



МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.313

Т.А. ШТЕФАН

старший преподаватель кафедры высшей математики

E-mail: tayana2000@rambler.ru

Запорожский национальный технический университет, г. Запорожье, Украина

Е.В. ВЕЛИЧКО, канд. физ.-мат. наук

докторант кафедры компьютерных наук

E-mail: velichko_ev@i.ua

Таврический государственный агротехнологический университет, г. Мелитополь, Украина

Поступила в редакцию 10.03.2016.

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ В ЦИЛИНДРЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЖИМАЮЩИХ НАГРУЗОК

Рассматривается круговой цилиндр конечной высоты, находящийся в условиях аксиально-симметричной деформации. К основаниям цилиндра приложены сжимающие нагрузки. Функция напряжений Эри представлена в виде полиномов Лежандра. Исследовано поведение функции, описывающей потенциальную энергию формообразования в цилиндре. В результате численных экспериментов выяснено положение зон, в которых потенциальная энергия максимальна. Рассмотрены случаи симметричной и несимметричной нагрузки на основания цилиндра.

Ключевые слова: упругий цилиндр, осесимметрическая деформация, энергия формоизменения, многочлены Лежандра

Введение. В рамках теории упругости для определения зон материала, в которых наиболее вероятно разрушение конструкции, используются различные гипотезы прочности [1]. Представляет интерес разработка численно-аналитического способа решения задачи для тел цилиндрической формы, поскольку в конструировании часто используются цилиндрические элементы.

Конструкции, которые имеют форму слоистого цилиндра, находят широкое применение в нефтяной, газовой и авиационной промышленности. Как отмечается в обзоре [2], использование многослойных конструкций из композитов открывает важный резерв прочности и оптимизации конструкций.

Использование соотношений пространственной теории упругости к изучению таких конструкций позволяет получить более реальную картину напряженно-деформированного состояния.

Результаты экспериментальных исследований процесса деформации цилиндрических заготовок штампом изложены в [3]. Теоретическим исследованиям деформационной повреждаемости при осесимметричной деформации посвящена работа [4]. В качестве критерия разрушения авторы используют критерий Мизеса, с точки зрения которого распределение потенциальной энергии формоизменения существенно зависит от геометрии тела, его упругих характеристик и приложенных к телу нагрузок. Численное моделирование проведено методом конечных элементов с использованием программы ANSYS. В работе [5] исследуется осадка кругового цилиндра жесткими штампами в условиях установившейся ползучести. Численное решение строится на основе пакета LS-DYNA.

Чаще всего во время расчетов исследователи пользуются приближенными методами [2–5], поэтому получение именно аналитических выраже-

ний для функции потенциальной энергии формоизменения является актуальной задачей.

Целью представленной работы является получение аналитического решения задачи о сдавливании цилиндра усилиями, приложенными к его торцам и изменяющимися по параболическому закону. Условия на боковой грани цилиндра сформулированы таким образом, чтобы решение задачи было точным. В рамках поставленной статической задачи численно исследуется поведение функции, описывающей потенциальную энергию формоизменения, а также проводится отыскание критических областей деформированного упругого кругового цилиндра конечной высоты с точки зрения энергетической гипотезы и влияние параметров на геометрические характеристики бочкообразности. Численное решение будет реализовано на основе пакета MAXIMA.

Постановка задачи. Объектом исследования является деформированный упругий круговой цилиндр конечной высоты, изготовленный из материала, обладающего изотропными свойствами. Рассматриваются случаи симметричной и несимметричной сжимающей нагрузки на основания цилиндра.

При построении математической модели задачи предполагается, что круговой цилиндр радиуса R и длины h , ось которого совпадает с осью Oz , находится в условиях аксиально-симметричной деформации, вызванной действием на его основания параболических штампов, производящих сжимающую нагрузку. Считаем, что все величины обезразмерены естественным образом: параметры подобраны таким образом, что модуль Юнга становится равным единице. Будем использовать цилиндрическую систему координат z, r, θ с началом в середине верхнего основания и считать, что ось Oz направлена вниз. В этом случае касательные напряжения $\tau_{r\theta}, \tau_{z\theta}$ тождественно равны нулю, а остальные компоненты тензора напряжений и вектора перемещений не зависят от угла θ .

