

УДК 621.039

С.М. КАПЛУНОВ, д-р техн. наук, проф.заведующий лабораторией¹

E-mail: saveliykaplunov@gmail.com

Н.Г. ВАЛЬЕС, канд. техн. наукстарший научный сотрудник¹

E-mail: vallesnat@mail.ru

Е.А. ДРОНОВАнаучный сотрудник¹

E-mail: klevdr54@mail.ru

А.В. САМОЛЫСОВаспирант¹

E-mail: vostok-as88@mail.ru

¹Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, г. Москва, Россия*Поступила в редакцию 22.06.2017.*

ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ СКОРОСТИ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ТРУБНОГО ПУЧКА ПРИ ОБТЕКАНИИ ПОТОКОМ ЖИДКОСТИ

На основании проведенного в работе анализа результатов экспериментальных исследований поведения пучков труб при срывном обтекании потоком создана математическая модель гидроупругого механизма возбуждения колебаний трубного пучка. Проблема возникновения гидроупругого возбуждения пучка труб сводится к развитию неустойчивости невозмущенного состояния упругих трубок. На базе теоретического исследования математической модели получено необходимое и достаточное условие устойчивости пучка труб, выраженное через безразмерные параметры системы. В работе используются два численных вихревых метода расчета: метод дискретных вихрей и метод вязких вихревых доменов. Цель исследования — разработка методики определения недопустимых значений скорости потока и обеспечение безопасности эксплуатации трубчатых теплообменных аппаратов.

Ключевые слова: срывное обтекание, математическая модель, гидроупругое возбуждение, вихревые методы, метод вязких вихревых доменов, критерии устойчивости

В работе рассматривается природа гидродинамических механизмов возбуждения вибраций теплообменных пучков труб в поперечном потоке жидкости. Такое возбуждение связано с коллективными процессами в пучке, состоящем из большого числа трубок, а возбуждающие силы порождаются нестационарным отрывным течением в межтрубном пространстве [1–5]. Математическое описание явления требует разработки достаточно сложных моделей.

На основании проведенного анализа результатов экспериментальных исследований поведения пучков труб при срывном обтекании с учетом линейности гидродинамического взаимодействия между колеблющимися трубами создана математическая модель гидроупругого механизма возбуждения колебаний трубного пучка.

Эта модель описывает гидроупругий механизм возбуждения как развитие неустойчивости невоз-

мущенного состояния упругих труб в условиях их достаточно тесного расположения и срывного обтекания.

На основании разработанной математической модели [6] стало возможным оценить устойчивость состояния рассматриваемой конфигурации большого пучка труб при его срывном обтекании в поперечном потоке, основываясь на подходе Ляпунова.

Для определения наиболее эффективного численного метода с целью построения указанной модели было проведено представительное тестирование современных вихревых численных методов для успешного решения целого ряда задач, учитывая сравнение с экспериментальными данными отечественных и зарубежных исследователей [7–10]. На основании полученных результатов при проведении всех численных экспериментов был выбран метод вязких вихревых доменов (рисунок 1).

Математическая модель. Рассматривается система уравнений движения трубок Бернулли–Эйлера (1):

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + b \frac{\partial w}{\partial t} + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} = F_z(z, t), \quad (1)$$

где $w(z, t) = \{w_{1x}, w_{1y}, \dots, w_{Ny}\}^T$ — вектор отклонений осевых линий трубок пучка от невозмущенного положения; $w_{jx}(w_{jy})$ — отклонение осевой линии j -й трубки в направлении оси $Ox(Oy)$; b — параметр, учитывающий внутреннее трение в материале и конструкционное демпфирование трубки; m — погонная масса трубки с учетом находящейся в ней жидкости; EJ — изгибная жесткость трубки; $F_z(z, t)$ — вектор распределенных гидродинамических сил, действующих на трубки в поперечном потоке жидкости; z — координата по направлению длины трубки; t — время.

