

УДК 539.4

А.П. ЯНКОВСКИЙ, д-р физ.-мат. наук

ведущий научный сотрудник лаборатории «Физики быстропротекающих процессов»

E-mail: yankovsky_ap@rambler.ru

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 07.12.2016.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ БАЛОК НЕРЕГУЛЯРНОЙ СЛОИСТО-ВОЛОКНИСТОЙ СТРУКТУРЫ

В приближении Кармана сформулирована начально-краевая задача динамического упругопластического деформирования гибких композитных балок нерегулярной слоисто-волоконистой структуры с учетом их ослабленного сопротивления поперечному сдвигу. Балки состоят из стенок и несущих слоев (полок). Стенки могут быть армированы продольно или перекрестно в своей плоскости, а полки усиливаются в продольном направлении. Механическое поведение материалов компонентов композиции описывается соотношениями теории пластического течения с изотропным упрочнением. Построена явная схема типа «крест» для численного интегрирования поставленной начально-краевой задачи, согласованная с пошаговой схемой, использованной для моделирования упругопластического деформирования композитного материала каждого слоя балки. Проведены расчеты динамического и квазистатического изгибного поведения однородных и армированных балок двутаврового поперечного сечения. Выяснено, что при некоторых типах металлокомпозиций классическая теория изгиба может оказаться неприемлемой для проведения таких расчетов для относительно длинных балок. Для проведения адекватных расчетов упругопластического деформирования композитных балок слоисто-волоконистой нерегулярной структуры необходимо использовать теорию Тимошенко, учитывающую ослабленное сопротивление стенок таких балок поперечным сдвигам. Показано, что при динамическом нагружении композитных балок остаточные прогибы имеют значительно большие по модулю значения, чем в случае их квазистатического нагружения с тем же уровнем нагрузки.

Ключевые слова: слоистые балки, армирование, теория пластического течения, теория Тимошенко, динамический изгиб, геометрическая нелинейность, схема типа «крест»

Введение. Тонкостенные элементы конструкций из композиционных материалов находят все более широкое применение в авиа-, судо- и машиностроении [1–6 и др.]. Повреждаемость этих элементов во многом определяет возможность дальнейшей эксплуатации содержащих их изделий, поэтому проблема адекватного расчета механического (в том числе и динамического [7]) поведения тонкостенных элементов является одной из актуальных в механике деформируемого твердого тела. Тонкостенные конструкции типа пластин и оболочек, как правило, подкрепляются силовым набором, собранным из элементов балочно-стержневого типа [8], причем проведенные ранее исследования показывают, что рационально спроектированные тонкостенные элементы конструкций должны иметь слоисто-волоконистую структуру [9–12 и др.].

При интенсивном нагружении, характерном для современных инженерных изделий, их материалы ведут себя неупруго, поэтому особую важность приобретает проблема моделирования упругопластического поведения тонкостенных

элементов композитных конструкций, в том числе и балочно-стержневого типа. На данный момент времени эта проблема находится в стадии становления. Так, в [11–13 и др.] изучалось статическое и динамическое поведение неупругих армированных балок. Однако эти исследования проводились в рамках классической теории, не учитывающей поперечные сдвиги в конструкциях. В работе [14] показано, что в случае квазистатического нагружения балок нерегулярной слоисто-волоконистой структуры в них необходимо учитывать поперечные сдвиги в стенке. При этом результаты в [14] были получены на базе определяющих соотношений деформационной теории пластичности [15]. Динамическое поведение слоистых балок, упругопластическое деформирование слоев которых описывается соотношениями теории течения с изотропным упрочнением, исследовалось в [16, 17 и др.], при этом учитывалось их ослабленное сопротивление поперечным сдвигам, в частности в тонких стенках таких балок.

Настоящее исследование посвящено моделированию динамического изгиба композитных

балок нерегулярной слоисто-волоконистой структуры с учетом их ослабленного сопротивления поперечным сдвигам, упругопластическое поведение материалов компонентов композиции которых описывается соотношениями теории течения с изотропным упрочнением [15]. Для численного интегрирования задачи используется метод шагов по времени.

Постановка задачи и метод решения. Рассмотрим прямолинейную балку длиной L (рисунок 1), представляющую собой слоистый пакет нерегулярной структуры. Слои изготовлены из однородных изотропных или квазиоднородно армированных материалов и контактируют без проскальзывания и отрыва.

Согласно известным требованиям рационального проектирования балок [12, 14, 18, 19 и др.], исследуемая конструкция состоит из двух силовых поясов (несущих слоев — полок), соединенных стенкой, которую условно будем называть слоем с номером $m = 0$. Полки, расположенные над стенкой (верхний силовой пояс), пронумеруем снизу вверх от 1 до $M^{(+)}$ ($1 \leq m \leq M^{(+)}$), а несущие слои, лежащие ниже стенки (нижний силовой пояс), пронумеруем сверху вниз от -1 до $-M^{(-)}$ ($-M^{(-)} \leq m \leq -1$, $M^{(-)} > 0$). На рисунке 2 а приведено поперечное сечение пятислойной балки ($M^{(\pm)} = 2$), причем стенка и полки с номерами $m = 2$ и $m = -1$ армированы. На рисунках 2 б, 2 в изображены поперечные сечения балок с тремя слоями ($M^{(\pm)} = 1$), причем на рисунке 2 в полки ($m = \pm 1$) армированы.

Свяжем с балкой прямоугольную декартову систему координат x_i так, чтобы ось x_1 была направлена вдоль балки, а ось x_2 — по ее высоте (см. рисунки 1 и 2 а), а плоскость x_1x_3 ($x_2 = 0$) совпадала со срединным слоем стенки ($m = 0$). Поперечное сечение балки предполагается симметричным относительно вертикальной плоскости x_1x_2 (см. рисунок 2).

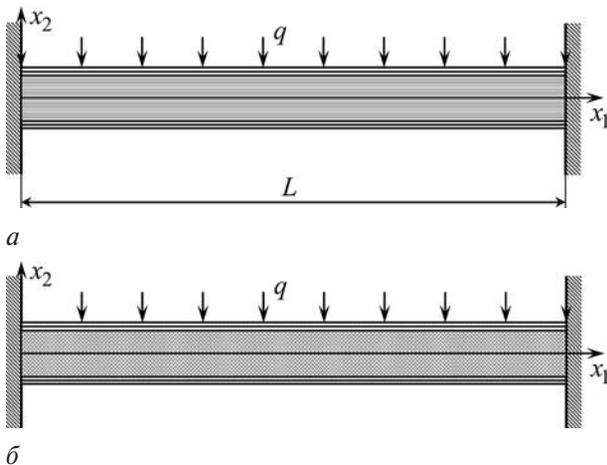


Рисунок 1 — Жестко закрепленные балки нерегулярной слоистой структуры: а — продольное армирование стенки; б — поперекрестное армирование стенки

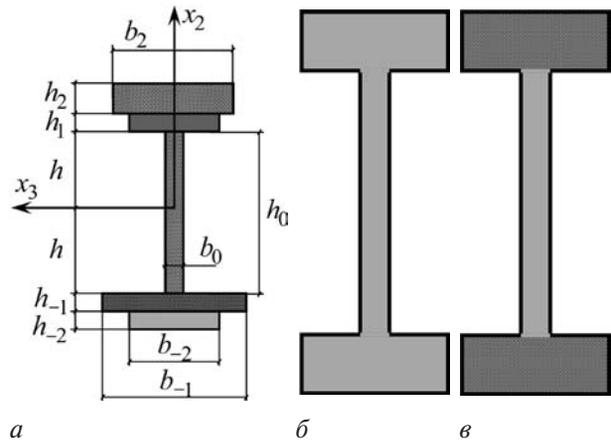


Рисунок 2 — Поперечные сечения слоистой балки: а — произвольной пятислойной структуры (с армированными внешними слоями и стенкой); б — двутавровой однородной; в — двутавровой с армированными полками

Для простоты изложения, как и в [14, 20], ограничимся случаем, когда поперечные сечения каждого слоя являются прямоугольниками с размерами $b_m, h_m, -M^{(-)} \leq m \leq M^{(+)}$ (см. рисунок 2 а), где b_m, h_m — ширина и толщина m -го слоя, причем в случае $m = 0$ под $h_0 = 2h$ понимается высота стенки, а под b_0 — ее толщина. (Более сложная геометрия поперечных сечений слоистых армированных балок рассмотрена, например, в [12].) Относительно размеров b_m и h_m используются те же предположения, что и в [20], т. е. из рассмотрения исключаются тонкостенные стержни [19]. Кручение и изгиб балки в плоскости x_1x_3 не исследуются, т. е. решение задачи не зависит от переменной x_3 .

