // Прикладная механика. — 1973. — № 3. — С. 450–466.
14. Колтунов, М.А. Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов / М.А. Колтунов, В.П. Майборда, В.Г. Зубчанинов. — М.: Машиностроение, 1983. — 239 с.
15. Кукуджанов, В.Н. Одномерные задачи распространения волн напряжений в стержнях / В.Н. Кукуджанов // Сообщения по прикладной математике. — М.: ВЦАН СССР, 1977. — Вып. 7. — 56 с.
16. Победра, Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности: учеб. пособие / Б.Е. Победра. — 2-е изд. — М.: МГУ, 1995. — 366 с.
17. Lubliner, J. Cylindrical wave in a viscoelastic solid / J. Lubliner // Journal of the Acoustical Society of America. — 1962. — Vol. 34, № 11. — Pp. 1706–1710.
18. Sun, C.T. Transient wave propagation in viscoelastic rods / C.T. Sun // Journal of Applied Mechanics. — 1970. — Vol. 37(4). — Pp. 1141–1144.
19. Гонсовский, В.А. Удар вязкоупругого стержня о жесткую преграду / В.А. Гонсовский, С.И. Мешков, Ю.А. Россихин // Прикладная механика. — 1972. — Vol. 8, № 10. — С. 71–76.
20. Arenz, R.J. Uniaxial Wave Propagation in Realistic Viscoelastic Materials / R.J. Arenz // Journal of Applied Mechanics. — 1964. — Vol. 31(1). — Pp. 17–21.
21. Гайдук, С.И. Решение одной задачи о продольном ударе по упруго-вязко-релаксирующему стержню / С.И. Гайдук, В.А. Добрушкин // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1975. — № 6. — С. 30–41.
22. Крицкая, С.С. Математическое рассмотрение задачи о продольном ударе стержня при наличии закона Больцмана-Вольтера / С.С. Крицкая, Д.И. Рогач // Изв. ВУЗов. Математика. — 1980. — № 4. — С. 47–52.
23. Огибалов, П.М. Механика полимеров: учеб. пособие для вузов / П.М. Огибалов, В.А. Ломакин, Б.П. Кишкин. — М.: МГУ, 1975. — 528 с.
24. Москвитин, В.В. Сопротивление вязкоупругих материалов / В.В. Москвитин. — М.: Наука, 1972. — 328 с.
25. Achenbach, D. Note on wave propagation in linearly viscoelastic media / D. Achenbach, R. Reddy // ZAMP. — 1967. — Vol. 18. — Pp. 141–144.
26. Максудов, Ф.Г. Об одном методе решения динамических задач линейной вязкоупругости с регулярными наследственными ядрами / Ф.Г. Максудов, М.Х. Ильясов // ДАН СССР. — 1981. — Т. 260, № 6. — С. 1332–1335.
27. Максудов, Ф.Г. Об одном методе решения динамических задач линейной вязкоупругости с непропорциональными

- функциями релаксации / Ф.Г. Максудов, М.Х. Ильясов // ДАН СССР. — 1983. — Т. 273, № 3. — С. 564–567.
28. Ильясов, М.Х. Некоторые динамические задачи линейной вязкоупругости: дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. / М.Х. Ильясов. — М., 1985. — 251 с.
 29. Зеленов, В.М. Волны напряжения в составном полубесконечном стержне / В.М. Зеленов, В.С. Поленов // Прикладная математика и техническая физика. — 1971. — № 4. — С. 116–120.
 30. Ильясов, М.Х. Волны напряжений в составном полубесконечном наследственно упругом стержне / М.Х. Ильясов, Э.Г. Мамедгасанов / Сб. докл. междунар. конф. «Актуальные проблемы фундаментальных наук». — М.: МГТУ, 1991. — С. 82–85.
 31. Лаврентьев, М.А. Методы теории функции комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. — М.: Наука, 1973. — 749 с.

MAMMADHASANOV Elkhon H., Ph. D. in Phys.-Math., Assoc. Prof.

E-mail: elxon_mg@rambler.ru

Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan

Received 09 March 2016.