Не конкретизируя условия закрепления концов упругих трубок и ограничиваясь рассмотрением изгибных колебаний по одной из первых форм колебаний, решение системы уравнений (1) представим в следующем виде:

$$w(z, t) = aX \left(\frac{tu}{2R} \right) \Psi \left(\frac{\gamma z}{l} \right),$$

где $X = \text{col}(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ — $2N$ -мерный вектор отклонений осевых линий трубок от невозмущенного положения; $\Psi \left(\frac{\gamma z}{l} \right)$ — собственная

функция и собственное число λ , соответствующее рассматриваемой форме колебаний упругой трубки как стержня с закрепленными концами. При гидроупругом возбуждении колебания трубок происходят практически всегда по первой форме колебаний, для которой условия возбуждения реализуются в первую очередь. Поэтому можно считать $\Psi \left(\frac{\gamma z}{l} \right)$ соответствующей главной форме колебаний,

имея в виду, что аналогичное рассмотрение можно провести и для высших форм.

Исключая из рассмотрения случайные вынужденные колебания, возбуждаемые случайной силой (возбуждение типа бафтинга), получим систему дифференциальных уравнений, описывающих собственные колебания трубок:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = \mu_1 C(\tau), \quad (2)$$

где $\omega_0 = \omega_{p1} \frac{R}{U}$ — безразмерная собственная

частота отдельной трубки; ω_{p1} — собственная частота изгибных колебаний по рассматриваемой форме; ξ — относительное демпфирование; R — радиус профиля трубки; U — скорость обтекания

трубок; $\mu_1 = \frac{\rho R^2}{m}$ — безразмерный массовый пара-

метр; ρ — плотность жидкости; $C(\tau)$ — матрица гидроупругого взаимодействия (матрица гидродинамических сил, зависящих от времени), пример элементов которой приведен на рисунке 2; τ — безразмерное время; x, \dot{x}, \ddot{x} — векторы смещений, скоростей и ускорений трубки соответственно.

Произведя преобразование Лапласа для обеих частей системы уравнений (2), можно свести рассматриваемую систему дифференциальных уравнений к системе алгебраических уравнений:

$$(p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2)x^* = \mu_1 S(p)x^*, \quad (3)$$

где $S(p)$ — преобразование Лапласа от $C(\tau)$; p — параметр преобразования Лапласа.

Введем в рассмотрение $(2N \times 2N)$ матрицу линейной гидродинамической связи $S(p)$, представляющую собой результат вычисления некоторого интеграла от элементов матрицы гидроупругого взаимодействия $C(\tau)$ — в форме (4):

$$S(p) = \frac{2i}{nT} \int_0^{nT} C(\tau) e^{-p\tau} d\tau. \quad (4)$$

где nT — число периодов при интегрировании, $n \rightarrow \infty$.

Решения системы (3), определяющие коллективные формы колебаний пучка, совпадают с собственными векторами матрицы $S(p)$. После приведения указанной матрицы к диагональному виду и сокращения на собственные векторы матрицы $S(p)$, а также учитывая, что $\lambda_j(p)$ — j -е собственное значение матрицы $S(p)$, характеристическое уравнение системы (3) можно представить в виде

$$\prod_{j=1}^{2N} [p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2 - \mu_1 \lambda_j(p)] = 0. \quad (5)$$

Для устойчивости состояния равновесия первоначальной системы необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения (5) имели отрицательную действительную часть [11]. С использованием разработанной программы исследуется уравнение (5), которое определяет устойчивое либо неустойчивое состояние системы. Для определения границы области устойчивости достаточно рассмотреть лишь один из сомножителей в уравнении (5), в который входит собственное значение $\lambda(p)$, обладающее максимальной мнимой частью. На границе области устойчивости, где $p = i\omega$ — мнимая величина, при учете только величины не выше первого порядка малости относительно малых параметров ξ и μ_1 из (5) получим

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \mu_1 \text{Re}[\lambda(i\omega_0)]; \quad \frac{2\xi\omega_0^2}{\mu_1} = \text{Im}[\lambda(i\omega_0)]. \quad (6)$$

Соотношения (6) определяют частоту колебаний трубок по наименее устойчивой коллективной форме и критическое значение параметра $\frac{2\xi}{\mu_1}$ при заданной безразмерной частоте. Если известна

зависимость $\lambda(i\omega_0)$, то второе из равенств (6) позволяет найти критическую скорость, соответствующую значению $\frac{2\xi}{\mu_1}$ для исследуемого пучка.