Для учета ослабленного сопротивления стенки рассматриваемой балки поперечному сдвигу в плоскости x_1x_2 используем теорию Тимошенко [19], т. е. перемещения u_i и сдвиговую деформацию ε_{12} аппроксимируем так (см. (3), (4) в [20]):

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, t) &= u(x_1, t) - x_2\theta(x_1, t); \\ u_2(x_1, x_2, t) &= w(x_1, t); \quad 2\varepsilon_{12}(x_1, x_2, t) \equiv 2\varepsilon_{12}(x_1, t) = \\ &= \partial_1 w(x_1, t) - \theta(x_1, t), \quad 0 \leq x_1 \leq L; \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где w — прогиб; u — продольное перемещение точек срединного слоя стенки ($x_2 = 0$); θ — угол поворота поперечного сечения стержня вокруг оси x_3 ; t — время; ∂_1 — оператор частного дифференцирования по переменной x_1 .

Геометрическая нелинейность задачи учитывается в приближении Кармана (деформации считаются малыми, а повороты поперечного сечения могут быть значительными), поэтому на основании (1) линейная продольная деформация в балке вычисляется по формуле [19]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(x_1, x_2, t) &= \partial_1 u(x_1, t) - x_2\partial_1\theta(x_1, t) + \\ &+ \frac{1}{2}(\partial_1 w(x_1, t))^2, \quad 0 \leq x_1 \leq L; \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Каждый m -й слой может быть усилен $K^{(m)}$ семействами волокон с плотностями армирования

$\omega_k^{(m)}$ ($1 \leq k \leq K^{(m)}$). Относительное объемное содержание связующего материала в пределах представительного элемента композиции этого слоя обозначим $\omega_0^{(m)}$, тогда имеет место условие нормировки

$$\sum_{k=0}^{K^{(m)}} \omega_k^{(m)} = 1; \quad -M^{(-)} \leq m \leq M^{(+)} \quad (3)$$

Предполагается, что упругопластическое поведение материалов компонентов композиции описывается определяющими соотношениями теории пластического течения с изотропным упрочнением [15, 21]. Используя традиционное в теории балок допущение $\sigma_{33}^{(m)} = 0$, $-M^{(-)} \leq m \leq M^{(+)}$ [16–19 и др.], получим следующее линеаризованное эффективное соотношение, связывающее осредненные скорости деформаций $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(m)}$ и напряжений $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(m)}$ в композиции m -го слоя [22]:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(m)} = \mathbf{B}^{(m)} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(m)}; \quad -M^{(-)} \leq m \leq M^{(+)}, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(m)} &= \{ \dot{\sigma}_{11}^{(m)}, \dot{\sigma}_{22}^{(m)}, \dot{\sigma}_{12}^{(m)}, \dot{\sigma}_{13}^{(m)}, \dot{\sigma}_{23}^{(m)} \}^*; \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(m)} &= \{ \dot{\varepsilon}_{11}^{(m)}, \dot{\varepsilon}_{22}^{(m)}, \dot{\varepsilon}_{12}^{(m)}, \dot{\varepsilon}_{13}^{(m)}, \dot{\varepsilon}_{23}^{(m)} \}^*; \end{aligned} \quad (5)$$

$\mathbf{B}^{(m)}$ — 5×5 -матрица, определяемая соотношением (33) из [22] для каждого слоя; $\sigma_{ij}^{(m)}$, $\varepsilon_{ij}^{(m)}$ — компоненты осредненных напряжений и деформаций в композиции m -го слоя; $\dot{}$ — дифференцирование по времени t ; $*$ — операция транспонирования.

Далее считаем, что полки армированы только в продольном направлении x_1 (как это традиционно принято делать [11, 12]), поэтому в рамках теории Тимошенко с приемлемой для инженерных приложений точностью можно считать, что в несущих слоях приближенно реализуется одноосное напряженное состояние, т. е.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(m)} &\equiv 0; \quad \dot{\sigma}_{ij}^{(m)} \equiv 0; \quad -M^{(-)} \leq m \leq M^{(+)}, \\ m &\neq 0; \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad \text{кроме } i = j = 1. \end{aligned} \quad (6)$$

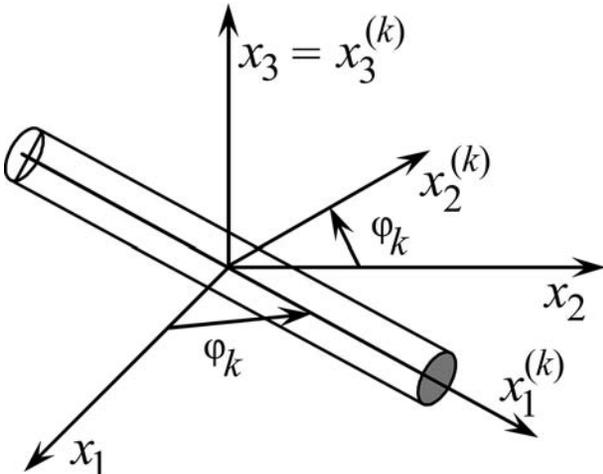


Рисунок 3 — Система координат, связанная с арматурой k -го семейства в стенке

Стенка может быть перекрестно армирована в плоскости $x_1 x_2$, причем направления армирования k -м семейством волокон определяются углами φ_k , отсчитываемыми от продольной оси x_1 (рисунок 3). При этом, согласно рисунку 2 а и соотношениям (1) и (2), в стенке реализуется обобщенное плоское напряженное состояние, т. е. с учетом традиционной силовой гипотезы теории Тимошенко [16, 19] в стенке ($m = 0$) можно принять, что

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{(0)} = \sigma_{23}^{(0)} = \sigma_{33}^{(0)} &= 0; \quad \sigma_{22}^{(0)} \approx 0; \\ \dot{\sigma}_{13}^{(0)} = \dot{\sigma}_{23}^{(0)} = \dot{\sigma}_{33}^{(0)} &= 0; \quad \dot{\sigma}_{22}^{(0)} \approx 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Соотношения (4) с учетом (5)–(7) можно преобразовать к следующему виду:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{11}^{(m)} = a_{11}^{(m)} \dot{\varepsilon}_{11}^{(m)}; \quad -M^{(-)} \leq m \leq M^{(+)}, \quad m \neq 0; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{11}^{(0)} = a_{11}^{(0)} \dot{\varepsilon}_{11}^{(0)} + a_{12}^{(0)} \dot{\varepsilon}_{12}^{(0)}; \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{12}^{(0)} = a_{21}^{(0)} \dot{\varepsilon}_{11}^{(0)} + a_{22}^{(0)} \dot{\varepsilon}_{12}^{(0)}; \\ |x_2| \leq h; \quad 0 \leq x_1 \leq L, \end{aligned} \quad (9)$$

где $a_{ij}^{(m)}$ — приведенные эффективные характеристики «жесткости» композиции m -го слоя, получающиеся из элементов $b_{nl}^{(m)}$ ($n, l = \overline{1, 5}$) матриц $\mathbf{B}^{(m)}$ (см. (4)) в процессе исключения из рассмотрения компонентов скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(m)}$ вектор-столбцов $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(m)}$ в несущих слоях за счет равенств (6) и в стенке за счет (7). Переход от определяющих соотношений (4) с учетом (5) к уравнениям (8), (9), основанный на использовании равенств (6), (7), является традиционным для тонкостенных элементов конструкций, поэтому не будем приводить здесь выражения для коэффициентов $a_{ij}^{(m)}$ через $b_{nl}^{(m)}$, так как эти выражения достаточно громоздки, а их вывод элементарен.

Для получения кинематических соотношений, связывающих $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(m)}$ со скоростями движения точек балки (т. е. с \dot{u} и \dot{w}), достаточно продифференцировать по времени t выражения для деформаций ε_{12} и ε_{11} (см. (1), (2)), тогда

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{11}^{(m)}(x_1, x_2, t) = \partial_1 \dot{u}(x_1, t) - x_2 \partial_1 \dot{\theta}(x_1, t) + \\ + \partial_1 w \partial_1 \dot{w}; \quad -M^{(-)} \leq m \leq M^{(+)}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} 2\dot{\varepsilon}_{12}^{(0)}(x_1, t) = \partial_1 \dot{w}(x_1, t) - \dot{\theta}(x_1, t), \\ |x_2| \leq h; \quad 0 \leq x_1 \leq L; \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Равенства (10) справедливы для всех слоев балки, а соотношение (11) — для стенки ($m = 0$).

