



# МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 621.01

Г.А. ГЕВОРКЯН, канд. техн. наук

научный сотрудник

E-mail: hrgevorkian@mail.ru

Институт механики НАН Республики Армения, г. Ереван, Республика Армения

Поступила в редакцию 29.02.2016.

## РАСЧЕТ УПРУГИХ ПРОГИБОВ ТОНКИХ ЖЕСТКИХ ПЛАСТИН НА ОСНОВЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ БЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ГИПОТЕЗЫ КИРХГОФА

*В предлагаемой статье обсуждаются выработанные на основе плоско-пространственной задачи МКЭ результаты численного решения задачи упругого изгиба свободно опертых прямоугольных однородных и изотропных тонких жестких пластин, находящихся под действием равномерно распределенной нагрузки. Сравнительный анализ результатов, полученных, с одной стороны, без учета гипотезы Кирхгофа, и, другой стороны, итогов аналитического решения методом Навье в теории Кирхгофа применительно к данному классу задач свидетельствует о высокой эффективности новой модификации МКЭ по отношению к методам, использующим гипотезу Кирхгофа.*

**Ключевые слова:** метод конечных элементов, метод Навье, теория Кирхгофа, плоско-пространственная задача, гипотеза неизменности нормали, тонкие жесткие пластинки, мембраны, приведенная функция прогибов

**Введение.** В работе [1] была сформулирована плоско-пространственная задача МКЭ, предназначенная для анализа упругого поперечного изгиба тонких жестких пластинок. Эта задача представляет собой, прежде всего, естественное дополнение до завершенности к общеизвестной плоской задаче МКЭ [2], а также выражает особую модификацию антиплоского сдвига применительно к модели двумерной сплошной среды с вкрапленными в нее по всей толщине сферическими шарнирами. Актуальность работы диктуется отсутствием выдвинутой модификации не только в работах авторов [2, 3], стоявших у истоков формирования МКЭ, но и в передовых пособиях исследователей [4, 5], являющихся авторитетами в сфере современного МКЭ. Важно также отметить, что передовые разработки отечественных авторов в области изгиба пластин и оболочек ориентированы на развитие модели Тимошенко–Рейсснера [6, 7], учитывающей деформации сдвига, которая намного сложнее по сравнению с плос-

ко-пространственной задачей МКЭ; авангардные исследования зарубежных авторов в области развития МКЭ преследуют целью улучшение или усовершенствование существующих модификаций путем внедрения новых нелинейных моделей [8–10], а вовсе не в силу коренного переосмысления традиционных линейных теорий.

Следует прежде всего напомнить, что классическая теория упругого изгиба пластин, заложенная в начале XIX века Навье и развитая впоследствии такими знаменитыми учеными, как Эставан, Ляв [11] и другие математики, является по настоящее время основным расчетным средством для решения большинства встречающихся на практике задач изгиба пластин и оболочек. Принято полагать [11], что в силу основоположной гипотезы Кирхгофа — гипотезы неизменности, или жесткости, нормали — возможно определение с удовлетворительной точностью функций малых упругих прогибов для всей гаммы *малой и средней толщины пластин*. Таким образом, порогом применения ги-

потезы или основанной на ней теории Кирхгофа к расчету прогибов, например, квадратных пластин принято отношение:  $h/l = 1/5$  [11], где  $h$  — толщина, а  $l$  — длина пластины.

Следует также отметить, что задача определения упругих прогибов пластинки без учета планарных перемещений точек ее *срединной плоскости* допустимо только к *жестким пластинкам*, под которыми подразумеваются таковые с недеформируемой в смысле растяжения и сжатия срединной плоскостью, для которых отношение наибольших прогибов к толщине  $w_{\max}/h < 1/5$  [11], где  $w$  — прогиб, а  $h$  — толщина пластинки. Пластины, удовлетворяющие условию независимости изгиба от растяжения-сжатия, в научно-технической литературе иногда называются *тонкими пластинками* [12], а также — *тонкими плитами* [13]. С другой стороны, необходимо также подчеркнуть, что к изучению поперечного изгиба именно такого рода пластин при малости их деформаций и упругих перемещений и призвана сформулированная в работе [1] плоско-пространственная задача МКЭ.

Поскольку плоско-пространственная задача МКЭ [1] формулируется аналогично плоской задаче МКЭ [2] для обобщенного плоского напряженного состояния, которое, в свою очередь, постулируется на основании идеи Файлона [14] для двумерной сплошной среды малой толщины, то из этого следует, что корректное численное решение плоско-пространственной задачи МКЭ возможно лишь для пластинок малой толщины  $h$ .