В первом приближении относительно малых параметров ξ и μ_1 необходимое и достаточное условие устойчивости имеет вид

$$\frac{2\xi}{\mu_1} \geq \left(\frac{2\xi}{\mu_1}\right)_{кр}; \quad \left(\frac{2\xi}{\mu_1}\right)_{кр} = \frac{Im[\lambda(i\omega_0)]}{\omega_0^2}. \quad (7)$$

Второе из выражений (7) определяет критическое значение параметра $\left(\frac{2\xi}{\mu_1}\right)_{кр}$, т. е. характеризует соотношение между силами демпфирования и дестабилизирующими силами гидродинамического взаимодействия на границе области устойчивости.

Постановка численного эксперимента (методика).

1. Один цилиндр колеблется, остальные неподвижны (см. рисунок 1). Это повторяется $2N$ раз (отдельно в направлении оси X , отдельно оси Y), получаем реализации гидродинамических сил в виде матрицы гидродинамического взаимодействия $C(\tau)$ (см. рисунок 2).

2. Получаем матрицу $S(p)$ линейной гидродинамической связи по формуле (4).

3. Находим $\lambda_j(p)$ — собственные значения матрицы $S(p)$. Из всех собственных значений находим одно λ , обладающее максимальной мнимой частью. На границе области устойчивости $p = i\omega$ — мнимая величина. Получим критическое значение параметра $\left(\frac{2\xi}{\mu_1}\right)_{кр}$ из выражения (6):

$$\left(\frac{2\xi}{\mu_1}\right)_{кр} = \frac{Im[\lambda(i\omega_0)]}{\omega_0^2}.$$

4. Повторяем все пункты (1–3) с другой скоростью обтекания. Получаем границу области устойчивости для пучка (рисунок 3).

На рисунке 1 приведен пример численного эксперимента, проведенного методом вязких вихревых доменов, для определения нестационарных гидродинамических сил, действующих на каждую из трех труб ряда [6].

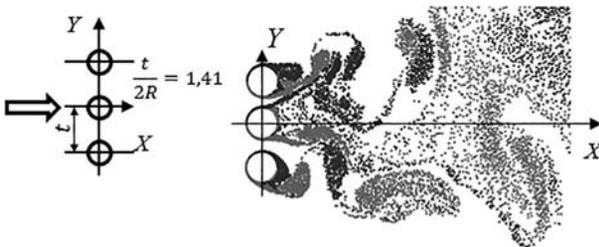


Рисунок 1 — Численный эксперимент методом вязких вихревых доменов для трех трубок, одна из которых совершает гармонические колебания с небольшой амплитудой на частоте ω , в направлении оси X или Y

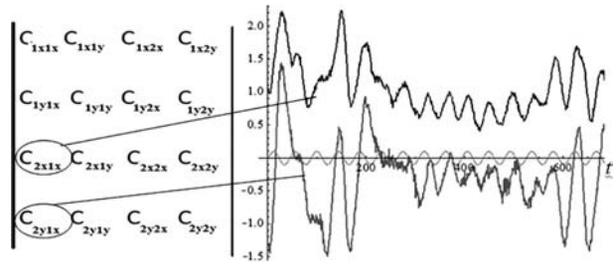


Рисунок 2 — Элементы матрицы C_{jvh} гидродинамического взаимодействия размерностью $[4 \times 4]$ для ряда из двух трубок. Здесь C_{2y1x} — коэффициент гидродинамической силы, действующей на второй цилиндр в направлении оси Y от колебаний первого цилиндра в направлении оси X

Для решения задачи устойчивости трубного пучка было введено понятие матрицы гидродинамического взаимодействия, элементы которой представляют собой временные реализации коэффициентов гидродинамических сил на рисунке 2.