К определяющим (8), (9) и кинематическим (10), (11) соотношениям необходимо добавить уравнения движения гибкой балки, которые в приближении Кармана имеют вид [16, 19 и др.]:

$$\begin{aligned} R_1 \ddot{u} &= \partial_1 (F_{11} - F_{12} \theta) - p(x_1, t) \partial_1 w; \\ R_1 \dot{w} &= \partial_1 (F_{12} + F_{11} \partial_1 w) + p(x_1, t); \\ R_2 \ddot{\theta} &= F_{12} - \partial_1 M_{11}, \quad 0 \leq x_1 \leq L; \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned}
 F_{11}(x_1, t) &= \iint_S \sigma_{11} dS = \sum_{m=-M^{(-)}}^{M^{(+)}} \iint_{S_m} \sigma_{11}^{(m)} dS; \\
 F_{12}(x_1, t) &= \iint_{S_0} \sigma_{12}^{(0)} dS = b_0 \int_{-h}^h \sigma_{12}^{(0)} dx_2; \\
 M_{11}(x_1, t) &= \iint_S \sigma_{11} x_2 dS = \sum_{m=-M^{(-)}}^{M^{(+)}} \iint_{S_m} \sigma_{11}^{(m)} x_2 dS; \\
 R_1 &= \sum_{m=-M^{(-)}}^{M^{(+)}} \iint_{S_m} \rho^{(m)} dS = \sum_{m=-M^{(-)}}^{M^{(+)}} \rho^{(m)} S_m; \\
 R_2 &= \sum_{m=-M^{(-)}}^{M^{(+)}} \iint_{S_m} \rho^{(m)} x_2 dS = \sum_{m=-M^{(-)}}^{M^{(+)}} \rho^{(m)} S_m x_2^{(m)}; \\
 \rho^{(m)} &= \sum_{k=0}^{K^{(m)}} \rho_k^{(m)} \omega_k^{(m)}, \quad -M^{(-)} \leq m \leq M^{(+)};
 \end{aligned} \tag{13}$$

p — распределенная погонная нагрузка, действующая по нормали к изогнутой оси балки (на рисунке 1 изображен случай $p = -q = \text{const}$); F_{11}, F_{12} — продольная и поперечная силы; M_{11} — изгибающий момент; S — общая площадь поперечного сечения балки; S_m — площадь поперечного сечения m -го слоя (в настоящем исследовании $S_m = b_m h_m$); $\rho_k^{(m)}$ — объемная плотность материала k -го компонента композиции в m -м слое; $x_2^{(m)}$ — ордината центра тяжести поперечного сечения m -го слоя.

Для однозначного интегрирования рассматриваемой задачи необходимо использовать начальные и граничные условия. Как обычно предполагаем, что в начальный момент времени $t = t_0$ балка находится в естественном состоянии, поэтому начальные условия имеют вид:

$$\begin{aligned}
 u(x_1, t_0) = w(x_1, t_0) = 0; \quad \theta(x_1, t_0) = 0; \\
 \dot{u}(x_1, t_0) = \dot{w}(x_1, t_0) = 0; \quad \dot{\theta}(x_1, t_0) = 0; \quad 0 \leq x_1 \leq L.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Граничные условия для балки могут быть весьма разнообразны. Так как они общеизвестны [19], не будем их здесь приводить, укажем лишь, что в случае, изображенном на рисунке 1, выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned}
 u(x_1^*, t) = w(x_1^*, t) = 0; \quad \theta(x_1^*, t) = 0, \\
 x_1^* = 0, L; \quad t \geq 0.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Таким образом, начальные (14) и граничные (15) условия позволяют однозначно проинтегрировать начально-краевую задачу динамического упругопластического изгиба балок, изображенных на рисунке 1.

Для численного интегрирования рассматриваемой задачи используем метод шагов по времени [7, 13, 16, 22 и др.], т. е. будем разыскивать решение в дискретные моменты времени $t_{n+1} = t_n + \tau$, где $\tau = \text{const} > 0$ — шаг по времени.

Предполагаем, что в моменты времени t_s уже известны значения следующих функций:

$$\begin{aligned}
 {}^s u(x_1) &\equiv u(x_1, t_s); \quad {}^s w(x_1) \equiv w(x_1, t_s); \\
 {}^s \theta(x_1) &\equiv \theta(x_1, t_s); \quad {}^s \sigma_{11}^{(m)}(x_1, x_2) \equiv \sigma_{11}^{(m)}(x_1, x_2, t_s); \\
 {}^s \sigma_{12}^{(0)}(x_1, x_2) &\equiv \sigma_{12}^{(0)}(x_1, x_2, t_s); \\
 {}^s p(x_1) &\equiv p(x_1, t_s); \quad 0 \leq x_1 \leq L; \\
 s &= n-1, n; \quad -M^{(-)} \leq m \leq M^{(+)},
 \end{aligned} \tag{16}$$

тогда по формулам (13) в момент времени t_n можем вычислить все величины, входящие в правые части уравнений (12).

Далее для аппроксимации встречающихся производных по времени t используем центральные разности [16, 22, 23 и др.], что позволяет построить явную численную схему. Заменяя в левых частях уравнений (12) вторые производные по времени их конечно-разностными аналогами, с учетом обозначений, аналогичных (16), получим

$$\begin{aligned}
 \frac{R_1}{\tau^2} \left(u - 2u + u \right)^{n+1, n, n-1} &= \partial_1 \left(F_{11} - F_{12} \theta \right)^n - p \partial_1 u^n; \\
 \frac{R_1}{\tau^2} \left(w - 2w + w \right)^{n+1, n, n-1} &= \partial_1 \left(F_{12} + F_{11} \partial_1 w \right)^n + p; \\
 \frac{R_2}{\tau^2} \left(\theta - 2\theta + \theta \right)^{n+1, n, n-1} &= F_{12} - \partial_1 M_{11}, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad n=1, 2, 3...
 \end{aligned} \tag{17}$$

Заменяя в уравнениях (17) производные $\partial_1(\cdot)$ по пространственной переменной x_1 от известных (в силу предположения (16)) функций их конечно-разностными аналогами, получим явную схему типа «крест» [16, 22, 23] для численного интегрирования рассматриваемой задачи. В данной работе использовалась аппроксимация производной $\partial_1(\cdot)$ ее конечно-разностным аналогом второго порядка точности на равномерной по x_1 сетке [23].

Согласно левым частям равенств (17), для начала расчетов по схеме «крест» необходимо знать

не только значения функций u, w, θ (которые с учетом обозначений (16) однозначно определяются из начальных условий (14)), но и значения функ-

ций u, w, θ (при $n = 1$ в (17)), которые получим, используя формулу Тейлора с учетом начальных условий (14) и уравнений (12) при $t = t_0$ [23]:

$$\begin{aligned}
 {}^1 w(x_1) &= {}^0 w(x_1) + \tau \dot{w}(x_1) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{w}(x_1) + O(\tau^3) \approx \frac{\tau^2}{2R_1} p(x_1); \\
 {}^1 u(x_1) &= {}^0 u(x_1) + \tau \dot{u}(x_1) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{u}(x_1) + O(\tau^3) \approx 0; \\
 {}^1 \theta(x_1) &= {}^0 \theta(x_1) + \tau \dot{\theta}(x_1) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{\theta}(x_1) + O(\tau^3) \approx 0,
 \end{aligned} \tag{18}$$

где приближенные равенства выполняются с точностью порядка τ^3 .

Таким образом, соотношения (17) с учетом (14), (15) и (18) позволяют реализовать схему «крест» для численного интегрирования начально-краевой задачи динамического упругопластического

изгиба балок, изображенных на рисунке 1. (Особенности реализации этой схемы применительно к армированным конструкциям подробно изложены в [22].) Для обеспечения устойчивости схемы «крест» необходимо, чтобы шаг по времени τ был выбран с учетом выполнения условия Куранта [16, 22–24 и др.]. В случае балки нерегулярной слоисто-волоконистой структуры выбор шага τ из условия Куранта является самостоятельной весьма трудоемкой задачей [22]. Однако это условие для такой балки будет обязательно выполняться, причем с запасом, если оно выполняется для каждого компонента композиции каждого слоя балки, поэтому в расчетах используем именно такой критерий устойчивости разработанной численной схемы.

Обсуждение результатов расчетов. В качестве модельной задачи исследуем изгибное поведение трехслойных балок, изображенных на рисунке 1 и имеющих длину $L = 2$ м. Слои балок изготовлены из алюминиевого сплава АДМ или представляют композит, состоящий из этого сплава (связующее), армированного стальной проволокой У8А или борными волокнами.

Уругопластическое поведение материалов компонентов композиции при активном нагружении описывается идеализированной диаграммой растяжения–сжатия в виде диаграммы с линейным упрочнением [15]:

$$\sigma_k^{(m)} = \begin{cases} E_k^{(m)} \varepsilon_k^{(m)}, & |\varepsilon_k^{(m)}| \leq \varepsilon_{s,k}^{(m)} \leq \sigma_{s,k}^{(m)} / E_k^{(m)}; \\ \text{sign}(\varepsilon_k^{(m)}) \sigma_{s,k}^{(m)} + E_{s,k}^{(m)} (\varepsilon_k^{(m)} - \text{sign}(\varepsilon_k^{(m)}) \varepsilon_{s,k}^{(m)}), & |\varepsilon_k^{(m)}| > \varepsilon_{s,k}^{(m)}, \end{cases} \quad (19)$$

$$0 \leq k \leq K^{(m)}; \quad -M^{(-)} \leq m \leq M^{(+)},$$

где $\sigma_k^{(m)}$, $\varepsilon_k^{(m)}$ — осевые напряжение и деформация материала k -го компонента композиции m -го слоя; $E_k^{(m)}$, $E_{s,k}^{(m)}$ — модули Юнга и линейного упрочнения того же материала; $\sigma_{s,k}^{(m)}$, $\varepsilon_{s,k}^{(m)}$ — предел текучести и соответствующая ему деформация при растяжении–сжатии того же материала.