В силу вышеизложенного особо оговаривается, что объектами предпринятых в статье исследований выступают *тонкие жесткие пластинки*.

**Расчет прогибов методом Навье в теории Кирхгофа.** Метод, впервые предложенный Навье в 1820 году, нашедший в многочисленных работах дальнейшее развитие и обобщение в рамках теории Кирхгофа, квалифицируется в классической литературе [11] как надежный аналитический аппарат для определения упругих прогибов тонких жестких пластинок.

Итак, приступаем к рассмотрению прямоугольной тонкой жесткой однородной пластинки (рисунок 1) с модулем упругости  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ , свободно опертой по краям под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности  $q$ .

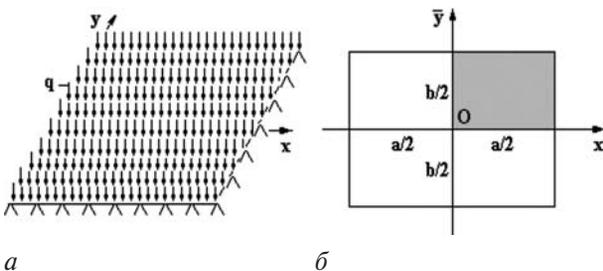


Рисунок 1 — Схема нагружения тонкой жесткой пластинки

Задача в такой постановке сводится к решению дифференциального уравнения:

$$\Delta \Delta w = q/D, \quad \text{где } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (1)$$

а  $\Delta$  — жесткость пластины при изгибе.

Граничные условия задачи записываются:

$$w(x = \pm a/2, \bar{y} = \pm b/2) = w''(x = \pm a/2, \bar{y} = \pm b/2) = 0. \quad (2)$$

Согласно методу Навье, функция прогибов в таком случае представляется либо в виде двойного тригонометрического ряда [11]:

$$w(x, y) = \frac{16q}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}, \quad m, n = 1, 3, 5, \dots, \quad (3)$$

где  $a$  и  $b$  — длина и ширина пластинки, либо в форме простого ряда Леви, впервые предложенного в работе Эставана [11], т. е.

$$w(x, y) = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left[ 1 - \frac{\alpha_m \theta \alpha_m + 2}{2ch \alpha_m} ch \frac{2\alpha_m y}{b} + \frac{\alpha_m}{2ch \alpha_m} \cdot \frac{2y}{b} \cdot sh \frac{2\alpha_m y}{b} \right] \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad \text{где } \alpha_m = \frac{m\pi b}{2a}. \quad (4)$$

**Антиплоский сдвиг и уравнение прогибов мембраны.** Подробный анализ сформулированной в работе [1] плоско-пространственной задачи МКЭ квалифицирует ее как особую модификацию *антиплоского сдвига* или *антиплоской деформации* [15] для двумерной модели плоской сплошной среды, дифференциальное уравнение которой совпадает с единственным невырожденным уравнением Ламе [14] при отсутствии объемной деформации, т. е.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{f}{G}, \quad (5)$$

где  $f$  — объемная сила;  $G$  — модуль сдвига.

С другой стороны, дифференциальное уравнение прогибов мембраны записывается в виде [14]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{P}{Q}, \quad (6)$$

где  $P$  — давление на единицу площади мембраны;  $Q$  — растягивающее усилие, приходящееся в каждом сечении мембраны на единицу его длины.

Нетрудно удостовериться в тождестве дифференциальных уравнений (5) и (6) в силу следующих аналогий [16]:

$$\begin{cases} P \equiv fh; \\ Q \equiv Gh, \end{cases} \quad (7)$$

где  $h$  — коэффициент подобия, выражающий для случая *технической мембраны* как тонкой пластинки, жесткость на изгиб которой равна нулю, конечную величину толщины, удовлетворяющую неравенству  $h/a < 40$  [11], где  $a$  — наибольший характерный ее размер.

**Расчет прогибов на базе МКЭ без учета гипотезы Кирхгофа.** Переходим теперь к численному решению сформулированной выше задачи поперечного изгиба для расчетной схемы, показанной на рисунке 1, на основе плоско-пространственной задачи МКЭ [1]. Очевидно, что в силу двойной осевой симметрии пластинки и системы ее нагружения (см. рисунок 1 а) оказывается достаточным определение функции прогибов для четверти пластины, выделенной на рисунке 1 б. Условимся дискретизацию четверти пластинки производить согласно схеме блочного разбиения, которая изображена на рисунке 2.

