

УДК 539.4

И.У. АГАЛАРОВА

диссертант

E-mail: ismetagalarova@mail.ru

Бакинский государственный университет, г. Баку, Азербайджанская Республика

Поступила в редакцию 21.09.2016.

КОЛЕБАНИЯ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ПЕРЕКРЕСТНЫМИ СИСТЕМАМИ РЕБЕР АНИЗОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ И С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ

Данная статья посвящена исследованию свободных колебаний анизотропных цилиндрических оболочек со сплошным наполнителем, усиленными дискретно распределенными перекрестными системами ребер при осевом сжатии и с учетом трения между контактными поверхностями оболочки и наполнителя. Движение наполнителя описывается системами уравнений теории упругости в перемещениях. С помощью контактных условий для нахождения частот свободных колебаний анизотропных цилиндрических оболочек с наполнителем, усиленными дискретно распределенными перекрестными системами ребер при осевом сжатии и с учетом трения между контактными поверхностями оболочки и наполнителя построено частотное уравнение и реализовано численно. Влияние инерционных свойств наполнителя на процесс колебания системы исследовано в двух случаях: влияниями инерционных свойств на процесс колебания системы можно пренебречь; влияние инерционных свойств на процесс колебания системы существенно.

Ключевые слова: анизотропная оболочка, стержень, частота колебаний, инерция, окружающая среда, сжимающие силы

Введение. В последние годы внимание исследователей все больше привлекают вопросы, касающиеся исследования напряженно-деформированного состояния ребристых анизотропных оболочек, контактирующих со средой. Исследованиям свободных колебаний продольно подкрепленных и подкрепленных перекрестными системами ребер и нагруженных осевыми сжимающими силами изотропных цилиндрических оболочек, заполненных твердой средой, посвящена работа [1]. С применением вариационного принципа построено частотное уравнение колебаний подкрепленной изотропной цилиндрической оболочки, контактирующей со средой, и реализовано численно. Свободные колебания ребристых изотропных цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью, при осевом сжатии рассмотрены в работе [2]. Причем подкрепление оболочек проводилось продольно, поперечно и перекрестной системой ребер. В [3] исследована задача о вынужденных осесимметричных колебаниях подкрепленной и нагруженной осевыми сжимающими силами изотропной цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью. Колебания поперечно подкрепленных ортотропных цилиндрических оболочек с протекающей жидкостью в грунте рассмотрены в работе [4]. С применением вариационного принципа и модели Пастернака параметрические колебания

нелинейной и неоднородной по толщине вязкоупругой неподкрепленной цилиндрической оболочки с наполнителем исследованы в работе [5]. Вариационно-параметрические исследования моделирования цилиндрических оболочек ступенчато-переменной толщины при динамическом нагружении приведены в [6]. Отметим, что описание решения в литературе относится преимущественно к подкрепленной изотропной цилиндрической оболочки без среды [7]. Колебания гладких цилиндрических оболочек с наполнителем и с жидкостью достаточно полностью исследованы в работах [8, 9]. Колебания продольно подкрепленной изотропной цилиндрической оболочки с наполнителем, при осевом сжатии и с учетом трения между контактными поверхностями оболочки и наполнителя рассмотрены в работах [10, 11]. Анализ приведенных работ показывает, что поведение тонкостенных конструкций из ортотропного материала, имеющих дискретное расположения ребер, с учетом влияния внешней среды исследовано недостаточно. Поэтому разработка математических моделей поведения подкрепленных оболочек, наиболее полно учитывающих их работу при динамических нагрузках, и проведение на их основе исследований устойчивости и колебаний, а также выбора рациональных параметров конструкции, контактирующей со средой с учетом трения в контакте, являются актуальными задачами.

В данной статье с помощью вариационного принципа исследуются свободные колебания тонкой подкрепленной перекрестными системами ребер анизотропной цилиндрической оболочки при динамическом взаимодействии с заполнителем, при осевом сжатии и с учетом трения в контакте. Построены зависимости частоты собственных колебаний от сжимающей силы для различных отношений модулей упругости материала анизотропной оболочки с учетом трения в контакте между оболочкой и заполнителем.

Постановка задачи. Ребристая оболочка рассматривается как система, состоящая из собственной анизотропной оболочки, продольных и поперечных ребер (рисунок 1). Принимается, что напряженно-деформированное состояние оболочки можно полностью определить в рамках линейной теории упругих тонких оболочек, основанных на гипотезах Кирхгофа–Лява, а для расчета ребер применима теория криволинейных стержней Кирхгофа–Клебша. Система координат выбрана так, что координатные линии совпадают с линиями главных кривизн срединной поверхности оболочки. При этом предполагается, что ребра размещены вдоль координатных линий, а их края, как и края обшивки, лежат в одной координатной плоскости.