В работе предложен способ определения данной матрицы для большого пучка трубок с регулярной компоновкой поперечного сечения путем расчета гидродинамических сил для небольшого фрагмента пучка. В спектре вычисленных реализаций нестационарных гидродинамических сил, действующих на трубки при их срывном обтекании, выделялась дискретная составляющая на частоте колебаний профиля — формула (4).

В работе представлен один из примеров исследования устойчивости однорядного пучка, основанный на расчете матрицы линейной гидродинамической связи в типовой ячейке из трех трубок (см. рисунок 1).

Результаты, проиллюстрированные диаграммой, представленной на рисунке 3, получены следующим образом. На 15 различных уровнях, при 15 различных частотах, (имитирующих собственные частоты колебаний трубок) заполняются 15 матриц размерностью $[6 \times 6]$ в соответствии со

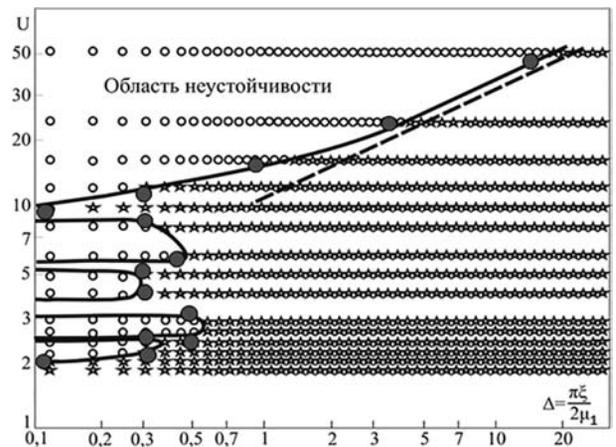


Рисунок 3 — Граница области устойчивости для ряда трубок ($q = t/D = 1,41$): сплошная линия — расчет для ряда из трех трубок; штриховая линия — кривая, построенная по экспериментальным данным Коннора для бесконечного ряда трубок; t — межтрубное расстояние; D — диаметр трубки

схемой, представленной на рисунке 1. После определения собственных чисел матрицы линейной гидродинамической связи находится наибольшая мнимая часть всех собственных чисел матрицы. Расчетные точки кривой устойчивости для трех трубок на 15 уровнях, полученные по формуле (7), представлены на рисунке 3.

На рисунке 3 представлены также результаты экспериментального измерения критической скорости потока по данным работы Коннора, полученные путем непосредственного анализа амплитудно-скоростных характеристик однорядного пучка с густотой $q = 1,41$. При этом наблюдается удовлетворительное соответствие расчетных результатов с экспериментальными данными работы Коннора [1].

Предполагается, что для больших пучков с регулярной компоновкой поперечного сечения достаточно исследовать гидродинамические связи в типовой ячейке фрагмента пучка труб. При этом эксперимент может проводиться на модельном пучке с геометрически подобной типовой ячейкой, состоящей из меньшего числа трубок.

Таким образом, при рассмотрении задачи устойчивости пучков труб в работе были получены следующие основные результаты:

- определено необходимое и достаточное условие устойчивости пучков труб, выраженное через их безразмерные параметры, включающие в себя логарифмический декремент колебаний, безразмерный массовый параметр пучка и собственное число матриц линейной гидродинамической связи, а также проведено сравнение полученных результатов с результатами физических экспериментов;

- на основе рассчитанных характеристик определена критическая скорость для конкретного пучка труб с заданными конструктивными параметрами, значение которой проверялось путем сравнения результатов с имеющимися в литературе экспериментальными данными (S. Chen, J. Connors [1], J. Jendrzejczyk, R. Hartlen, M. Paidoussis, S. Price [5], S. Takahara, H. Tanaka [4], A.A. Жукаускас, В.И. Катинас и др.).