Сперва проводится расчет наиболее элементарного случая упругого поперечного изгиба пластинки (см. рисунок 1), когда она предполагается квадратной, т. е. при  $m = n$  на рисунке 2 и при  $a = b$  в равенствах (2)–(4).

В качестве критерия для оценки прогибов целесообразно использовать вместо натуральной функции поперечных перемещений приведенную функцию прогибов, например, — функцию прогибов, приведенную к максимальному прогибу пластинки, т. е.  $\bar{w} = w/w_{max}$ . Роль новой функции преимущественна тем, что она в связи с существующим аналитическим решением (3)–(4) может квалифицироваться как самостоятельная характеристика напряженно-деформированного состояния пластинок, не зависящая от их толщины, интенсивности равномерно распределенной нагрузки и упругих постоянных материала, предполагаемого однородным и изотропным.

На рисунке 3 приводятся графики приведенных осевых функций прогибов, генерированных соответственно методом Навье при  $m = n = 25$  в формулах (3) и (4) и МКЭ при  $m = n = 19$  согласно схеме рисунка 2, а в таблице иллюстрируется картина сходимости приведенного прогиба средней точки полуоси исследуемой квадратной пластины при численном решении плоско-пространственной задачи МКЭ. Алгоритмическая реализация от-

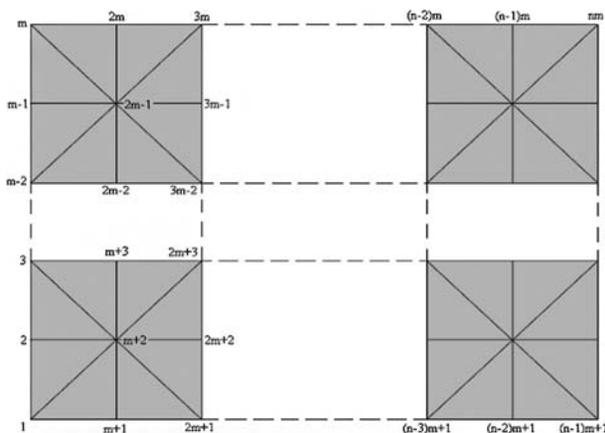


Рисунок 2 — Схема блочного разбиения пластинки на конечные элементы

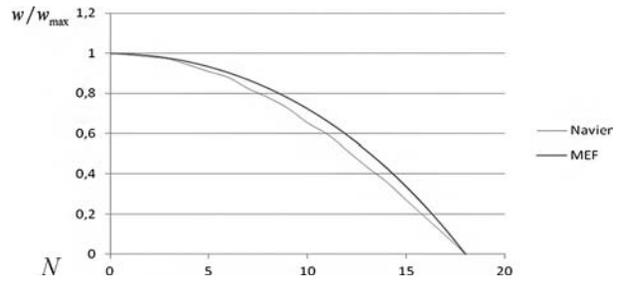


Рисунок 3 — Совмещенные графики функций приведенных прогибов (тонкая линия — метод Навье, толстая линия — МКЭ)

меченной задачи выполнена на языке Turbo Pascal с использованием в программе типа переменных расширенной точности «extended», а также концепции рационального хранения элементов ленточной матрицы жесткости в виде вектора ненулевых элементов [3]. Установленная на графиках рисунка 3 наибольшая относительная погрешность сравниваемых характеристик — 23,8 %. Необходимо при этом указать, что в работе [17], посвященной исследованию пластин средней толщины вне теории Кирхгофа с использованием метода Ритца, погрешность при расчете тонких пластин оценивается в 10 %.

Поскольку сходимость двойного геометрического ряда в формуле (3) и гиперболического ряда в формуле (4) давно доказаны [11], то приближение функции прогибов методом Навье может быть осуществлено с учетом некоторого конечного числа первых членов одного из этих рядов. Как показал проведенный в процессе тестирования задач численный эксперимент, в силу аппроксимации с учетом первых двадцати пяти членов ряда Леви (4) результаты выполненных расчетов вполне могут быть квалифицированы не как приближенные, а как точные.

На второй стадии исследований рассматривается случай упругого поперечного изгиба тонкой жесткой пластинки (см. рисунок 1), предполагаемой прямоугольной при  $n = 2m$  на рисунке 2 и при  $a = 2b$  в равенствах (2)–(4).