NON-STATIONARY WAVES IN THREE COMPONENT VISCOELASTIC BAR

In the paper we obtain exact analytic solutions of a problem on longitudinal shock on a thin, piecewise-homogeneous linear visco-elastic bar consisting of three parts of finite length $h_1(0 \leq x \leq l_1)$, $h_2(l_1 \leq x \leq l_2)$ and a semi-infinite length ($l_2 \leq x < \infty$), that are connected with rigid contact conditions, the mechanical properties of these parts are described by linear integral relations with the same, arbitrary difference kernels. The problem is solved by using the Laplace integral transform, while inverse transform are found by using the Efros generalized theorem, specially designed functions and tables of inverse transforms. New mechanical effects were obtained by numerical analysis.

Keywords: longitudinal stock, nonstationary values, stress, piecewise-homogeneous bar, linear viscoelasticity, creeping kernel, integral transformation

References

1. Lee E.H. and Kanter I. Wave propagation in finite rods of viscoelastic material. *Journal of applied physics*, 1953, vol. 24, pp. 1115–1122.
2. Zverev I.N. Rasprostraneniye vozmusheniya v vyazko-uprugom i vyazkoplasticheskom stержne [Propagation of perturbations in the visco-elastic and viscoplastic bar]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1950, vol. 14, no. 3, pp. 295–302.
3. Bland D.R. *Nonlinear dynamic elasticity*. Waltham, Blaisdell Publishing Company, 1969. 93 p.
4. Ishlinskiy A.Yu. Prodolnye kolebaniya stержnyapri nalichii lineynogo zakona posledeystviya i relaksacii [The longitudinal vibrations of a rod in the presence of a linear law aftereffect and relaxation]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1940, vol. 4, no. 1, pp. 79–92.
5. Christensen R.M. *Theory of Viscoelasticity: An Introduction. Second Edition*. New York-London, Academic Press, 1982. 364 p.
6. Sabodash P.F. Rasprostraneniye prodolnykh vyazkoupругykh voln v trekhslonnoy srede [The propagation of longitudinal viscoelastic waves in a three-layer medium]. *Mekhanika polimerov* [Mechanics of polymers], 1971, no. 1, pp. 151–156.
7. Chu B.T. Stress wave in isotropic linear viscoelastic materials. *J. Mécanique*, 1962, vol. 1, no. 1, pp. 439–462.
8. Lee T.M. Spherical waves in viscoelastic media. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1964, vol. 36, no. 12, pp. 2402–2407.
9. Berry D.S., Hunter S.C. The propagation of dynamic stress in viscoelastic rods. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 1956, vol. 4, no. 2, pp. 72–95.
10. Lokshin A.A., Suvorova Yu.V. *Matematicheskaya teoriya rasprostraneniya voln v sredakh s pamyatyu* [The mathematical theory of wave propagation in media with memory]. Moscow, izd-vo MQU, 1982. 152 p.
11. Filippov I.Q., Egorichev O.A. *Volnovye processy v lineynikh vyazkoupругikh sredakh* [Wave processes in linear viscoelastic media]. Moscow, Mashinostroenie, 1983. 269 p.
12. Belov M.A., Bogdanovich A.B. Chislennoe obrasheniye preobrazovaniya Laplasa metodom asimptoticheskogo rasshireniya intervala v dinamicheskikh zadachakh vyazkoupругosti [Numerical inversion of the Laplace transform method of asymptotic expansion slot in the dynamic viscoelasticity problems]. *Mekhanika polimerov* [Mechanics of polymers], 1976, no. 15, pp. 864–870.
13. Kokoshvili S.M., Muzichenko V.P., Tamuj V.P. Chislennoe resheniye zadachi ob udare jestkoy massi po vyazkoupругomu stержnyu konechnoy dliny [Numerical solution of the problem of the impact of a rigid mass by a viscoelastic rod of finite length]. *Prikladnaya mekhanika* [Applied mechanics], 1973, no. 3, pp. 450–466.
14. Koltunov M.A., Mayborda V.P., Zubchaninov V.Q. *Prochnostnye rascheti izdeliy iz polimernikh materialov* [Structural analyzes of products from polymeric materials]. Moscow, Mashinostroenie, 1983. 239 p.
15. Kukudjanov V.N. Odnomerniye zadachi rasprostraneniya voln napryazheniy v stержnyakh [One-dimensional problem of propagation of stress waves in rods]. *Soobsheniya poprikladnoy matematike* [Reports on Applied Mathematics]. Moscow, VC AN SSSR, 1977, no. 7. 56 p.
16. Pobedrya B.E. *Chislennyye metody v teorii uprugosti i plastichnosti* [Numerical methods in the theory of elasticity and plasticity]. Uchebnoe posobie [Tutorial]. Moscow, izd-vo MQU, 1995. 366 p.
17. Lubliner J. Cylindrical wave in a viscoelastic solid. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1962, vol. 34, no. 11, pp. 1706–1710.
18. Sun C.T. Transient wave propagation in viscoelastic rods. *Journal of Applied Mechanics*, 1970, vol. 37(4), pp. 1141–1144.
19. Qonsovskiy V.A., Meshkov S.I., Rossikhin Yu.A. Udar vyazkoupругogo stержnya o jestkuyu pregradu [Beat viscoelastic rod of a rigid barrier]. *Prikladnaya Mekhanika* [Applied mechanics], 1972, vol. 8, no. 10, pp. 71–76.
20. Arenz R.J. Uniaxial Wave Propagation in Realistic Viscoelastic Materials. *Journal of Applied Mechanics*, 1964, vol. 31(1), pp. 17–21.
21. Qayduk S.I., Dobrushkin V.A. Reshenieodnoy zadachi o prodolnom udare pouprugogo-vyazko-relaksiruyushemu stержnyu [Solution of a problem of longitudinal impact on viscoelastic-relaxing rod]. *Izvestiya AN BSSR, ser. fiz.-mat. nauk.* [Pro-