При решении задачи будем использовать обратный метод Сен-Венана также как в [6]. Функцию напряжений Эри будем искать в виде полиномов Лежандра соответствующей степени от двух переменных (радиуса и длины цилиндра), что даст возможность точно удовлетворить граничные условия на нижней и верхней гранях цилиндра [7].

После построения бигармонической функций напряжений Эри φ все ненулевые составляющие тензора напряжений и компоненты тензора перемещений определяются по формулам [7]:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right); \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right);\end{aligned}\quad (1)$$

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left((2-\nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right); \\ \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial z} \left((1-\nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right); \\ 2\mu u(r, z) &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z}; \\ 2\mu w(r, z) &= 2(1-\nu) \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2},\end{aligned}\quad (2)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа, ν — коэффициент Пуассона.

Также считаем равными нулю касательные напряжения на торцах цилиндра и нормальные напряжения на его боковой поверхности. Кроме этого, будем считать, что точки, находящиеся на окружности, ограничивающей среднее поперечное сечение цилиндра (при $z = h/2$), не перемещаются в вертикальном направлении, то есть жестко закреплены по окружности. Нормальные силы, приложенные к основаниям цилиндра, описываются квадратичной функцией от радиальной координаты. Запишем оговоренные условия в математической форме:

$$\begin{aligned}\sigma_z(r; 0) &= -\frac{p_0}{R^2} (R^2 - r^2); \\ \sigma_z(r; h) &= -\frac{p_h}{R^2} (R^2 - r^2); \\ \sigma_r(R; z) &= 0; \tau_{rz}(r; 0) \equiv \tau_{rz}(r; h) = 0; \\ w(R; h/2) &= 0,\end{aligned}\quad (3)$$

где p_0, p_h — максимальные по модулю нагрузки на верхнем и нижнем основаниях цилиндра (рисунок 1). Так как задача решается методом Сен-Венана, то недостающие граничные условия на боковой грани получим из условия попадания функции напряжений в заданный класс функций.

Дискретизация граничных условий. Заметим, что общее решение сформулированной задачи при произвольных граничных условиях неизвестно. Отдельно строятся приближенные решения для случаев длинного цилиндра, короткого цилиндра и «кубического» цилиндра, у которого диаметр

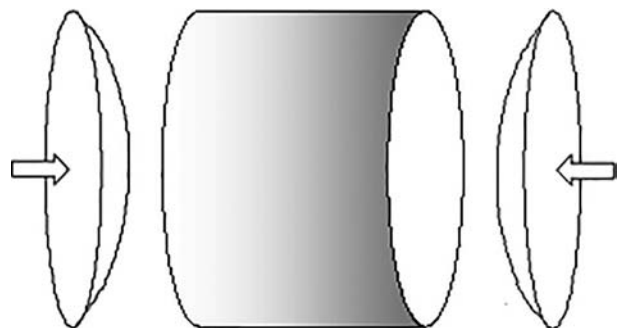


Рисунок 1 — Схема деформации

и высота есть величины одного порядка [8]. В тех случаях, когда высота цилиндра существенно меньше диаметра основания (короткий цилиндр), и, следовательно, цилиндр приближенно можно считать круглым диском, наиболее существенным является удовлетворение условий на основаниях цилиндра [1].

Воспользуемся решением для короткого цилиндра, в котором применяются полиномы Лежандра $P_n(x)$. Согласно [1] в этом случае функцию напряжений Эри $\varphi(r, z)$ нужно искать в виде ряда:

$$\varphi(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (r^2 + z^2)^{n/2} P_n(z/\sqrt{r^2 + z^2}) + \sum_{n=0}^{\infty} B_{n+2} (r^2 + z^2)^{1+n/2} P_n(z/\sqrt{r^2 + z^2}),$$

где A_n, B_n — произвольные константы. Мы ограничимся рассмотрением конечного числа слагаемых так же, как в [6], то есть выражением

$$\varphi(r, z) = \sum_{n=0}^k A_n h^2 (r^2 + z^2)^{n/2} P_n(z/\sqrt{r^2 + z^2}) + \sum_{n=0}^{k-2} B_{n+2} (r^2 + z^2)^{1+n/2} P_n(z/\sqrt{r^2 + z^2}).$$

Множитель h^2 в первом слагаемом добавлен для того, чтобы коэффициенты A_n, B_n имели одинаковую размерность (Па). При фиксированном значении параметра k количество произвольных констант A_n, B_n будет равно $2k$.