Деформированное состояние обшивки может быть определено через три составляющих перемещений ее срединной поверхности u , ϑ и w . При этом углы поворота нормальных элементов φ_1 , φ_2 относительно координатных линий y и x выражаются через w и ϑ с помощью зависимостей

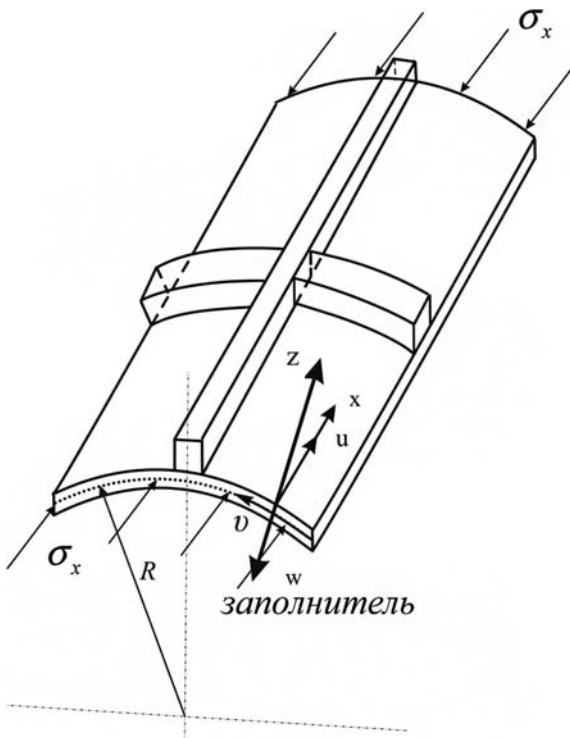


Рисунок 1 — Цилиндрическая оболочка усиленная перекрестной системой ребер и заполненной средой

$$\varphi_1 = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \varphi_2 = -\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\vartheta}{R}\right),$$

где R — радиус срединной поверхности оболочки.

Для описания деформированного состояния ребер, кроме трех составляющих перемещений центров тяжести их поперечных сечений (u_i , ϑ_i , w_i соответственно для i -го продольного стержня, u_j , ϑ_j , w_j , j -го поперечного стержня), необходимо определить также углы закручивания φ_j и φ_{kpi} , φ_i , φ_{kpi} .

Учитывая, что согласно принятым гипотезам имеет место постоянство радиальных прогибов по высоте сечений, а также вытекающие из условий жесткого соединения ребер с оболочкой равенства соответствующих углов закручивания, записываем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} u_j(y) &= u(x_j, y) + h_j \varphi_1(x_j, y); \\ \vartheta_j(x) &= \vartheta(x_j, y) + h_j \varphi_2(x_j, y); \\ w_j(x) &= w(x_j, y); \quad \varphi_j = \varphi_2(x_j, y); \\ \varphi_{kpi}(x) &= \varphi_1(x_j, y); \end{aligned} \quad (1)$$

здесь $h_i = 0,5h + H_i^1$, $h_j = 0,5h + H_j^1$, h — толщина оболочки; H_i^1 и H_j^1 — расстояния от осей i -го продольного и j -го поперечного стержней до поверхности оболочки; x_i и y_i — координаты линий сопряжения ребер с оболочкой; φ_j , φ_{kpi} — углы поворота и закручивания поперечных сечений поперечных стержней.

Относительно внешних воздействий предполагается, что действующие на ребристую оболочку поверхностные нагрузки со стороны сплошного заполнителя, могут быть сведены к составляющим q_x , q_y и q_z , приложенным к срединной поверхности оболочки.

Частотные уравнения свободных колебаний, подкрепленные перекрестными системами ребер ортотропной цилиндрической оболочки при осевом сжатии и с учетом трения между контактными поверхностями оболочки и заполнителя, построим на основе вариационного принципа Остроградского–Гамильтона. Для этого предварительно запишем полную энергию системы. Полная энергия упругой деформации, подкрепленной перекрестными системами ребер, нагруженной осевыми сжимающими силами анизотропной цилиндрической оболочки со сплошным заполнителем с учетом трения в контакте между оболочкой и заполнителем имеет вид [4, 9]:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\xi_1} \{N_{11}\varepsilon_{11} + N_{22}\varepsilon_{22} + N_{12}\varepsilon_{12} - M_{11}\chi_{11} - \\ &- M_{22}\chi_{22} - M_{12}\chi_{12}\} d\xi d\theta + \frac{R}{2} \int_0^{2\pi} \left[\tilde{E}_j F_j \left(\frac{\partial \vartheta_j}{R \partial \theta} - \frac{w_j}{R} \right)^2 + \right. \\ &+ \tilde{E}_j J_{sj} \left(\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + \frac{w_j}{R^2} \right)^2 + \tilde{E}_j J_{sj} \left(\frac{\partial^2 u_j}{R^2 \partial \theta^2} - \frac{\varphi_{kpi}}{R} \right)^2 \left. \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \tilde{G}_j J_{\kappa pi} \left[\frac{\partial \varphi_{\kappa pi}}{R \partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_j}{\partial y} \right] d\theta + \\
 & + \rho_0 R h \int_0^{\xi_1} \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] d\xi d\theta + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\tilde{E}_i F_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + \tilde{E}_j J_{yi} \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right)^2 + \right. \\
 & \left. + \tilde{E}_i J_{zi} \left(\frac{\partial^2 \vartheta_i}{\partial x^2} \right)^2 + \tilde{G}_i J_{\kappa pi} \left(\frac{\partial \varphi_{\kappa pi}}{\partial x} \right)^2 \right] dx + \quad (2) \\
 & + \tilde{\rho}_i F_i \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{\kappa pi}}{F_i} \left(\frac{\partial \varphi_{\kappa pi}}{\partial t} \right)^2 \right] dx + \\
 & + \tilde{\rho}_j F_j R \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial u_j}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta_j}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_j}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{\kappa pj}}{F_j} \left(\frac{\partial \varphi_{\kappa pj}}{\partial t} \right)^2 \right] d\theta - \\
 & - \frac{\sigma_x h}{2} \int_0^{\xi_1} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 d\xi d\theta + A_0.
 \end{aligned}$$