Основные результаты. Проведен теоретический анализ представленной модели гидроупругого механизма возбуждения, который позволил выделить специфический критерий подобия для гидроупругого возбуждения вибраций.

Разработан алгоритм для численного определения матриц линейной гидродинамической связи для конкретных пучков труб. Достоверность алгоритма и составленных по нему программ проверена путем сравнения результатов численных экспериментов с известными данными физического эксперимента.

Получено необходимое и достаточное условие устойчивости фрагмента пучка, выраженное через безразмерные параметры системы и оценку

собственных чисел матриц линейной гидродинамической связи, построенных для рассматриваемого пучка труб.

Предложен способ определения нестационарных гидродинамических сил на трубках в пучках с регулярной компоновкой поперечного сечения, состоящих из большого числа трубок путем расчета сил для небольшого фрагмента пучка.

Определены величины критической скорости теплоносителя в зависимости от безразмерного параметра, включающего в себя логарифмический декремент колебаний, безразмерный массовый параметр пучка и собственное число матриц линейной гидродинамической связи, а также проведено сравнение полученных результатов с результатами физического эксперимента для пучка с теми же параметрами.

Практическая ценность данного подхода состоит в возможности математического моделирования гидроупругой неустойчивости пучка труб путем моделирования неустойчивости фрагмента рассматриваемого пучка.

Предлагаемые в работе подходы обеспечивают получение необходимых данных без привлечения сложного и дорогостоящего натурального физического эксперимента, ограничиваясь численными исследованиями на основании специально разработанных алгоритмов, что позволяет проводить динамический анализ гидродинамических нагрузок и коэффициентов силового взаимодействия для многокомпонентных конструкций методом численного эксперимента для всего возможного диапазона скоростей потока в реальном времени. Разработанные программы представляют результаты расчетов срывного обтекания многокомпонентных систем труб в наглядной форме с привлечением анимации.

Обозначения

$Re = \frac{2RU_\infty}{\nu}$ — число Рейнольдса;

$Sh = \frac{2Rf}{U_\infty}$ — число Струхала;

$C_x = \frac{X}{\rho RU_\infty^2}$ — коэффициент силы сопротивления;

$C_y = \frac{Y}{\rho RU_\infty^2}$ — коэффициент подъемной силы;

$q = \frac{t}{2R}$ — густота пучка (t — расстояние между центрами труб);

$\omega_0 = \frac{\omega_b R}{U_\infty}$ — безразмерная собственная частота колебаний трубы;

$V_r = \frac{V_{кр}}{2f_T R}$ — безразмерная скорость обтекания;

$\mu_1 = \frac{\rho R^2}{m}$ — безразмерный массовый параметр;

$\Delta = \frac{\pi \left(\frac{2\xi}{\mu_1} \right)}$ — безразмерный параметр демпфиро-

вания;

ω_τ — собственная частота изгибных колебаний по рассматриваемой форме;

ξ — относительное демпфирование;

R — радиус профиля трубы;

U — скорость обтекания труб;

ρ — плотность жидкости;

$C(\tau)$ — матрица гидроупругого взаимодействия (матрица гидродинамических сил, зависящих от времени);

τ — безразмерное время;

x, \dot{x}, \ddot{x} — векторы смещений, скоростей и ускорений трубки соответственно.