Таблица — Картина сходимости приведенного прогиба особой точки пластинки

	$\bar{w}_{cp}$ по МКЭ	$\bar{w}_{cp}$ по Навье
$m = n = 3$	$\bar{w}_{cp} = 0,777777778$	$\bar{w}_{cp} = 0,7246$
$m = n = 5$	$\bar{w}_{cp} = 0,778216258$	
$m = n = 7$	$\bar{w}_{cp} = 0,778248233$	
$m = n = 9$	$\bar{w}_{cp} = 0,778252765$	
$m = n = 13$	$\bar{w}_{cp} = 0,778253477$	
$m = n = 15$	$\bar{w}_{cp} = 0,778253336$	
$m = n = 17$	$\bar{w}_{cp} = 0,778253188$	
$m = n = 19$	$\bar{w}_{cp} = 0,77825306$	

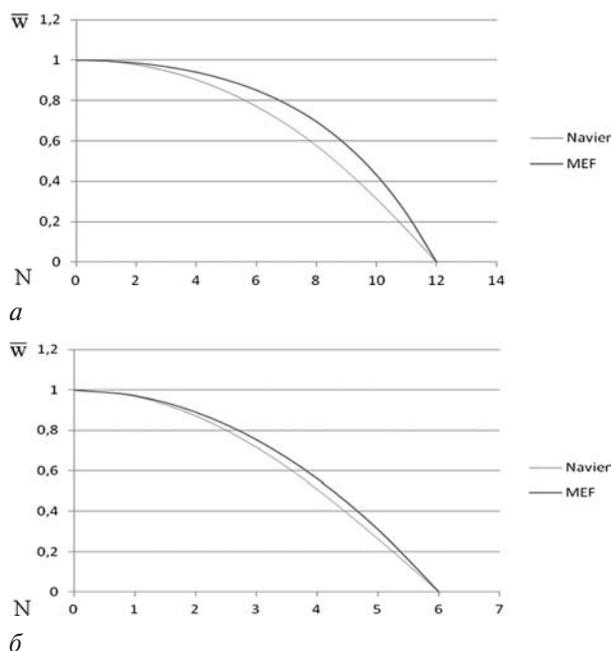


Рисунок 4 — Совмещенные графики осевых функций приведенных прогибов (тонкая линия — метод Навье, толстая линия — МКЭ)

На рисунке 4 *a, б* приводятся графики осевых функций приведенных прогибов, полученных соответственно методом Навье при  $m = n = 25$  в формулах (3) и (4) и МКЭ при  $n - 1 = 2(m - 1) = 12$ , согласно схеме рисунка 2. Наибольшая погрешность, выявленная на графиках рисунка 4, равна 35,7 %.

Необходимо отметить для строгой определенности, что на рисунках 3 и 4 по осям абсцисс производится отчет равноотстоящих узловых точек  $N$  на фиксированной полудлине (полудлине и полуширине) пластинки, а по осям ординат — безразмерной приведенной функции прогибов  $\bar{w}$ .

Здесь необходимо провести некоторые рассуждения, для того чтобы выяснить причину расхождения численных результатов, генерированных, с одной стороны, на основе метода Навье в теории Кирхгофа и, с другой стороны, в силу плоско-пространственной задачи МКЭ, которая никоим образом не нуждается в гипотезе Кирхгофа. Во-первых, следует подчеркнуть, что расчетная схема, в точности удовлетворяющая гипотезе Кирхгофа, есть расчетная схема чистого изгиба, независимо от того, идет ли речь о балках, пластинках или оболочках. Отсюда, как следствие, возникает вполне резонное недоумение, почему пластинка, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой, всегда должна прогибаться так, как это могло бы происходить лишь в отдельных частных случаях нагружения моментами? Во-вторых, принимая расчетную схему чистого изгиба за универсальный эталон вывода дифференциальных уравнений, нетрудно удостовериться в отсутствии всякой объемной деформации элемента

в виде произвольно взятого кольцевого сектора. Из этого следует, что в дифференциальных уравнениях Ламе вовсе не обязательно учитывать нелинейные члены, зависящие от производной от объемной деформации по координатам. Встает второй риторический вопрос: не достаточно ли ограничиться рассмотрением гармонических дифференциальных уравнений для описания прогибов пластинок и оболочек, вместо того чтобы прибегать к решению более сложных бигармонических дифференциальных уравнений? Таким образом интерпретируется аналитическая аргументация корректности дифференциального уравнения Пуассона для описания прогибов тонких жестких пластинок в ущерб классическим решениям (3) и (4) метода Навье в теории Кирхгофа.