Выражения для внутренних сил и моментов представим следующим образом:

$$\begin{aligned}
 N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij} + z w_{ij}) dz; \quad M_{ij} = - \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij} + z w_{ij}) z dz; \quad (3) \\
 w_{11} = B_{11} \chi_{11} + B_{12} \chi_{22} + B_{16} \chi_{12}; \\
 w_{22} = B_{12} \chi_{11} + B_{22} \chi_{22} + B_{26} \chi_{12}; \\
 w_{21} = w_{12} = B_{16} \chi_{11} + b_{22} \chi_{22} + B_{66} \chi_{12}.
 \end{aligned}$$

Напряжение σ_{ij} и деформация ε_{ij} в срединной поверхности в соотношениях (3) определяются следующим образом [9]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} = B_{11} \varepsilon_{11} + B_{12} \varepsilon_{22} + B_{16} \varepsilon_{12}; \\
 \sigma_{22} = B_{12} \varepsilon_{11} + B_{22} \varepsilon_{22} + B_{26} \varepsilon_{12}; \quad (4) \\
 \sigma_{12} = B_{16} \varepsilon_{11} + B_{26} \varepsilon_{22} + B_{66} \varepsilon_{12}; \\
 \varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} + w; \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\
 \chi_{11} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \chi_{22} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \chi_{12} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Постоянные упругости, зависящие от угла φ , образуемого направлением оси анизотропии с окружным направлением, определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 B_{11} = b_{11} \cos^4 \varphi + b_{22} \sin^4 \varphi + (b_{66} + 0,5 b_{12}) \sin^2 2\varphi; \\
 B_{22} = b_{11} \sin^4 \varphi + b_{22} \cos^4 \varphi + (b_{66} + 0,5 b_{12}) \sin^2 2\varphi; \quad (6) \\
 B_{12} = (b_{11} + b_{22} - 4b_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + b_{12} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi); \\
 B_{66} = -(b_{11} + b_{22} - 2b_{12}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + b_{66} \cos^2 2\varphi; \\
 B_{26} = \frac{1}{2} (b_{22} \cos^2 \varphi - b_{11} \sin^2 \varphi) \sin 2\varphi - \frac{1}{6} (b_{12} + 2b_{66}) \sin 4\varphi; \\
 B_{16} = \frac{1}{2} (b_{22} \sin^2 \varphi - b_{11} \cos^2 \varphi) \sin 2\varphi - \frac{1}{6} (b_{12} + 2b_{66}) \sin 4\varphi,
 \end{aligned}$$

где b_{11} , b_{22} , b_{12} и b_{66} — основные модули упругости ортотропного материала, которые выражаются через модули упругости E_1 , E_2 , модуль упругости

при сдвиге G и коэффициенты Пуассона ν_1 , ν_2 по формулам

$$\begin{aligned}
 b_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad b_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}; \quad b_{12} = \frac{\nu_2 E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} = \frac{\nu_1 E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}; \\
 b_{66} = G_{12} = G;
 \end{aligned}$$

φ — угол, образуемый направлением оси анизотропии с окружным направлением; R — радиус срединной поверхности оболочки; h — толщина оболочки; u , v , w — составляющие перемещений точек срединной поверхности оболочки; F_i , J_{zi} , J_{yi} , $J_{\kappa pi}$ и F_j , J_{zj} , J_{yj} , $J_{\kappa pj}$ — площадь и моменты инерции поперечного сечения i -продольного и j -го поперечного стержня относительно оси Oz , и оси параллельной оси Oy и проходящей через центр тяжести сечения, а также его момент инерции при кручении, соответственно; \tilde{E}_i , \tilde{G}_i , \tilde{E}_j , \tilde{G}_j — модули упругости и сдвига материала i -продольного и j -го поперечного стержня соответственно; t — временная координата; ρ_0 , $\tilde{\rho}_i$, $\tilde{\rho}_j$ — плотности материалов, из которых изготовлены оболочка, i -й продольный стержень и j -й поперечный стержень, соответственно; σ_x — сжимающее напряжение; $\xi = x/R$; x_1 , x_2 — координаты криволинейных краев оболочки.

Влияние заполнителя на оболочку определяется как внешняя поверхностная нагрузка, приложенная к оболочке, вычисляется как работа, совершенная этими нагрузками при переводе системы из деформированного состояния в начальное недеформированное, и представляется в виде:

$$A_0 = - \int_0^{\xi_1} \int_0^{2\pi} ((q_x - f_1 q_r) u + (q_\theta - f_2 q_r) \vartheta + q_r w) d\xi d\theta, \quad (7)$$

где f_1 , f_2 — коэффициенты трения; q_x , q_θ , q_r — давления со стороны заполнителя на оболочку и определяются решением уравнения движения заполнителя.