Физико-механические характеристики материалов компонентов композиции рассматриваемых балок приведены в таблице, где ν — коэф-

Таблица — Физико-механические характеристики материалов компонентов композиции [25]

Материал	ρ , кг/м ³	ν	σ_s , МПа	E , ГПа	E_s , ГПа	a , м/с
Алюминиевый сплав АДМ	2710	0,3	30	71	0,143	5119
Стальная проволока У8А	7800	0,31	3968	210	6,973	5188
Борные волокна	2550	0,23	3200	410	—	12680

фициент Пуассона материала, a — скорость звука. Борные волокна ведут себя упруго-хрупко [25], поэтому значение модуля упрочнения E_s для них в таблице не приведено.

На балки действуют фронтальные нагрузками следующих видов (см. (12) и (17)) [7]:

$$p(t) = \begin{cases} p_{\max} t / t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}; \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t - t_{\max})], & t > t_{\max} \end{cases} \quad (20)$$

или

$$p(t) = \begin{cases} p_{\max} [1 - \cos(\pi t / t_{\max})] / 2, & 0 \leq t \leq t_{\max}; \\ p_{\max} = \text{const}, & t > t_{\max}, \end{cases} \quad (21)$$

где

$$\alpha = -\ln(0,01) / (t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}; \quad (22)$$

t_{\max} — момент времени, в который нагрузка $p(t)$ достигает по модулю максимального значения p_{\max} ; t_{\min} — момент времени, в который нагрузка $p(t)$ становится пренебрежимо малой по сравнению с p_{\max} (так, формула (22) соответствует случаю $p(t_{\min}) = 0,01 p_{\max}$). При $t_{\max} \rightarrow 0$ и $t_{\min} \rightarrow \infty$ рассматриваемые нагрузки аппроксимируют непрерывно (в случае (20) и (22)) или гладко (в случае (21)) внешнюю нагрузку ступенчатого вида

$$p(t) = p_{\max} H(t), \quad -\infty < t < \infty, \quad (23)$$

где $H(t)$ — функция Хевисайда.

Поперечные сечения слоев рассматриваемых трехслойных ($M^{(\pm)} = 1$) балок (см. рисунки 2 б и 2 в) имеют следующие размеры:

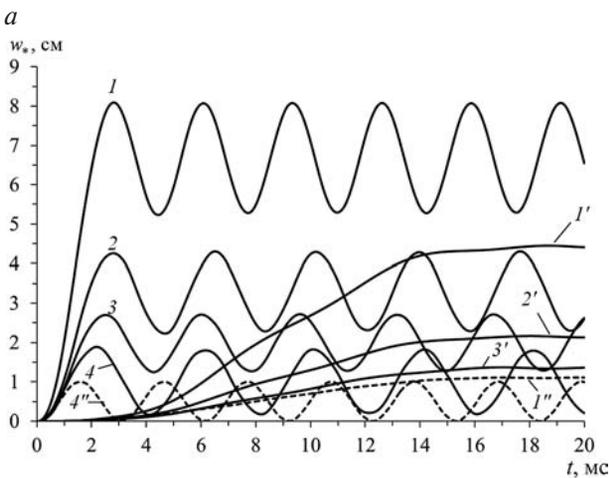
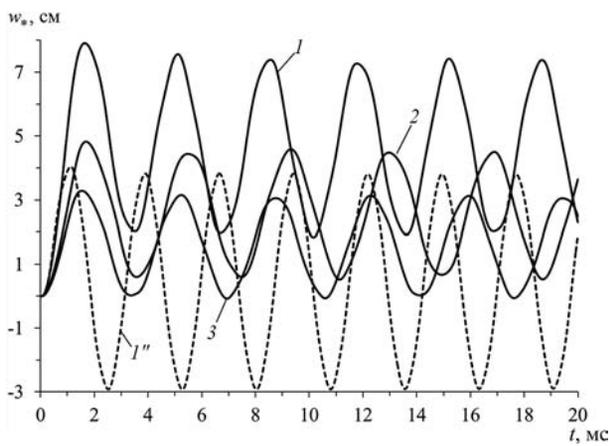
$$h_0 = 183,2 \text{ мм}; \quad b_0 = 5,2 \text{ мм}; \quad h_1 = h_{-1} = 8,4 \text{ мм}; \quad (24)$$

$$b_1 = b_{-1} = 100 \text{ мм},$$

которые соответствуют характерным размерам поперечного сечения двутаврового прокатного профиля № 20 [18].

При проведении численных расчетов вдоль оси балки вводилась равномерная сетка с шагом $\Delta x_1 = L / 200 = 1$ см, а шаг по времени τ выбирался равным 0,2 мкс. При этом условие устойчивости Куранта ($\Delta x_1 / \tau > a$, где $a = \sqrt{E/\rho}$) для всех материалов компонентов композиции, приведенных в таблице, выполняется со значительным запасом. Следовательно, при такой пространственно-временной дискретизации задачи условие Куранта будет выполняться и для всех однородных и композитных балок, изготовленных из этих материалов.

На рисунке 4 изображены зависимости $w_c(t) = w(L/2, t)$, т. е. траектории движения центральных сечений балок ($x_1 = L/2$) в поперечном направлении x_2 (см. рисунок 1). На рисунке 4 а приведены результаты расчетов при нагружении балок динамической нагрузкой (20), (22) с параметрами: $p_{\max} = 1,3$ МН/м, $t_{\max} = 0,1$ мс и $t_{\min} = 2$ мс. Такие значения t_{\max} и t_{\min} характерны для воздействия воздушной взрывной волны [7]. Согласно соотношениям (20) и (22), при $t > 2$ мс внешняя нагрузка практически отсутствует, поэтому колебания при



б

Рисунок 4 — Осцилляции центральных сечений трехслойных балок при кратковременном динамическом нагружении (а) и при квазиступенчатом и квазистатическом нагружениях (б)

$t > 2$ мс на рисунке 4 а можно рассматривать как свободные в окрестности нового искривленного (вызванного появлением остаточных прогибов) положения продольной оси балки.

Кривые 1 и 1'' на рисунке 4 а определены на основе теории Тимошенко (см. раздел 1) и классической теории Бернулли соответственно для однородной трехслойной балки из сплава АДМ. В случае теории Бернулли расчет проводился по численной схеме, аналогичной разработанной в [13], с учетом соотношений (13) за исключением выражения для F_{12} . Сравнение этих кривых показывает, что классическая теория почти вдвое занижает значения максимального прогиба.

Как уже отмечалось, вычисление средних по времени значений $w_m(t)$ при $t > 2$ мс для кривых, изображенных на рисунке 4 а, дает приближенное значение остаточного прогиба центрального сечения балки. Это среднее значение, вычисленное для кривой 1, приближенно равно 4,67 см, а для пунктирной кривой 1'' — 0,45 см, т. е. расчет по теории Бернулли занижает величину остаточного прогиба на 90,4 %. Следовательно, классическая теория может оказаться совершенно неприемлемой для расчета упругопластического динамического изгиб-

ного поведения не только композитных балок, но и однородных балок слоистой структуры (в частности, имеющих поперечные сечения в виде унифицированных прокатных профилей типа двутавров).

Традиционно принято считать, что при изгибном деформировании балок в первую очередь требуется усиливать несущие слои [11, 12 и др.], поэтому сначала исследуем случай армирования полок алюминиевых балок стальной проволокой У8А ($K^{(\pm)} = 1$, $K^{(0)} = 0$). Оба несущих слоя армированы с одинаковой плотностью $\omega_1^{(\pm 1)} = \omega$, а относительное объемное содержание материала связующего в несущих слоях вычисляется на основании равенства (3): $\omega_0^{(\pm 1)} = 1 - \omega$ (в стенке $\omega_0^{(0)} = 1$; см. рисунок 2 в).