Список литературы

1. Коннорс, Г.И. Гидроупругие вибрации пучков труб теплообменников / Г.И. Коннорс // Тр. Американского общества инженеров-механиков. Конструирование и технология машиностроения. — 1978. — Т. 100, № 2. — С. 95–102.
2. Прайс, С. Анализ движения одиночного упругого цилиндра для исследования гидроупругой неустойчивости пучка упругих цилиндров в поперечном потоке жидкости / С. Прайс, М. Пайдуссис // Тр. Американского общества инженеров-механиков. Теоретические основы инженерных расчетов. — 1986. — № 2. — С. 271–283.
3. Chen, S.S. Experiment and Analysis of Instability of Tube Rows Subject to Liquid Cross Flow / S.S. Chen, J.A. Jendrzejczyk // ASME. Journal of Applied Mechanics. — 1982. — Vol. 104. — Pp. 704–709.
4. Tanaka, H. Fluidelastic Vibration of Tube Array in Cross Flow / H. Tanaka, S. Takahara // Journal of Sound and Vibration. — 1981. — Vol. 77. — Pp. 19–37.
5. Прайс, С. Гидроупругая неустойчивость двойного ряда круглых цилиндров бесконечной длины при воздействии однородного поперечного потока / С. Прайс, М. Пайдуссис // Тр. Американского общества инженеров-механиков. Конструирование и технология машиностроения. — 1983. — Т. 105, № 1. — С. 25–33.
6. Определение критических параметров обтекания пучка труб методом численного эксперимента / С.М. Каплунов [и др.] // Теплоэнергетика. — 2015. — № 8. — С. 57–62.
7. Котовский, В.Н. Численное исследование режимов отрывного обтекания решеток профилей и колеблющегося цилиндра / В.Н. Котовский, М.И. Ништ, В.М. Федоров // Аэроупругость турбомашин. Институт гидродинамики СО АН СССР. — 1984. — С. 6–23.
8. Самольсов, А.В. Применение метода дискретных вихрей для расчета срывного обтекания одно- и двухкомпонентных конструкций / А.В. Самольсов, А.В. Масевич, Н.Г. Вальес // Проблемы машиностроения и автоматизации. — 2013. — № 3. — С. 42–45.
9. Иванова, О.А. Численное моделирование движения провода ЛЭП под воздействием ветра / О.А. Иванова // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. — 2012. — Спец. выпуск № 2 «Математическое моделирование в технике». — С. 67–74.
10. Самольсов, А.В. Расчет вихревого обтекания неподвижных и колеблющихся цилиндрических тел методом дискретных вихрей / А.В. Самольсов, А.В. Масевич, Н.Г. Вальес // Вестн. науч.-техн. развития. — 2014. — № 6. — С. 31–37.
11. Ляпунов, А.М. Общая задача об устойчивости движения / А.М. Ляпунов. — Москва—Ленинград: Гостехиздат, 1950. — 472 с.

KAPLUNOV Saveliy M., D. Sc. in Eng., Prof.

Laboratory Chief¹

E-mail: saveliykaplunov@gmail.com

VALLES Natalya G., Ph. D. in Eng.

Senior Researcher¹

E-mail: vallesnat@mail.ru

DRONOVA Elena A.

Researcher¹

E-mail: klevd54@mail.ru

SAMOLYSOV Alexey V.

Postgraduate Student¹

E-mail: vostok-as88@mail.ru

¹Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Received 22 June 2017.

CRITICAL SPEED NUMERICAL DETERMINATION FOR ARBITRARY TUBE BUNDLE IN FLUID FLOW

On the basis of the analysis results of experimental behavior of tube bundles under separated flow, the mathematical model for hydroelastic vibration excitation mechanism of tube bundle was developed. The problem of the onset of hydroelastic excitation of a tube bundle reduces to the development of an instability of the unperturbed state of elastic tubes. On the basis of a theoretical study of the mathematical model, a necessary and sufficient condition for the stability of the tube bundle, expressed through the dimensionless parameters of the system, was obtained.

Two numerical vortex calculation methods are used in this paper: the method of discrete vortices and the method of viscous vortex domains. The aim of the study: developing methods for flow velocity unacceptable values and tube heat exchangers operational safety determination.