Уравнение движения заполнителя в векторной форме имеет вид [4, 5]:

$$a_e^2 q r \operatorname{div} \bar{s} - a_i^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{s} + \omega^2 \bar{s} = 0, \quad (8)$$

здесь $a_i = \sqrt{\frac{\lambda_s + 2\mu_s}{\rho}}$, $a_e = \sqrt{\frac{\mu_s}{\rho}}$ — скорости распро-

странения продольных и поперечных волн в среде соответственно; $\bar{s}(s_x, s_\theta, s_r)$ — вектор перемещения; λ , μ — коэффициенты Ламе.

К системам уравнений движения заполнителя (8) прибавляются контактные условия. Предполагается, что контакт между оболочкой и средой жесткий, т. е. при $r = R$

$$u = s_x; \quad \vartheta = s_\theta; \quad w = s_r; \quad (9)$$

$$q_x - f_1 q_r = -\sigma_{rx}; \quad q_\theta - f_2 q_r = -\sigma_{r\theta}; \quad -q_r = -\sigma_{rr}. \quad (10)$$

Компоненты σ_{rx} , $\sigma_{r\theta}$, σ_{rr} тензора напряжений определяются следующим образом [4, 5]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rx} &= \mu_s \left(\frac{\partial s_x}{\partial r} + \frac{\partial s_r}{\partial x} \right); \quad \sigma_{r\theta} = \mu_s \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{s_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial s_r}{\partial \theta} \right]; \\ \sigma_{rr} &= \lambda_s \left(\frac{\partial s_r}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rs_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial s_\theta}{\partial \theta} \right) + 2\mu_s \frac{\partial s_r}{r}, \end{aligned} \quad (11)$$

здесь λ_s, μ_s — коэффициенты Ламе для среды.

Дополняя контактными условиями (9) и (10) полной энергией упругой деформации, подкрепленной перекрестными системами ребер, нагруженной осевыми сжимающими силами, анизотропной цилиндрической оболочке (2), уравнение движения заполнителя (8), приходим к контактной задаче о колебаниях анизотропной цилиндрической оболочки, подкрепленной перекрестными системами ребер, нагруженной осевыми сжимающими силами, анизотропной цилиндрической оболочки со сплошным заполнителем с учетом трения в контакте между оболочкой и заполнителем. Другими словами, задача о колебаниях, подкрепленных перекрестными системами ребер, нагруженной осевыми сжимающими силами, анизотропной цилиндрической оболочки со сплошным заполнителем с учетом трения в контакте между оболочкой и заполнителем сводится к совместному интегрированию полной энергии упругой деформации, подкрепленными перекрестными системами ребер, нагруженной осевыми сжимающими силами, анизотропной цилиндрической оболочки со сплошным заполнителем, с учетом трения в контакте между оболочкой, системы уравнений движения заполнителя при выполнении указанных условий на поверхности их контакта.

Решение задачи. Перемещения оболочки, удовлетворяющие условиям шарнирного опирания со свободным смещением в продольном направлении и при отсутствии смещения в дуговом (эти граничные условия в литературе называются условиями Навье [9]), т. е. при $x = 0$ и $x = L, \vartheta = 0, w = 0, M_x = 0, N_x = 0$, будем искать в виде:

$$\begin{aligned} u &= A \cos kx \cos n\varphi \sin \omega_1 t_1; \\ \vartheta &= B \sin kx \sin n\varphi \sin \omega_1 t_1; \\ w &= C \sin kx \cos n\varphi \sin \omega_1 t_1, \end{aligned} \quad (12)$$

где A, B, C — неизвестные постоянные; $k = \frac{m\pi}{L}$

($m = 1, 2, \dots$); m, n — волновые числа в продольном и окружном направлениях соответственно; L —

длина оболочки; $\omega_1 = \frac{\omega}{\omega_0}$; $\omega_1 = \sqrt{\frac{(1-\nu^2)\rho_0 R^2 \omega^2}{E_1}}$;

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{E_1}{(1-\nu^2)\rho_0 R^2}}, \quad t_1 = \omega_0 t.$$

Решение системы (8) имеет вид [3]:

а) при малых инерционных действиях со стороны заполнителя на процесс колебаний системы:

$$\begin{aligned} s_x &= \left[\left(-kr \frac{\partial I_n(kr)}{\partial r} - 4(1-\nu_s)kI_n(kr) \right) A_s + \right. \\ &\quad \left. + kI_n(kr)B_s \right] \cos n\varphi \cos kx \sin \omega_1 t_1; \\ s_\varphi &= \left[-\frac{n}{r} I_n(kr)B_s - \frac{\partial I_n(kr)}{\partial r} C_s \right] \sin n\varphi \sin kx \sin \omega_1 t_1; \quad (13) \\ s_r &= \left[-k^2 r I_n(kr)A_s + \frac{\partial I_n(kr)}{\partial r} B_s + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n}{r} I_n(kr)C_s \right] \cos n\varphi \sin kx \sin \omega_1 t_1; \end{aligned}$$