Кривая 2 на рисунке 4 а рассчитана по теории Тимошенко при $\omega = 0,7$. На практике это значение считается предельно допустимым для плотностей армирования. Сопоставление кривых 1 и 2 на рисунке 4 а показывает, что усиление полок с предельно допустимым насыщением арматурой приводит к уменьшению как максимального, так и остаточного прогибов примерно на 39,1 и 28,9 % соответственно. В связи с этим целесообразно проследить за изменением величин максимального прогиба w_m и максимальных значений интенсивностей деформаций $\epsilon_m^{(k)}$ в k -м компоненте композиции (в последнем случае максимум разыскивается по всем слоям) в зависимости от плотности армирования ω . На рисунке 5 приведены эти зависимости. Кривые 1 и 1'' на рисунке 5 а соответствуют функции $w_m(\omega)$, рассчитанной по теориям Тимошенко и Бернулли соответственно. Линии же 1, 1' и 1'' на рисунке 5 б характеризуют зависимости $\epsilon_m^{(k)}(\omega)$, определенные по тем же теориям, причем кривая 1 соответствует связующему ($k = 0$), а линия 1' — арматуре ($k = 1$); в случае классической теории интенсивности деформаций в арматуре и связующем совпадают ($\epsilon_m^{(1)} = \epsilon_m^{(0)}$), поэтому пунктирная кривая 1'' является единой для обоих материалов компонентов композиции.

Все указанные кривые на рисунке 5 монотонно убывают, что свидетельствует об эффекте усиления рассматриваемых композитных балок, причем с увеличением плотности армирования полок ω кривые 1, 1' и 1'' на рисунке 5 выполаживаются, т. е. с увеличением ω эффект усиления балок ослабевает. Дополнительные расчеты показывают, что при использовании более жестких армирующих волокон (например, борных или углеродных [25]) эффект выполаживания зависимостей $w_m(\omega)$ и $\epsilon_m^{(k)}(\omega)$ возрастает. Так, на рисунке 5 для сравнения приведены штрихпунктирные кривые 1''', рассчитанные при тех же условиях, но для АДМ-балки с полками, армированными борными волокнами (см. таблицу). Поведение кривой 1''' на рисунке 5 б, характеризующей зависимость $\epsilon_m^{(0)}(\omega)$ для связующего материала, показывает, что при $\omega > 0,2$ максимальное значение интенсивности деформаций в связующем материале (точнее,

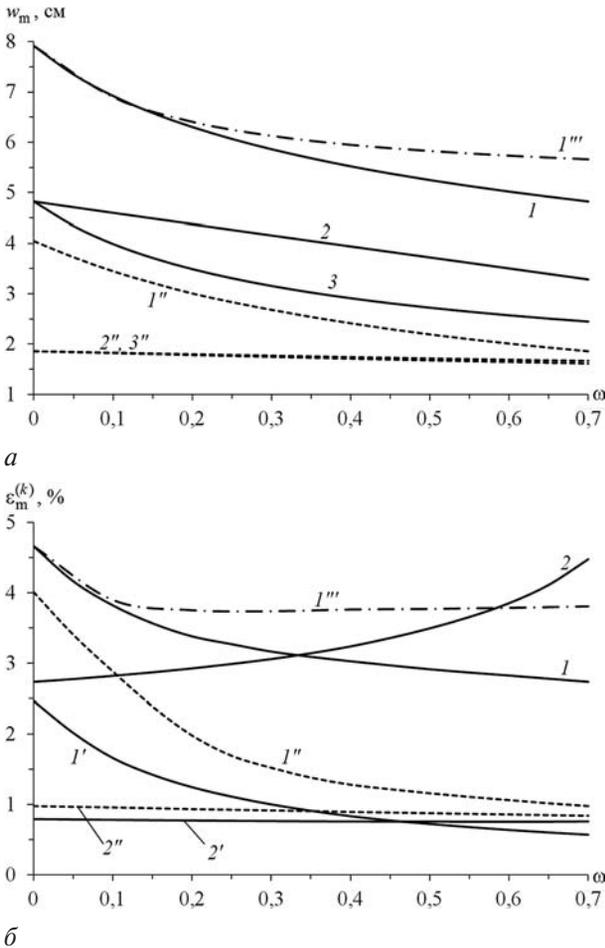


Рисунок 5 — Зависимости максимальных значений прогибов (а) и интенсивностей деформаций в компонентах композиции (б) от плотности армирования слоев балки

в стенке) практически не зависит от изменения количества арматуры в несущих слоях. Следовательно, в этих случаях целесообразно ставить вопрос о рациональном сочетании надежной работы композитной балки (например, по критерию ее податливости) с экономией расхода арматуры в ней.

Поведение кривых 1 и 1'' на рисунке 5 а показывает, что с увеличением плотности армирования полок ω точность определения максимального прогиба w_m , вычисленная по теории Бернулли, существенно уменьшается. Сравнение же кривых 1 и 1'' на рисунке 5 б свидетельствует о том, что этот вывод справедлив и в отношении определения интенсивности деформаций в связующем материале.

Очевидно, что дальнейшего уменьшения податливости композитных балок можно добиться только за счет усиления стенки (при сохранении размеров слоев). Предполагаем, что оба слоя алюминиевой балки усилены стальной проволокой У8А с предельно допустимой плотностью армирования $\omega_1^{(\pm 1)} = 0,7$, а стенка армирована одним семейством этих же волокон ($K^{(0)} = 1$) в продольном направлении ($\varphi_1 = 0$; см. рисунки 1 а и 3) с плотностью $\omega_1^{(0)} = \omega$. Кривая 3 на рисунке 4 а соответствует случаю, когда все слои трехслойной балки армированы в продольном направлении с предельно

допустимым значением плотности армирования $\omega_1^{(\pm 1)} = \omega_1^{(0)} = 0,7$ ($\omega = 0,7$). Ординаты точек локальных максимумов на кривой 3 меньше аналогичных величин для точек кривой 2, что свидетельствует об эффекте усиления балки за счет продольного армирования стенки.

На рисунке 5 кривые 2, 2' и 2'' характеризуют зависимости $w_m(\omega)$ и $\epsilon_m^{(k)}(\omega)$ для случая продольного армирования стенки, причем пунктирные кривые 2'' рассчитаны по теории Бернулли. Линия 2 на рисунке 5 б соответствует зависимости $\epsilon_m^{(0)}(\omega)$ (для связующего материала), а кривая 2' — зависимости $\epsilon_m^{(1)}(\omega)$ (для арматуры), причем максимумы интенсивности деформаций $\epsilon_m^{(k)}(\omega)$, $k = 0,1$ в материалах компонентов композиции выбирались по всем слоям.

Поведение кривой 2 на рисунке 5 а показывает, что с увеличением плотности продольного армирования стенки ω зависимость $w_m(\omega)$ монотонно убывает, причем практически по линейному закону. Линия же 2'' на рисунке 5 а почти горизонтальна. Следовательно, согласно расчетам по теории Бернулли, увеличение плотности армирования стенки ω практически не влияет на уменьшение податливости таких композитных балок, что не соответствует поведению кривой 2 на этом рисунке. Сопоставление ординат точек на кривых 2 и 2'' свидетельствует о том, что и при такой структуре армирования слоистой балки классическая теория не обеспечивает приемлемой точности расчетов ее податливости.

Кривые 2' и 2'' на рисунке 5 б также почти горизонтальны, т. е. максимальные значения интенсивности деформаций в компонентах композиции, рассчитанные по теории Бернулли (линия 2''), и значения аналогичной величины в арматуре, полученные на основе теории Тимошенко (кривая 2'), практически не зависят от плотности армирования стенки при ее усилении в продольном направлении. Однако кривая 2 на рисунке 5 б существенно возрастает, т. е. с увеличением ω происходит ослабление сопротивления продольно армированной стенки поперечным сдвигам, поэтому такой проект армирования стенки рассматриваемой композитной балки нельзя признать рациональным.

Для устранения явления ослабленного сопротивления стенки поперечным сдвигам рекомендуется ее армировать перекрестно двумя ($K^{(0)} = 2$) семействами волокон по направлениям $\varphi_1 = -\varphi_2 = \pi/4$ (см. рисунки 1 б и 3) — ортогональное армирование. Согласно этой рекомендации [18], рассмотрим случай, когда полки по-прежнему армированы продольно с предельно допустимой плотностью $\omega_1^{(\pm 1)} = 0,7$, а стенка перекрестно усилена ($\varphi_1 = -\varphi_2 = \pi/4$) двумя семействами стальной проволоки У8А с одинаковыми плотностями армирования $\omega_1^{(0)} = \omega_2^{(0)}$ (см. рисунок 1 б). Кривые 3 и 3'' на рисунке 5 а характеризуют зависимости

$w_m(\omega)$ (где $\omega = \omega_1^{(0)} + \omega_2^{(0)} = 2\omega_1^{(0)}$), рассчитанные для этого случая по теориям Тимошенко и Бернулли соответственно. Сравнение этих кривых показывает, что и при перекрестном армировании стенки рассматриваемых трехслойных балок для их адекватного расчета необходимо использовать неклассическую теорию.