Keywords: *separated flow, mathematical model, hydroelastic excitation, vortex methods, viscous vortex domains method, stability criteria*

References

1. Connors G.I. Gidrouprugie vibracii puchkov trub teplo-obmennikov [Tube bundles of heat exchangers hydro-elastic vibration]. *Trudy Amerikanskogo obshhestva inzhenerov – mehanikov. Konstruirovaniye i tehnologiya mashinostroeniya* [Transactions of the ASME. Engineering and technology of engineering], vol. 100, no. 2, pp. 95–102.
2. Price S., Paidoussis M. Analiz dvizheniya odinichnogo uprugogo cilindra dlja issledovaniya gidrouprugoj neustojchivosti puchka uprugih cilindrov v poperechnom potoke zhidkosti [Motion of a single elastic cylinder for study of hydroelastic instability of elastic cylinders bundle in cross flow analysis]. *Trudy Amerikanskogo obshhestva inzhenerov – mehanikov. Teoreticheskie osnovy inzhenernyh raschetov* [Transactions of the ASME. Theoretical bases of engineering calculations.], 1986, no. 2, pp. 271–283.
3. Chen S.S., Jendrzejczyk J.A. Experiment and Analysis of Instability of Tube Rows Subject to Liquid Cross Flow. *ASME. Journal of Applied Mechanics*, 1982, vol. 104, pp. 704–709.
4. Tanaka H., Takahara S. Fluidelastic Vibration of Tube Array in Cross Flow. *Journal of Sound and Vibration*, 1981, vol. 77, pp. 19–37.
5. Praiss S., Paidoussis M. Gidrouprugaja neustojchivost dvojnogo rjada kruglyh cilindrov beskonechnoj dliny pri vozdeystvii odnorodnogo poperechnogo potoka [Double row of circular cylinders of infinite length under the influence of cross flow hydroelastic instability]. *Trudy Amerikanskogo obshhestva inzhenerov – mehanikov. Konstruirovaniye i tehnologiya mashinostroeniya* [Transactions of the ASME. Journal of engineering for industry], 1983, vol. 105, no. 1, pp. 25–33.
6. Kaplunov S.M., Valles N.G., Samolysov A.V., Marchevskaya O.A. Opredeleniye kriticheskikh parametrov obtekaniya puchka trub metodom chislennogo eksperimenta [Critical flow over the tube bundle parameters determination applying method of numerical experiment]. *Teploenergetika* [Heat-power engineering], 2015, no. 8, pp. 57–62.
7. Kotovskiy V.N., Nisht M.I., Fedorov V.M. Chislennoye issledovaniye regimov otrivnogo obtekaniya reshetok profilye I kolebluschegosya cilindra [Numerical study of lattices profiles and oscillating cylinder separated flow]. *Aerouprugost turbomashin* [Turbomachines aeroelasticity], Institut gidrodinamiki SO AN SSSR, 1984, pp. 6–23.
8. Samolysov A.V., Masevich A.V., Valles N.G. Primeneniye metoda diskretnikh vichrey dlya rascheta srivnogo obtekaniya odno- i dvukhkomponentnikh konstrukcij [Discrete vortices method application for calculation of separated flow around single and two-component structures]. *Problemy mashinostoeniya i avtomatizacii* [Problems of mechanical engineering and automation], 2013, pp. 42–45.
9. Ivanova O.A. Chislennoye modelirovaniye dvigeniya provoda LEP pod deystviyem vetra [Numerical simulation of power lines movement under the wind influence]. *Vestnik MGTU im. Baumana. Ser. Yestestvennyye nauki “Matematicheskoye modelirovaniye v tekhnike”* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural science. “Mathematical modeling in engineering”], 2012, no. 2, pp. 67–74.
10. Samolysov A.V., Masevich A.V., Valles N.G. Raschet vikhrevogo otekaniya nepodvignikch i kolebluschihsvya cilindricheskikh tel metodom diskretnikh vikhrey [Vortex flow around stationary and oscillating cylindrical bodies calculation by discrete vortices method]. *Vestnik nauchno-tekhnicheskogo rasvitiya* [Bulletin of scientific-technical development], 2014, no. 6, pp. 31–37.
11. Lyapunov A.M. *Obschaya zadacha ob ustoychivosty dvigeniya* [General problem of motion stability]. Moscow–Leningrad, Gostekhizdat, 1950. 472 p.