б) инерционные действия заполнителя на процесс колебания системы существенно:

$$\begin{aligned} s_x &= \left[A_s k I_n(\gamma_e r) - \frac{C_s \gamma_t^2}{\mu_t} I_n(\gamma_t r) \right] \cos n\varphi \cos kx \sin \omega_1 t_1; \\ s_\varphi &= \left[-\frac{A_s n}{r} I_n(\gamma_e r) - \frac{C_s n k}{r \mu_t} I_n(\gamma_t r) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{B_s}{n} \frac{\partial I_n(\gamma_t r)}{\partial r} \right] \sin n\varphi \sin kx \sin \omega_1 t_1; \\ s_r &= \left[A_s \frac{\partial I_n(\gamma_e r)}{\partial r} - \frac{C_s k}{\mu_t} \frac{\partial I_n(\gamma_t r)}{\partial r} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{B_s n}{r} I_n(\gamma_t r) \right] \cos n\varphi \sin kx \sin \omega_1 t_1, \end{aligned} \quad (14)$$

здесь I_n — модифицированная функция Бесселя n -го порядка первого рода; A_s, B_s, C_s — постоянные; $\gamma_e^2 = k^2 - \mu_e^2$; $\gamma_t^2 = k^2 - \mu_t^2$.

Используя контактные условия (9) и (10) перемещений оболочек (12), в решении уравнения движения среды (13) постоянные A_s, B_s, C_s выразим через A, B, C . В результате для q_x, q_ϑ, q_z находим $\left(k = \frac{m\pi}{L} \right)$:

$$\begin{aligned} q_x &= (\tilde{C}_{x1} A + \tilde{C}_{x2} B + \tilde{C}_{x3} C) \cos n\varphi \cos kx \sin \omega_1 t_1; \\ q_\vartheta &= (\tilde{C}_{\vartheta1} A + \tilde{C}_{\vartheta2} B + \tilde{C}_{\vartheta3} C) \sin n\varphi \sin kx \sin \omega_1 t_1; \quad (15) \\ q_r &= (\tilde{C}_{r1} A + \tilde{C}_{r2} B + \tilde{C}_{r3} C) \cos n\varphi \sin kx \sin \omega_1 t_1. \end{aligned}$$

После подставки (15) в (7) и интегрирования по ξ и θ получаем работу внешних давлений со стороны заполнителя, приложенные к оболочке

$$A_0 = -\frac{\pi \xi_1}{2} \left[(\tilde{C}_{x1} - f_1 \tilde{C}_{r1}) A^2 + (\tilde{C}_{\vartheta2} - f_2 \tilde{C}_{r2}) B^2 + \tilde{C}_{r3} C^2 \right]. \quad (16)$$

Используя (1), (2), (16), для полной энергии системы получим полином второго порядка относительно параметров постоянных A, B, C :

$$\begin{aligned} \Phi &= \left(\tilde{\varphi}_{11} - \frac{\pi \xi_1}{2} (\tilde{C}_{x1} - f_1 \tilde{C}_{r1}) - \psi_{11} \omega_1^2 \right) A^2 + \\ &+ \left(\tilde{\varphi}_{22} - \frac{\pi \xi_1}{2} (\tilde{C}_{\vartheta2} - f_2 \tilde{C}_{r2}) - \psi_{22} \omega_1^2 \right) B^2 + \\ &+ (\tilde{\varphi}_{33} - S_1 \tilde{C}_{r3} - \psi_{33} \omega_1^2 + I_1 \sigma_x) C^2 + \\ &+ (\tilde{\varphi}_{44} + S_2 \tilde{C}_{x2} + S_1 \tilde{C}_{\vartheta1}) AB + \\ &+ (\tilde{\varphi}_{55} + S_2 \tilde{C}_{x3} + S_1 \tilde{C}_{r1}) AC + S_1 (\tilde{\varphi}_{66} + \tilde{C}_{\vartheta3} + \tilde{C}_{r2}) BC. \end{aligned}$$

Отметим, что величины $\tilde{\varphi}_{ii}$ ($i = 1, 2, \dots, 6$), ψ_{ii} ($i = 1, 2, 3$), l_i ($i = 1, 2$) имеют громоздкий вид, поэтому их здесь не приводим.

Условия стационарности Φ по независимым постоянным A, B, C сводят решения задачи о колебаниях, подкрепленных перекрестными системами ребер, заполненной средой и подверженной продольному сжатию анизотропной цилиндрической оболочки с учетом трения в контакте, к однородным системам линейных алгебраических уравнений третьего порядка:

$$\begin{cases} 2\left(\tilde{\varphi}_{11} - \frac{\pi \xi_1}{2}(\tilde{C}_{x1} - f_1 \tilde{C}_{r1}) - \psi_{11} \omega_1^2\right)A + \\ + (\tilde{\varphi}_{44} + S_2 \tilde{C}_{x2} + S_1 \tilde{C}_{\theta 1})B + (\tilde{\varphi}_{55} + S_2 \tilde{C}_{x3} + S_1 \tilde{C}_{r1})C = 0; \\ \left\{ \begin{aligned} &(\tilde{\varphi}_{44} + S_2 \tilde{C}_{x2} + S_1 \tilde{C}_{\theta 1})A + 2\left(\tilde{\varphi}_{22} - \frac{\pi \xi_1}{2}(\tilde{C}_{\theta 2} - f_2 \tilde{C}_{r2}) - \right. \\ &\left. - \psi_{22} \omega_1^2\right)B + (\tilde{\varphi}_{66} + \tilde{C}_{\theta 3} + \tilde{C}_{r2})C = 0; \\ &(\tilde{\varphi}_{55} + S_2 \tilde{C}_{x3} + S_1 \tilde{C}_{r1})A + (\tilde{\varphi}_{66} + \tilde{C}_{\theta 3} + \tilde{C}_{r2})B + \\ &+ 2(\tilde{\varphi}_{33} - S_1 \tilde{C}_{r3} - \psi_{33} \omega_1^2 + l_1 \sigma_x)C = 0. \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (17)$$