Пунктирная кривая 3'' визуальнo практически совпадает с линией 2'', но при $\omega > 0$ все же лежит несколько выше. Следовательно, согласно классической теории, перекрестное армирование стенки (см. рисунок 1 б) менее эффективно по критерию минимизации податливости конструкции, чем продольное армирование стенки (см. рисунок 1 а). Однако этот результат противоречит поведению кривых 2 и 3, определенных по теории Тимошенко, так как кривая 3 при $\omega > 0$ лежит ниже линии 2. При этом эффект уменьшения податливости при перекрестном армировании стенки (см. кривую 3) проявляется в значительно большей степени, чем при ее продольном армировании (см. линию 2). Таким образом, при отыскании рациональных структур армирования слоистых балок использование классической теории может привести к совершенно неверным решениям.

Однако не всегда армирование стенки в перекрестных направлениях (см. рисунок 1 б) является наилучшим. Так, в [14] показано, что в случае статического поперечного нагружения трехслойных балок, опертых иначе, чем это изображено на рисунке 1, изготовленных из высокопрочного магниевого сплава ВМ65 и усиленных волокнами карбида кремния, при умеренных температурах лучшим с точки зрения уменьшения податливости является продольное армирование стенки (см. рисунок 1 а), а при высоких температурах, когда прочностные характеристики сплава ВМ65 резко ухудшаются (в силу его термочувствительности) лучшим оказывается перекрестное армирование стенки (см. рисунок 1 б). Следовательно, невозможно заранее предсказать, какая структура армирования стенки слоистой балки будет рациональной при заданных условиях ее опирания и выбранных материалах компонентов композиции.

Выше рассматривался случай динамического кратковременного нагружения балки, когда при $t > 2$ мс нагрузка $p(t)$ практически отсутствует. Однако особый интерес вызывает сравнение поведения композитных балок при их квазистатическом и динамическом нагружении, когда поперечная нагрузка $p(t)$, достигнув своего максимального значения p_{\max} , удерживается на одном уровне ($p(t) = p_{\max}$ при $t \geq t_{\max}$). В связи с этим на рисунке 4 б приведены зависимости $w_*(t)$, полученные при $p_{\max} = 0,3$ МН/м в случаях динамического (кривые 1–4, 4'') и квазистатического (линии 1'–3', 1'') нагружения слоистой балки. При расчете кривых 1–4, 4'' для нагрузки $p(t)$ использовались зависимости (20) и (22) при $t_{\max} = 0,1$ мс и $t_{\min} = 2 \cdot 10^3$ с.

При таком значении t_{\min} на рассматриваемом интервале времени $0 \leq t \leq 20$ мс при $t \geq t_{\max}$ нагрузку можно считать практически постоянной: $p(t) \approx p_{\max}$, $t \geq t_{\max}$, т. е. такая зависимость $p(t)$ аппроксимирует нагрузку ступенчатого типа (23), поэтому далее ее будем называть квазиступенчатой. Кривые 1–3 на рисунке 4 б рассчитаны при тех же структурах армирования трехслойной балки, что и линии 1–3 на рисунке 4 а. Кривые же 1'–3' на рисунке 4 б соответствуют тем же структурам армирования, что и линии 1–3, но определены при квазистатическом нагружении балок, когда поперечная нагрузка $p(t)$ задается по закону (21) при $t_{\max} = 17$ мс.

Пунктирная кривая 1'' получена при тех же условиях, что и сплошная линия 1', но рассчитана по классической теории. Сравнение этих кривых показывает, что и при квазистатическом нагружении однородной трехслойной АДМ-балки двутаврового поперечного сечения (см. (24)) теория Бернулли совершенно непригодна для получения адекватных результатов расчетов ее податливости. Аналогичный вывод справедлив и для армированных слоистых балок при квазистатическом их нагружении.

Кривые 2 и 2' на рисунке 4 б лежат существенно ниже линий 1 и 1' соответственно, чем это имеет место на рисунке 4 а. Следовательно, при квазистатическом или квазиступенчатом динамическом (см. (23)) нагружении эффект усиления балок за счет армирования полок проявляется сильнее, чем при динамическом кратковременном (хотя и более интенсивном) их нагружении (см. кривые 1 и 2 на рисунке 4 а).

Кривые 4 и 4'' на рисунке 4 б рассчитаны по теориям Тимошенко и Бернулли соответственно в случае задания динамической нагрузки квазиступенчатого вида (см. (23)), когда несущие слои балки продольно армированы с предельной плотностью $\omega_1^{(\pm)} = 0,7$, а стенка усилена перекрестно (см. рисунок 1 б) также с предельно допустимой суммарной плотностью армирования: $\omega_1^{(0)} = \omega_2^{(0)} = 0,35$, $\omega = \omega_1^{(0)} + \omega_2^{(0)} = 0,7$ (аналогичные кривые на рисунке 4 а не были изображены, чтобы его не загромождать). Сравнение этих кривых показывает, что и при квазиступенчатом нагружении трехслойной композитной балки классическая теория не гарантирует получения приемлемой точности расчетов динамического поведения такой конструкции даже в случае перекрестного армирования ее стенки.

Кривая 4 на рисунке 4 б лежит значительно ниже линии 3. Это еще раз подтверждает полученный ранее результат: в случае использования АДМ–У8А-композиции перекрестное армирование стенок рассматриваемых трехслойных балок является более эффективным с точки зрения уменьшения их податливости, чем усиление стенок в продольном направлении с тем же расходом арматуры.

Сравнение правых участков кривых 1'–3' с поведением линий 1–3 на рисунке 4 б показывает,

что при упругопластическом деформировании соответствующих балок средние за один период колебаний значения прогиба (см. кривые 1–3) значительно превосходят значения прогиба, вычисленные при квазистатическом нагружении конструкции с той же интенсивностью нагрузки p_{\max} . Это свидетельствует о том, что в рассматриваемых трехслойных однородных и композитных балках при их динамическом квазиступенчатом нагружении возникают значительно большие остаточные прогибы, чем при квазистатическом нагружении с тем же уровнем нагрузки.

На рисунке 6 изображены зависимости w от x_1 , определенные в моменты времени, когда прогиб центрального сечения $x_1 = L/2$ достигает максимального значения w_m . Номера кривых 1, 1' и 1'' на рисунке 6 соответствуют номерам кривых на рисунке 4 б. Кривая же 1''' рассчитана по теории Бернулли для однородной трехслойной АДМ-балки при динамическом квазиступенчатом нагружении (аналогичная кривая на рисунке 4 б не изображена).

Кривые 1'' и 1''' на рисунке 6 в точках $x_1 = 0, L$ имеют горизонтальные касательные, что является следствием неучета поперечных сдвигов в стенке балки в рамках классической теории. Поведение же кривых 1 и 1' в окрестности этих точек закрепления балки свидетельствует о том, что как при динамическом квазиступенчатом (линия 1), так и при квазистатическом (кривая 1') нагружении такой слоистой балки в ее стенке активно развиваются упругопластические деформации поперечного сдвига. Сопоставление кривых 1, 1''' и 1', 1'' на рисунке 6 вновь подтверждает, что теория Бернулли вообще неприемлема для адекватного расчета механического поведения рассматриваемой балки.

Приведенные выше результаты были получены для относительно высоких балок ($H/L = 1/10$, где, согласно (24) и рисунку 2 в, $H = 20$ см — высота трехслойной балки). Дополнительные расчеты показали, что и для относительно невысоких балок ($H/L = 1/20$) классическая теория может

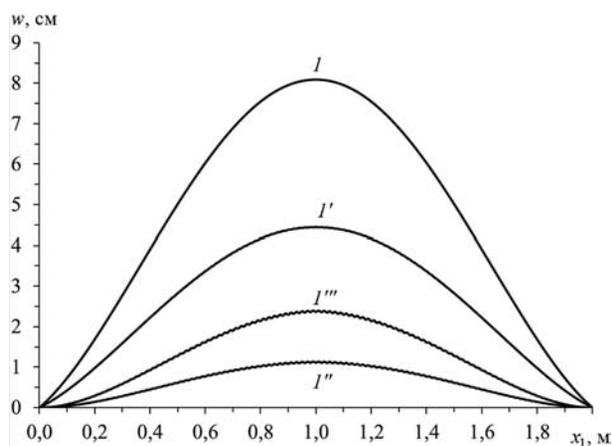


Рисунок 6 — Эпюры максимальных прогибов трехслойной однородной балки, рассчитанные по разным теориям

оказаться неприемлемой для адекватного расчета упругопластического изгиба таких слоистых конструкций. Так, при квазиступенчатом нагружении (с интенсивностью $p_{\max} = 0,1$ МН/м) однородной трехслойной АДМ-балки длиной $L = 4$ м ($H/L = 1/20$) теория Бернулли более чем вдвое занижает значение w_m по сравнению с теорией Тимошенко.