**Заключение.** Итоги проведенного сравнительного анализа метода Навье в теории Кирхгофа и плоско-пространственной задачи МКЭ на примерах расчета функций приведенных прогибов прямоугольных тонких жестких пластин, подвергаемых поперечному изгибу, свидетельствуют о значительном расхождении соответствующих численных результатов, а именно — на 23,8 % и 35,7 %. Из вышесказанного становится ясно, что указанные расхождения специально введенных функций состояния исследуемого класса пластин могут проистекать лишь вследствие заведомо принятой в методе Навье гипотезы неизменности нормали, или гипотезы Кирхгофа, в которой плоско-пространственная задача МКЭ нисколько не нуждается. Отсюда можно заключить о высокой эффективности применения плоско-пространственной задачи МКЭ в процессе исследования поперечного изгиба, вследствие чего напрашивается вывод о первостепенной целесообразности использования предложенной модификации МКЭ в расчетной практике наиболее ответственных отраслей промышленности, оперирующих в пределах (5–12)-го качественных элементов конструкций, таких как космическая техника, ракетостроение, самолетостроение и приборостроение. Речь идет в первую очередь о расчете фюзеляжей, крыльев, корпусов, днищ, лопостей турбин и т. д. Представленная методика численного исследования поперечного изгиба может одинаково успешно применяться во многих других приоритетных отраслях промышленности в решении широкого класса инженерно-технических задач.

*Автор выражает признательность старшему коллеге — кандидату физико-математических наук Санояну Ю.Г. — за помощь в выборе расчетных примеров. Автор выражает признательность рецензенту статьи за помощь в подготовке данной статьи к публикации.*

## Список литературы

- Геворкян, Г.А. Плоско-пространственная задача метода конечных элементов / Г.А. Геворкян // Механика машин, механизмов и материалов. — 2014. — № 1(26). — С. 49–52.
- Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. — Москва, 1975.
- Bathe, K.J. Numerical methods in finite element analysis / K.J. Bathe, E.L. Wilson. — Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1976.
- Reddy, J.N. An introduction to the finite element method / J.N. Reddy. — 3rd ed. — New York: McGraw-Hill, 2006.
- Logan, Daryl L. A first course in the finite element method / Daryl L. Logan. — Fifth ed. — Nelson Engineering, 2011.
- Морозов, Н.Ф. Обобщенная модель Тимошенко–Рейсснера для многослойной пластины / Н.Ф. Морозов, П.Е. Товстик, Т.П. Товстик // Изв. РАН, Механика твердого тела. — 2016. — № 5. — С. 22–35.
- Зверьяев, Е.М. Непротиворечивая теория тонких упругих оболочек / Е.М. Зверьяев // Прикладная математика и механика. — 2016. — № 5. — С. 580–596.
- Conley, R. Overcoming element quality dependence of finite elements with adaptive extended stencil FEM / R. Conley, T.J. Delaney, X. Jiao // Int. J. for Num. Meth. In Eng. — 2016 — Vol. 108, № 9. — Pp. 1054–1085.
- Natarajan, S. Virtual and smoothed finite elements: A connection and its application to polygonal/polyhedral finite element methods / S. Natarajan, S. Bordas, E.T. Ooi // Int. J. for Num. Meth. In Eng. — 2015. — Vol. 104, № 13. — Pp. 1173–1199.
- Alvares Dias, L. The construction of plate finite elements using wavelet basis functions / L. Alvares Dias, V. Vampa, M.T. Martin // Revista investigacion operacional. — Vol. 30, № 3. — 2009. — Pp. 193–204.
- Тимошенко, С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко. — М., 1948.
- Ляв, А. Математическая теория упругости / А. Ляв. — М. — Л., 1935.
- Феодосьев, В.И. Соппротивление материалов / В.И. Феодосьев. — М., 1970.
- Демидов С.П. Теория упругости / С.П. Демидов. — М., 1979.
- Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. — М.: Мир, 1975.
- Геворкян, Г.А. Трактовка геометрического смысла конечных разностей и производной функции на основе использования аппарата МКЭ / Г.А. Геворкян // Механика машин, механизмов и материалов. — 2016. — № 2(35). — С. 95–98.
- Терегулов, И.Г. К теории пластин средней толщины / И.Г. Терегулов // Тр. конф. по теории пластин и оболочек / Казанский гос. ун-т. — Казань, 1961. — Вып. 1. — С. 367–375.