Нетривиальное решение системы линейных алгебраических уравнений (17) третьего порядка возможно лишь в случае, когда ω_1 — корень ее определителя. Определение параметра частоты колебаний исследуемой конструкции ω_1 сводится к алгебраическому уравнению шестого порядка относительно ω_1 или кубическому уравнению относительно $\lambda = \omega_1^2$, в случае а:

$$\begin{vmatrix} 2\left(\tilde{\varphi}_{11} - \frac{\pi \xi_1}{2}(\tilde{C}_{x1} - f_1 \tilde{C}_{r1}) - \psi_{11} \omega_1^2\right) & (\tilde{\varphi}_{44} + S_2 \tilde{C}_{x2} + S_1 \tilde{C}_{\theta 1}) & (\tilde{\varphi}_{55} + S_2 \tilde{C}_{x3} + S_1 \tilde{C}_{r1}) \\ (\tilde{\varphi}_{44} + S_2 \tilde{C}_{x2} + S_1 \tilde{C}_{\theta 1}) & 2\left(\tilde{\varphi}_{22} - \frac{\pi \xi_1}{2}(\tilde{C}_{\theta 2} - f_2 \tilde{C}_{r2}) - \psi_{22} \omega_1^2\right) & (\tilde{\varphi}_{66} + \tilde{C}_{\theta 3} + \tilde{C}_{r2}) \\ (\tilde{\varphi}_{55} + S_2 \tilde{C}_{x3} + S_1 \tilde{C}_{r1}) & (\tilde{\varphi}_{66} + \tilde{C}_{\theta 3} + \tilde{C}_{r2}) & 2(\tilde{\varphi}_{33} - S_1 \tilde{C}_{r3} - \psi_{33} \omega_1^2 + l_1 \sigma_x) \end{vmatrix} = 0. \quad (18)$$

В случае б полученное частотное уравнение для нахождения параметра частоты колебаний исследуемой конструкции формально совпадает с уравнением (18) и является трансцендентным относительно ω_1 , так как искомый параметр частоты колебаний системы входит в аргумент функции Бесселя.

Приведем результаты исследования влияния жесткости материала оболочки, коэффициентов трения и осевой сжимающей силы на параметр частоты колебаний исследуемой конструкции. Вычисления выполнены для оболочки, среды и ребер с такими параметрами:

$$h^* = \frac{h}{R} = 0,25 \cdot 10^{-2}; \nu = 0,3;$$

$$\tilde{E}_j = \tilde{E}_i = 6,67 \cdot 10^9 \text{ (Па)}; L = 0,8 \text{ (м)};$$

$$\rho_0 = \tilde{\rho}_i = \tilde{\rho}_j = 0,26 \cdot 10^4 \text{ (Н} \cdot \text{с}^2/\text{м}^2\text{)};$$

$$a_e = 2,25a_i; a_i = 308 \text{ (м/с)};$$

$$F_j = 5,75 \text{ (мм}^2\text{)}; J_{xj} = 19,9 \text{ (мм}^4\text{)};$$

$$\frac{J_{zj}}{2\pi R^3 h} = 0,23 \cdot 10^{-6}; J_{kpi} = 0,48 \text{ (мм}^4\text{)}; h_j = 1,39 \text{ (мм)};$$

$$\frac{F_i}{2\pi R h} = 0,1591 \cdot 10^{-1}; \nu = 0,3; \frac{I_{yj}}{2\pi R^3 h} = 0,8289 \cdot 10^{-6};$$

$$\rho_i = 0,26 \cdot 10^4 \text{ (Н} \cdot \text{с}^2/\text{м}^2\text{)}; \frac{I_{zj}}{2\pi R^3 h} = 0,1326 \cdot 10^{-6};$$

$$\frac{I_{kpi}}{2\pi R^3 h} = 0,5305 \cdot 10^{-6}; h_i = 0,01375 R;$$

$$\nu_1 = 0,11; \nu_2 = 0,19.$$

Заключение. Результаты расчета представлены на рисунке 2 и рисунке 3, причем рисунок 2 соответствует случаю а, а рисунок 3 — случаю б. Кроме того, на рисунке 2 пунктирные кривые соответствуют $f_1 = 0$, а сплошные кривые — $f_1 = 0,3$; а на рисунке 3 пунктирные кривые соответствуют случаю а, сплошные кривые — случаю б. Здесь приведена зависимость ω_1 от сжимающей силы. Из рисунка 2 и рисунка 3 видно, что с увеличением сжимающей силы частота системы падает. Кроме того, учет трения и инерционных свойств среды приводят к снижению значения собственной частоты исследуемой конструкции.