Достоверность полученных выше результатов косвенно подтверждается многочисленными исследованиями, проведенными ранее по обоснованию применимости теории Тимошенко для адекватного описания механического поведения слоистых стержней и балок [16, 17, 19 и др.]. Апробация же численной схемы типа «крест» для расчета динамического поведения композитных конструкций (в том числе и при упругопластическом их деформировании в случаях слоистых структур с изотропными слоями) достаточно подробно проведена в [16, 17 и др.], где, в частности, приведены ссылки и на публикации, в которых сравниваются численные решения, полученные по этой схеме, с результатами натурных экспериментов. Эти сравнения позволяют сделать вывод о том, что с точки зрения инженерных приложений схема типа «крест», примененная к разрешающим уравнениям теорий типа Тимошенко, дает вполне приемлемые результаты расчетов. Верификация структурной модели механики композитов, на основе которой в [22] были получены определяющие соотношения для упругопластической волокнистой среды, использованные в настоящем исследовании (см. (4)), в предельном случае линейно-упругого поведения материалов фаз композиции была проведена в [26], где продемонстрировано вполне удовлетворительное совпадение расчетных значений эффективных характеристик композитной среды с экспериментальными данными.

В настоящей работе исследовались, по сути, только особенности деформирования композитных балок. Вне рассмотрения пока остаются вопросы, связанные с прочностью таких конструкций. Объясняется это тем, что в подавляющем большинстве случаев пластичные материалы разрушаются при больших деформациях, превышающих по модулю 5 % (в частности, алюминиевый сплав АДМ и стальная проволока У8А [25]). На сегодняшний день отсутствуют структурные модели упругопластических армированных сред, учитывающих большие деформации материалов фаз композиции. Используемая в данном исследовании структурная модель из [22] адекватно описывает упругопластическое поведение волокнистых сред лишь при малых деформациях. С другой стороны, в силу осциллирующего характера динамического поведения упругопластических композитных балок в связующем материале их слоев могут возникнуть знакопеременные пластические деформации (особенно при повторных,

а тем более знакопеременных, нагружениях), которые даже будучи малыми могут приводить к накоплению поврежденности связующей матрицы за счет малоциклового усталости и к последующему ее разрушению. Для описания таких процессов накопления поврежденности материалов фаз композиции необходимо использовать более сложные модели упругопластического поведения материалов, например, предложенные в [27] (а не простейшую модель с изотропным упрочнением [21], которая была использована в [22]) и учитывающие кинетику накопления поврежденности. Однако на сегодняшний день также отсутствуют структурные модели механики волокнистых композитов, построенные на усложненных теориях пластичности. Кроме того, при применении таких моделей потребуются разработка специфических устойчивых численных методов, которые, скорее всего, будут отличаться от схемы типа «крест», использованной в настоящем исследовании.

Заключение. Анализ результатов расчетов упругопластического поведения слоистых и слоисто-волокнистых балок нерегулярной структуры, полученных (результатов) в рамках двух теорий изгибного деформирования таких тонкостенных элементов конструкций, показал, что классическая теория может приводить к совершенно неприемлемым результатам как при динамическом, так и квазистатическом их нагружении. Эта теория может оказаться непригодной даже в случаях расчетов металлических балок, имеющих двутавровые поперечные сечения унифицированного прокатного профиля, так как может занижать податливость таких балок более чем вдвое. Для получения же адекватного представления об упругопластическом деформировании композитных балок слоисто-волокнистой структуры необходимо использовать неклассическую теорию Тимошенко, учитывающую ослабленное сопротивление тонких стенок таких элементов конструкций поперечным сдвигам.

Расчет двутавровых балок из низкопрочного алюминиевого сплава АДМ показал, что за счет армирования их полок стальной проволокой У8А можно добиться снижения остаточных прогибов не более чем на 30 %. Дополнительного значительного уменьшения податливости таких балок можно достичь за счет усиления их стенок. При этом стенки из сплава АДМ целесообразно армировать перекрестно под углами $\pm\pi/4$ (см. рисунок 1 б). В случаях же использования в качестве связующего высокопрочных материалов, например магниевого сплава ВМ65, армировать стенку двутавровой балки целесообразно в продольном направлении (см. рисунок 1 а). Классическая же теория всегда предсказывает, что наилучшим является продольное армирование стенок (см. рисунок 1 а), поэтому ее не следует использовать при решении задач оптимального и рационального проектирования

композитных балок слоисто-волокнистой структуры при их упругопластическом деформировании.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 17-01-00156-а).

Список литературы

1. Smith, C.S. Design of marine structures in composite materials / C.S. Smith. — London: Elsevier Applied Science, 1990.
2. Burcher, R. Concepts in submarine design / R. Burcher, L. Rydill. — Cambridge: Cambridge University, 1994.
3. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines / A.P. Mouritz [et al.] // Composite Struct. — 2001. — Vol. 53, № 1. — Pp. 21–41.
4. Михайлин, Ю.А. Конструкционные полимерные композиционные материалы. 2-е изд. / Ю.А. Михайлин. — СПб: Научные основы и технологии, 2010. — 822 с.
5. Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites / J. Schuster [et al.] // Mechanics of Composite Materials. — 2009. — Vol. 45, № 2. — Pp. 241–254.
6. Gill, S. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites / S. Gill, M. Gupta, P. Satsangi // Frontiers of Mechanical Eng. — 2013. — Vol. 8, № 2. — Pp. 187–200.
7. Houlston, R. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading / R. Houlston, C.G. DesRochers // Computers & Structures. — 1987. — Vol. 26, № 1/2. — Pp. 1–15.
8. Карпов, В.В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения: в 2 ч. / В.В. Карпов. — М.: Физматлит, 2010. — Ч. 1: Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. — 288 с.
9. Gurdal, Z. In-plane response of laminates with spatially varying fiber orientations: variable stiffness concept / Z. Gurdal, R. Olmedo // AIAA J. — 1993. — Vol. 31, № 4. — Pp. 751–758.
10. Muc, A. Design of plates with curved fiber format / A. Muc, A. Ulatowska // Composite Struct. — 2010. — Vol. 92, № 7. — Pp. 1728–1733.
11. Purkiss, J.A. Determination of the load-carrying capacity of steel fibre reinforced concrete beams / J.A. Purkiss, P.J. Wilson, P. Blagojević // Composite Struct. — 1997. — Vol. 38, № 1–4. — Pp. 111–117.
12. Немировский, Ю.В. Метод расчета деформативности и прочности однотавровых и двутавровых железобетонных стержней / Ю.В. Немировский, А.А. Батулин // Изв. вузов. Строительство. — 2015. — № 10. — С. 82–93.
13. Немировский, Ю.В. Интегрирование задачи динамического упругопластического изгиба армированных стержней переменного поперечного сечения обобщенными методами Рунге–Кутты / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Вычислительные технологии. — 2004. — Т. 9, № 4. — С. 77–95.
14. Янковский, А.П. Исследование особенностей неупругого деформирования композитных балок слоисто-волокнистой структуры при термосиловом нагружении / А.П. Янковский // Проблемы прочности и пластичности. — 2016. — Т. 78, № 2. — С. 131–144.
15. Малинин, Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н.Н. Малинин. — М.: Машиностроение, 1968. — 400 с.
16. Абросимов, Н.А. Обоснование применимости макроненормальных моделей в задачах динамики многослойных композитных балок / Н.А. Абросимов, А.В. Елесин // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб. / Горьк. ун-т, 1987. — С. 69–74.
17. Абросимов, Н.А. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций / Н.А. Абросимов, В.Г. Баженов. — Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. — 400 с.
18. Ахметзянов, М.Х. Сопротивление материалов / М.Х. Ахметзянов, П.В. Грес, И.Б. Лазарев. — М.: Высш. шк., 2007. — 333 с.
19. Перельмутер, А.В. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. / А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. — М.: Изд-во СКАД СОФТ, 2007. — Том 1. — 670 с.
20. Янковский, А.П. Неуставившаяся ползучесть слоистых стержней нерегулярной структуры из нелинейно-

- наследственных материалов / А.П. Янковский // Механика машин, механизмов и материалов. — 2016. — № 3(36). — С. 87–96.
21. Численное решение динамических задач упруго-пластического деформирования твердых тел / Г.В. Иванов [и др.]. — Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2002. — 352 с.
 22. Янковский, А.П. Применение явного по времени метода центральных разностей для численного моделирования динамического поведения упругопластических гибких армированных пластин / А.П. Янковский // Вычислительная механика сплошных сред. — 2016. — Т. 9, № 3. — С. 279–297.
 23. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. — М.: Наука, 1989. — 616 с.
 24. Рихтмайер, Р. Разностные методы решения краевых задач / Р. Рихтмайер, К. Мортон. — М: Мир, 1972. — 418 с.
 25. Композиционные материалы: справ. / под ред. Д.М. Карпиноса. — Киев: Наук. думка, 1985. — 592 с.
 26. Янковский, А.П. Определение термоупругих характеристик пространственно армированных волокнистых сред при общей анизотропии материалов компонент композиции. 2. Сравнение с экспериментом / А.П. Янковский // Механика композитных материалов. — 2010. — Т. 46, № 6. — С. 955–964.
 27. Арутюнян, Р.А. Проблема деформационного старения и длительного разрушения в механике материалов / Р.А. Арутюнян. — СПб: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2004. — 252 с.