- ceedings of the Academy of Sciences of the BSSR, a series of physical and mathematical sciences], 1975, no. 6, pp. 30–41.
22. Krickaya S.S., Roqach D.I. Matematicheskoe rassmotrenie zadachi opredolnom udare sterjnya pri nalichii zakona Bolcmana-Voltera [Mathematical consideration of the problem of longitudinal impact on a rod in the presence of the Boltzmann-Volterra law]. *Izvestiya VUZov. Matematika* [Proceedings of the universities. Mathematics], 1980, no. 4, pp. 47–52.
 23. Oqibalov P.M., Lomakin V.A., Kishkin B.P. *Mekhanika polimerov* [Mechanics of polymers]. Moscow, izd-vo MQU, 1975. 528 p.
 24. Moskvitin V.V. *Soprotivlenie vyazkoupругikh materialov* [Resistance viscoelastic materials]. Moscow, Nauka, 1972. 328 p.
 25. Achenbach D., Reddy R. Note on wave propagation in linearly viscoelastic media. *ZAMP*, 1967, vol. 18, pp. 141–144.
 26. Maksudov F.Q., Ilyasov M.Kh. Ob odnom metode resheniya dinamicheskikh zadach lineynoy vyazkoupругosti s regulyarnimi nasledstvennimi yadrami [A method for solving dynamic problems of linear viscoelasticity with regular hereditary kernels]. *DAN SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1981, vol. 260, no. 6, pp. 1332–1335.
 27. Maksudov F.Q., Ilyasov M.Kh. Ob odnom metode resheniya dinamicheskikh zadach lineynoy vyazkoupругosti s neproportionalnymi funktsiyami relaksatsii [A method for solving dynamic problems linear viscoelastic with disproportionate relaxation functions]. *DAN SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1983, vol. 273, no. 3, pp. 564–567.
 28. Ilyasov M.Kh. *Nekotorie dinamicheskie zadachi lineynoy vyazkoupругosti*. Diss. dotk. fiz.-mat. nauk. [Some dynamic problems linear viscoelasticity. Dr. phys. and math. sci. diss.]. Moscow, 1985. 251 p.
 29. Zelenev V.M., Polenov V.S. Volny naprjajenia v sostavnom polubeskonechnom sterjne [Waves of voltage in the composite semi-infinite rod]. *Prikladnaya matematika i tekhnicheskaya fizika* [Applied Mathematics and Technical Physics], Novosibirsk, 1971, no. 4, pp. 116–120.
 30. Il'yasov M.Kh., Mamedqasanov E.G. Volni napryajeniy v sostavnom polubeskonechnom nasledstvenno uprugom sterjne [Stress Wave in the semi-infinite hereditarily elastic rod]. *Sb. dokl. mejd. konf. «Aktualniye problemi fundamentalnikh nauk»* [Proceedings of the international conference "Actual problems of fundamental sciences"], Moscow, izd-vo MG TU, 1991, pp. 82–85.
 31. Lavrentiev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo* [Methods of the theory of complex variable functions]. Moscow, Nauka, 1973. 749 p.