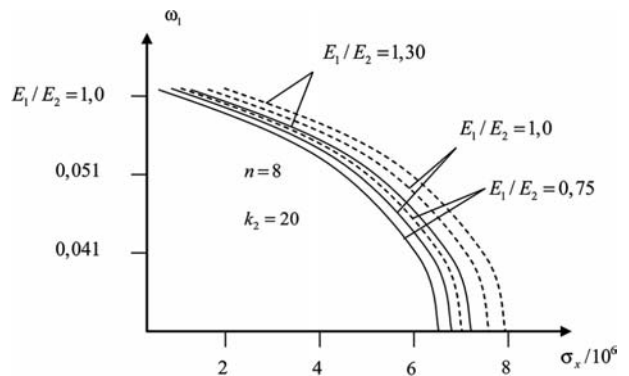


Рисунок 2 — Зависимость параметра частоты от сжимающей силы (случай а)

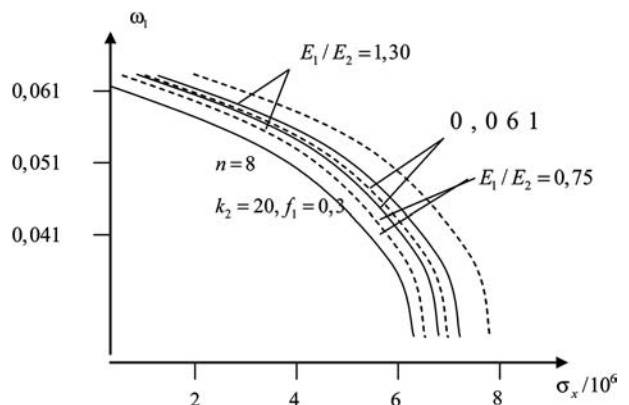


Рисунок 3 — Зависимость параметра частоты от сжимающей силы (случай б)

Список литературы

1. Латифов, Ф.С. Задача о свободных колебаниях усиленных перекрестной системой ребер и нагруженной осевыми сжимающими силами цилиндрических оболочек, заполненной средой / Ф.С. Латифов, С.Т. Сулейманова // Механика машин, механизмов и материалов. — 2009. — № 1. — С. 59–62.
2. Латифов, Ф.С. Свободные колебания ребристых цилиндрических оболочек, заполненных жидкостью, при осевом сжатии / Ф.С. Латифов, А.А. Алиев // Механика машин, механизмов и материалов. — 2009. — № 2. — С. 61–63.
3. Латифов, Ф.С. Задача о вынужденных осесимметричных колебаниях подкрепленной и нагруженной осевыми сжимающими силами цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью / Ф.С. Латифов, О.Ш. Салманов // Механика машин, механизмов и материалов. — 2008. — № 4(5). — С. 45–48.
4. Латифов, Ф.С. Колебания поперечно подкрепленных ортотропных цилиндрических оболочек, с протекающей жидкостью, в среде / Ф.С. Латифов, Р.А. Искендеров, С.Б. Микайлов // Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций / Днепрпетровский гос. ун-т им. О. Гончара. — 2013. — Вып. 21. — С. 132–139.
5. Пирмамедов, И.Т. Параметрические колебания вязкоупругой оболочки, с учетом повреждаемости, заключенной в вязкоупругую матрицу / И.Т. Пирмамедов // Механика машин, механизмов и материалов. — 2009. — № 1(6). — С. 52–55.
6. Босьяков, С.М. Анализ свободных колебаний цилиндрической оболочки из стеклопластика при граничных условиях Навье / С.М. Босьяков, В. Чживэй // Механика машин, механизмов и материалов. — 2011. — № 3(10). — С. 24–27.
7. Амиро, И.Я. Теория ребристых оболочек. Методы расчета оболочек / И.Я. Амиро, В.А. Заруцкий. — Киев: Наук. думка, 1980. — 367 с.
8. Ильгамов, М.А. Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим наполнителем / М.А. Ильгамов, В.А. Иванов, Б.А. Гулин. — М.: Наука, 1977. — 331 с.
9. Латифов, Ф.С. Колебания оболочек с упругой и жидкой средой / Ф.С. Латифов. — Баку: Элм, 1999. — 164 с.
10. Латифов, Ф.С. Свободные колебания подкрепленных перекрестной системой ребер цилиндрических оболочек с наполнителем, при осевом сжатии и с учетом трения / Ф.С. Латифов, И.М. Джафарова // Естественные науки и техники. — 2009. — № 5(43). — С. 38–44.
11. Джафарова, И.М. Задача о свободных осесимметричных колебаниях нагруженной осевыми сжимающими силами ребристых цилиндрических оболочек, заполненных средой и с учетом трения / И.М. Джафарова // Изв. Бакинского гос. ун-та. — 2011. — № 3. — С. 86–93. — (Физико-математическая серия).

AGALAROVA Ismat Y.

Dissertator

E-mail: ismetagalarova@mail.ru

Baku State University, Baku, Azerbaijan

Received 21 September 2016.