GEVORGYAN Hrant A., Ph. D. in Eng.

Researcher

E-mail: hrgevorkian@mail.ru

Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of the Republic of Armenia, Yerevan, Republic of Armenia

Received 29 February 2016.

## CALCULATION OF ELASTIC DEFLECTIONS OF THIN STIFF PLATES BASED ON THE FINITE ELEMENTS METHOD OUT OF THE KIRCHHOFF'S THEORY

*In this article numerical results, obtained by the FEM plane-spatial problem solution, in the case of an elastic flexion problem about rectangular freely supported under action of evenly distributed load of homogeneous and isotropic thin stiff plates, are discussed. A comparison analysis of results, generated, on the one side, without respect of the Kirchhoff's hypothesis, and, on the other side, by the Navier's method within the limits of the Kirchhoff's hypothesis justify respecting to this class of problems a high efficiency of the FEM new modification compared to the methods using the Kirchhoff's hypothesis.*

**Keywords:** *finite element method, Navier's method, Kirchhoff's theory, plane-spatial problem, normal invariability hypothesis, thin stiff plates, membranes, relative function of deflections*

### References

- Gevorgyan H. Plosko-prostranstvennaja zadacha metoda konechnyh jelementov [A Plane-Spatial Problem in the Finite Element Method]. *Mehanika mashin, mehanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2014, no. 1(26), pp. 49–52.
- Zienkiewicz O. *Metod konechnyh jelementov v tehnike* [The Finite Element Method in Engineering Science]. Moscow, 1977.
- Bathe K.J., Wilson E.L. *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1976.
- Reddy J.N. *An Introduction to the Finite Element Method*. New York, McGraw-Hill, 2006.
- Daryl L. Logan. *A First Course in the Finite Element Method*. Nelson Engineering, 2011.
- Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P. Obobshhennaja model' Timoshenko–Rejssnera dlja mnogoslajnoj plastiny [Generalized model of Tomoshenko–Reissner for multiplayer plate]. *Izv. RAN. Mehanika tverdogo tela* [News of the RAS. Mechanics of Solids], 2016, no. 5, pp. 22–35.
- Zveriaev E.M. Neprotivorechivaja teorija tonkih uprugih obolochek [Noncontradictory theory of thin elastic shells]. *Prikladnaja matematika i mehanika* [Applied mathematics and mechanics], 2016, no. 5, pp. 580–596.
- Conley R., Delaney T.J., Jiao X. Overcoming element quality dependence of finite elements with adaptive extended stencil FEM. *Int. J. for Num. Meth. In Eng.*, 2016, vol. 108, no. 9, pp. 1054–1085.
- Natarajan S., Bordas S., Ooi E.T. Virtual and smoothed finite elements: A connection and its application to polygonal/

- polyhedral finite element methods. *Int. J. for Num. Meth. In Eng.*, 2015, vol. 104, no. 13, pp. 1173–1199.
10. Alvares Dias L., Vampa V., Martin M.T. The construction of plate finite elements using wavelet basis functions. *Revista investigacion operacional*, 2009, vol. 30, no. 3, pp. 193–204.
  11. Timoshenko S. *Plastinki i obolochki* [Theory of Plates and Shells]. Moscow, 1964.
  12. Love A. *Matematicheskaja teorija uprugosti* [A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity]. Moscow, 1944.
  13. Feodosiev V. *Soprotivlenie materialov* [Strength of Materials]. Moscow, 1970.
  14. Demidov S. *Teorija uprugosti* [Theory of Elasticity]. Moscow, 1979.
  15. Nowacki B. *Teorija uprugosti* [Theory of Elasticity]. Moscow, 1975.
  16. Gevorgyan H. Traktovka geometricheskogo smysla konechnyh raznostej i proizvodnoj funkcii na osnove ispolzovanija apparata MKJe [An Interpretation of the Geometric Meaning of the Finite Difference and the Function Derivative Through the Use of the Finite Element Method Tools]. *Mehanika mashin, mehanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2016, no. 2(35), pp. 95–98.
  17. Teregulov I. K teorii plastin srednej tolshhiny [Theory of plates of medium thickness]. *Trudy konf. po teorii plastin i obolochek* [Proc. Conf. on the Theory of Plates and Shells]. Kazan, 1961, pp. 367–375.