YANKOVSKIY Andrei P., D. Sc. in Phys.-Math.

Leading Research Scientist, Laboratory of Fast Processes Physics

E-mail: yankovsky_ap@rambler.ru

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics the Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Novosibirsk, Russia

Received 07 December 2016.

MODELING OF DYNAMIC ELASTIC-PLASTIC BEHAVIOR OF BEAMS OF IRREGULAR LAYERED-FIBROUS STRUCTURES

In approaching the Karman the initial-boundary value problem is formulated for the dynamic elastic-plastic deformation of flexible composite beams of irregular layered-fibrous structures with account of their weakened resistance to the transverse shear. Beams consist of walls and load-bearing layers (shelves). Walls can be reinforced longitudinally or crosswise in its plane, and the shelves are reinforced in the longitudinal direction. The mechanical behavior of the component materials of the composition is described by the equations of the theory of plasticity with isotropic hardening. The explicit “cross” scheme was constructed for numerical integration of the formulated initial-boundary value problem coordinated with the step-by-step scheme and used for the simulation of elastic-plastic deformation of composite material of each layer of the beam. The calculations of dynamic and quasi-static bending behavior are carried out for homogeneous and reinforced beams of I-beam cross-section. It is found that the classical theory of bending may not be acceptable to carry out such calculations for some types of metal compositions for relatively long beams. For the adequate calculation of elastoplastic deformation of composite beams of laminated-fibrous irregular structures it is necessary to use the Timoshenko theory, which takes in account the weakened resistance of the walls to the transverse shears. It is shown that in the case of dynamic loading of composite beams, the final deflections are much larger by absolute value than in the case of quasi-static loading with the same load level.

Keywords: laminated beams, reinforcement, plastic flow theory, Timoshenko theory, dynamic bending, geometric nonlinearity, “cross” scheme

References

1. Smith C.S. *Design of marine structures in composite materials*. London, Elsevier Applied Science, 1990.
2. Burcher R., Rydill L. *Concepts in submarine design*. Cambridge, Cambridge University, 1994.
3. Mouritz A.P., Gellert E., Burchill P., Challis K. *Review of advanced composite structures for naval ships and submarines*. Composite Struct., 2001, vol. 53, no. 1, pp. 21–41.
4. Mikhlin Yu.A. *Konstruksionnye polimernye kompozitsionnye materialy* [Constructional polymeric composite materials]. Saint Petersburg, Nauchnye osnovy i tehnologii, 2010. 822 p.
5. Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M. Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites. *Mechanics of Composite Materials*, 2009, vol. 45, no. 2, pp. 241–254.
6. Gill S., Gupta M., Satsangi P. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites. *Frontiers of Mechanical Eng*, 2013, vol. 8, no. 2, pp. 187–200.
7. Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading. *Computers & Structures*, 1987, vol. 26, no. 1/2, pp. 1–15.
8. Karpov V.V. *Prochnost' i ustoichivost' podkrepjennykh obolochek vrashchenia. V 2 ch. Ch. 1. Modeli i algoritmy issledovaniya prochnosti i ustoichivosti podkrepjennykh obolochek vrashchenia* [Strength and stability of the supported shells of rotation. In 2 parts. Part 1. Models and algorithms of research of strong and stability of the supported shells of rotation]. Moscow, Fizmatlit, 2010. 288 p.
9. Gurdal Z., Olmedo R. In-plane response of laminates with spatially varying fiber orientations: variable stiffness concept. *AIAA J.*, 1993, vol. 31, no. 4, pp. 751–758.

10. Muc A., Ulatowska A. Design of plates with curved fiber format. *Composite Struct.*, 2010, vol. 92, no. 7, pp. 1728–1733.
11. Purkiss J.A., Wilson P.J., Blagojević P. Determination of the load-carrying capacity of steel fibre reinforced concrete beams. *Composite Struct.*, 1997, vol. 38, no. 1–4, pp. 111–117.
12. Nemirovskii Yu.V., Baturin A.A. Metod raschjeta deformativnosti i prochnosti odnotavrovyykh i dvutavrovyykh zhelezobetonnykh sterzhnei [Method of Calculation of Deformability and Strength of the One-tee and Two-tee concrete cores]. *Izvestiya vuzov. Stroitelstvo* [News of higher educational institutions. Construction], 2015, no 10, pp. 82–93.
13. Nemirovskii Yu.V., Yankovskii A.P. Integrirovaniye zadachi dinamicheskogo uprugoplasticheskogo izgiba armirovannykh sterzhney peremennogo poperechnogo secheniya obobshchyonnyimi metodami Runge–Kutty [Integration of problem on elasto-plastic dynamic bending of reinforced cores of sections with a variable cross-section using generalized Runge–Kutta methods]. *Vychislitelnye tekhnologii* [Computing Technologies], 2004, vol. 9, no. 4, pp. 77–95.
14. Yankovskii A.P. Issledovaniye osobennosti neuprugogo deformirovaniya kompozitnykh balok sloisto-voлокnistoi struktury pri termosilovom nagruzenii [Investigation of Properties of Inelastic Deformation of Composite Beams of Laminated-fibrous Structures Under Thermal-force Loads]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of strength and plasticity], 2016, vol. 78, no. 2, pp. 131–144.
15. Malinin N.N. *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti* [The applied theory of plasticity and creep]. Moscow, Mashinostroeniye, 1968. 400 p.
16. Abrosimov N.A., Elesin A.V. Obosnovaniye primenimosti makroneodnorodnykh modelej v zadachakh dinamiki mnogosloynnykh kompozitnykh balok [Substantiation of applicability of macronon-uniform models in problems of dynamics multilayered composites beams]. *Prikladnyye problemy prochnosti i plastichnosti* [Applied problems of strength and plasticity], 1987, pp. 69–74.
17. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. *Nelinejnyye zadachi dinamiki kompozitnykh konstrukcij* [Nonlinear problems of dynamics composites designs]. Nizhniy Novgorod, Izdatelstvo NNGU, 2002. 400 p.
18. Akhmetzianov M.Kh., Gress P.V., Lazarev I.B. *Soprotivleniye materialov* [Resistance of materials]. Moscow, Vysshaya shkola, 2007. 333 p.
19. Perel'muter A.V., Slivker V.I. *Ustoichivost' ravnovesiya konstrukcij i rodstvennyye problemy* [Stability of balance of designs and related problems], Moscow, SKAD SOFT, 2007. 670 p.
20. Yankovskii A.P. Neustanovivshaiasia polzhuchest' sloistykh sterzhnei neregularnoi struktury iz nelineino-nasledstvennykh materialov [Unsteady Creep of Layered Rods of Irregular Structure from Nonlinear-hereditary Materials]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2016, no. 3(36), pp. 87–96.
21. Ivanov G.V., Volchkov Yu.M., Bogul'skii I.O., Anisimov S.A., Kurguzov V.D. *Chislennoe resheniye dinamicheskikh zadach uprugoplasticheskogo deformirovaniya tverdykh tel* [The numerical solution of dynamic problems elastic-plastic deformations of solids]. Novosibirsk, Izdatelstvo Sibirskogo universiteta, 2002. 352 p.
22. Yankovskii A.P. Primeneniye yavnogo po vremeni metoda central'nykh raznostei dlia chislennogo modelirovaniya dinamicheskogo povedeniya uprugoplasticheskikh gibkikh armirovannykh plastin [Using of Explicit Time-Central Difference Method for Numerical Simulation of Dynamic Behavior of Elasto-Plastic Flexible Reinforced Plates]. *Vycisl. meh. splos. sred* [Computational Continuum Mechanics], 2016, vol. 9, no. 3, pp. 279–297.
23. Samarakii A.A. *Teoriya raznostnykh skhem* [The theory of finite difference schemes]. Moscow, Nauka, 1989. 616 p.
24. Richtmyer R.D., Morton K.W. *Difference methods for initial-value problems*. New York, John Wiley & Sons, 1967.
25. Karpinos D.M. *Kompozitsionnye materialy. Spravochnik* [Composite materials. Reference Book]. Kiev, Naukova dumka, 1985. 592 p.
26. Yankovskii A.P. Opredeleniye termouprugih harakteristik prostranstvenno armirovannykh voloknistykh sred pri obshhej anizotropii materialov komponent kompozicii. 2. Svravneniye s jeksperimentom [Determination of the thermoelastic characteristics of spatially reinforced fibrous media in the case of general anisotropy of their components. 2. Comparison with experiment]. *Mekhanika kompozitnykh materialov* [Mechanics of Composite Materials], 2010, vol. 46, no. 6, pp. 659–666.
27. Arutyunian R.A. *Problema deformatsionnogo stareniya i dlitel'nogo razrusheniya v mekhanike materialov* [Problem of deformation ageing and long destruction in mechanics of materials]. Saint-Petersburg, Izdatelstvo S.-Peterburgskogo universiteta, 2004. 252 p.