OSCILLATIONS OF ANISOTROPIC CYLINDRICAL SHELLS WITH FILLER SUPPORTED WITH CROSS RIBS SYSTEM, UNDER AXIAL COMPRESSION AND GIVEN FRICTION

This article is devoted to the study of free oscillations of anisotropic cylindrical shells with a solid filler, reinforced with discretely distributed cross ribs under axial compression systems, taking into account the friction between the contact surfaces of the shell and the filler. Filler movement is described by systems of equations of the theory of elasticity in moving. With the help of the contact conditions for finding the frequency of free oscillations of anisotropic cylindrical shells with filler, reinforced with discretely distributed cross ribs under axial compression systems, taking into account the friction between the contact surfaces of the shell and filler, frequency equation is built and implemented numerically. The impact of the inertial properties of the filler on the system oscillations process is investigated in two cases: a) the effects of the inertial properties on the system oscillations process can be neglected; b) the effect of the inertial on the system oscillations process is significant.

Keywords: anisotropic shell rod oscillation frequency, momentum, environment, squeezing force

References

1. Latifov F.S., Suleymanova S.Q. Zadacha o svobodnix kolebaniyax usilennix perekrestnoy sistemoy reber i nagrujennoy osevimy sжимayushimi salami chilindricheskix obolochek, zapolnennoy sredoy [The problem of free oscillations of a reinforced system of cross-by axial compressive strength of cylindrical shells filled with a medium]. *Mehanika mashin, mehanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2009, no. 1, pp. 59–62.
2. Latifov F.S., Aliyev A.A. Svobodnye kolebanija rebristyx cilindricheskix obolochek, zapolnennyh zhidkost'ju, pri osevom szhatii [Free oscillations of ribbed cylindrical shells filled with fluid under axial compression]. *Mehanika mashin, mehanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2009, no. 2, pp. 61–63.
3. Latifov F.S., Salmanov O.Sh. Zadacha o vynuzhdennyh osesimmetrichnyh kolebanijah podkreplenoj i nagruzennoj osevimy szhimajushimi silami cilindricheskoj obolochki, zapolnennoj zhidkost'ju [The problem of forced axisymmetric oscillations supported and loaded by axial compressive strength of the cylindrical shell filled with liquid]. *Mehanika mashin, mehanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2008, no. 4(5), pp. 45–48.
4. Latifov F.S., Isgenderov R.A., Mikailov S.B. Kolebanija poperechno podkreplennyh ortotropnyh cilindricheskix

- obolochek, s protekajushhej zhidkostju, v srede [Fluctuations of transversely reinforced orthotropic cylindrical shells with a flowing liquid in a medium]. *Problemy vychislitelnoj mehaniki i prochnosti konstrukcij* [The problems of computational mechanics and strength], 2013, no. 21, pp.132–139.
5. Pirmamedov I.T. Parametricheskie kolebanija vjazkoprugoj obolochki, s uchetom povrezhdaemosti, zakljuchennoj v vjazkopruguju matricu [Parametric oscillations of viscoelastic shell, taking into account damage, enclosed in a viscoelastic matrix]. *Mehanika mashin, mehanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2009, no. 1(6), pp. 52–55.
 6. Bosyakov S.M., Chjivey V. Analiz svobodnyh kolebanij cilindricheskoj obolochki iz stekloplastika pri granichnyh uslovijah Navye [Analysis of free vibrations of a cylindrical shell made of fiberglass with Navier boundary conditions]. *Mehanika mashin, mehanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2011, no. 3(10), pp. 24–27.
 7. Amiro I.Ya., Zaruchkiy V.A. *Teorija rebristyh obolochek. Metody rascheta obolochek* [Theory of Ridge Shells. Methods for Calculation of Shells]. Kiev, Naukova dumka, 1980. 367 p.
 8. Ilgamov M.A., Ivanov V.A., Gulin B.A. *Prochnost, ustojchivost i dinamika obolochek s uprugim zapolnitelem* [Strength, Stability and Dynamics of Shells with an elastic filler]. Moscow, Nauka, 1977. 331 p.
 9. Latifov F.S. *Kolebanija obolochek s uprugoj i zhidkoj sred* [Fluctuations of shells with elastic and liquid media]. Baku, Elm, 1999. 164 p.
 10. Latifov F.S., Djafarova I.M. Svobodnye kolebanija podkreplennyh perekrestnoj sistemoj reber cilindricheskih obolochek c zapolnitelem, pri osevom szhatii i s uchetom trenija [Free oscillations of cylindrical shells reinforced with ribs cross filler system, under axial compression and taking into account the friction]. *Estestvennye nauki i tehniki* [Natural Science and Technology], 2009, no. 5(43), pp. 38–44.
 11. Djafarova I.M. Zadacha o svobodnyh osesimmetrichnyh kolebanijah nagruzhennoj osevmi szhimajushhimi silami rebristyh cilindricheskih obolochek, zapolnennyh sredoj i s uchetom trenija [The problem of free axisymmetric vibrations of a loaded axial compressive forces ribbed cylindrical shells filled environment and taking into account the friction]. *Izvestija Bakinskogo gosudarstvennogo universiteta. Fiziko-matematicheskaja serija* [News of Baku State University. Physical and mathematical series], 2011, no. 3, pp. 86–93.