Заменим граничные условия (3) дискретным аналогом:

$$\begin{aligned} \sigma_z(0;0) &= -p_0; \quad \sigma_z(0;h) = -p_h; \\ \sigma_z(R;0) &= 0; \quad \sigma_z(R;h) = 0; \\ \tau_{rz}(0;h) &= 0; \quad \tau_{rz}(R;h) = 0; \\ \tau_{rz}(0;0) &= 0; \quad \tau_{rz}(R;0) = 0; \quad w(R;h/2) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Покажем, что при значении индекса $k = 6$ сформулированные дискретные условия (4) будут эквивалентны непрерывным условиям (3). Функция $\varphi(r, z)$ в случае $k = 6$ будет содержать 12 констант. При использовании формул (1) и (2) константы A_0 и A_1 исчезают, а константы A_2 и B_2 входят только в выражение для функции перемещений $w(r, z)$ в виде линейной комбинации. Таким об-

разом, получаем девять независимых констант, для нахождения которых необходима система из девяти уравнений. В таблице 1 приведены полиномы Лежандра $\tilde{P}_n = (r^2 + z^2)^{n/2} P_n(z/\sqrt{r^2 + z^2})$

и $\tilde{\tilde{P}}_n = (r^2 + z^2)^{1+n/2} P_n(z/\sqrt{r^2 + z^2})$, необходимые для составления системы (3), соответствующие выбранному значению параметра n .

Используя данные таблицы 1, можно показать, что нормальные $\sigma_z(r; z)$ и касательные $\tau_{rz}(r; z)$ напряжения представляются в виде квадратичных функций полярной координаты r :

$$\begin{aligned} \sigma_z(r; z) &= \tilde{a}(z) + \tilde{b}(z) \cdot r^2; \\ \tau_{rz}(r; z) &= \tilde{c}(z) + \tilde{d}(z) \cdot r^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Если нормальное напряжение $\sigma_z(r; z)$, записанное в форме (3), совпадает со значением $\sigma_z(r; z)$, записанным в виде (5), при значениях параметров $z = 0, r = 0$ и при $z = 0, r = R$, то это означает, что оба эти представления совпадают при любых значениях r для $z = 0$. Аналогичные рассуждения справедливы и для касательных напряжений $\tau_{rz}(r; z)$. Таким образом, показана эквивалентность дискретных условий (4) и непрерывных условий (3).

Исследование функции энергии формоизменения. Рассмотрим цилиндр, у которого радиус основания совпадает с высотой. Значения параметров примем равными $R = 1, h = 1, \nu = 0,3$. Будем рассматривать случаи симметричной ($p_0 = p_h$) и несимметричной ($p_0 \neq p_h$) сжимающих нагрузок. Положим $p_0 = 0, 1$.

Функция энергии формоизменения в полярных координатах с учетом того, что компоненты $\tau_{r\theta}, \tau_{z\theta}$ тождественно равны нулю, запишется в виде:

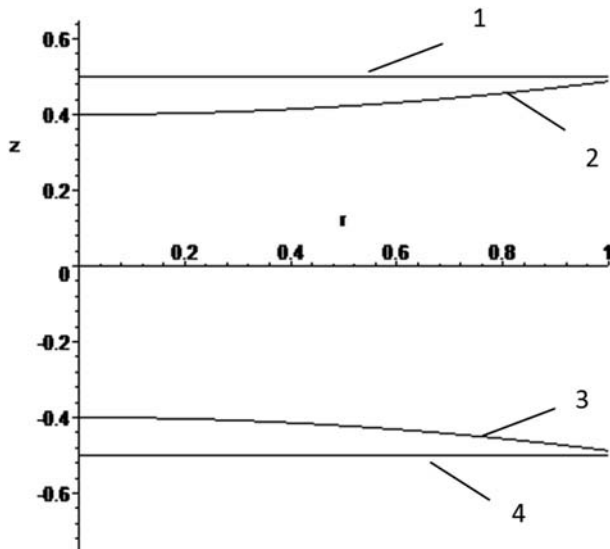
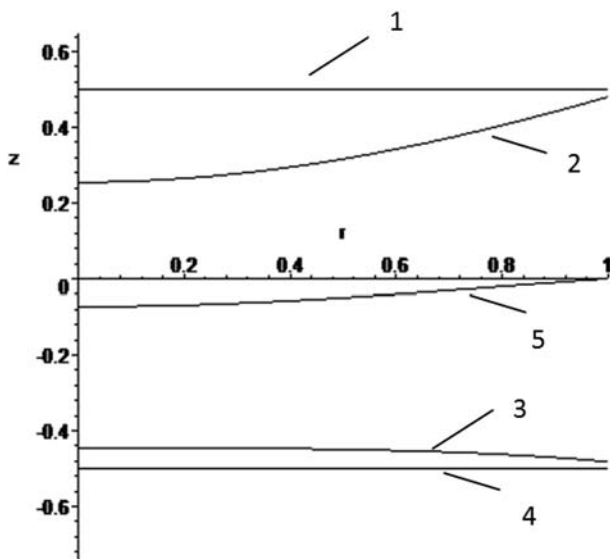
$$\begin{aligned} \sigma^{IV} &= F(r, \theta, z) = \\ &= \sqrt{(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z)^2 - 3(\sigma_r \sigma_\theta + \sigma_r \sigma_z + \sigma_\theta \sigma_z - \tau_{rz}^2)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Определив явно компоненты тензора деформаций согласно (1) с учетом граничных условий (3), перейдем к численному исследованию функции потенциальной энергии формоизменения. Численную реализацию метода решения задачи для короткого цилиндра проведем с помощью пакета MAXIMA.

Таблица 1 — Полиномы Лежандра

| n | \tilde{P}_n | n | $\tilde{\tilde{P}}_n$ |
|-----|--|-----|--|
| 1 | z | 1 | $z(r^2 + z^2)$ |
| 2 | $-0,5r^2 + z^2$ | 2 | $-0,5(r^2 - 2z^2)(r^2 + z^2)$ |
| 3 | $-0,5z(-2z^2 + 3r^2)$ | 3 | $-0,5z(-2z^2 + 3r^2)(r^2 + z^2)$ |
| 4 | $0,375r^4 - 3r^2z^2 + z^4$ | 4 | $0,125(3r^4 - 24r^2z^2 + 8z^4)(r^2 + z^2)$ |
| 5 | $0,125z(15r^4 - 40r^2z^2 + 8z^4)$ | | |
| 6 | $-0,3125r^6 + 5,625r^4z^2 - 7,5r^2z^4 + z^6$ | | |

На рисунках 2 и 3 изображены графики функций вертикальных перемещений точек верхнего и нижнего оснований, а также внутренних точек круга, окружность которого ограничивает среднее поперечное сечение (при $z = h/2$), при симметричной и несимметричной нагрузках на основания. Так как вертикальные перемещения пропорциональны прикладываемым нагрузкам (3), для наглядности при построении графиков, приведенных на рисунке 2 и рисунке 3, положено $p_0 = 0,25$. Цифрами 1 и 4 обозначены начальные положения точек оснований цилиндра. Цифрами 2 и 3 соответственно обозначены положения точек нижнего и верхнего оснований цилиндра под действием сжимающей нагрузки. Вертикальные перемещения оказались симметричными при одинаковых нагрузках и несимметричными при несимметричных нагрузках, что соответствует физическому смыслу задачи. Цифрой 5 на рисунке 3 отмечено

Рисунок 2 — Вертикальные перемещения при $p_h = p_0$ Рисунок 3 — Вертикальные перемещения при $p_h = 2p_0$

положение точек среднего поперечного сечения цилиндра. Отметим, что при симметричной нагрузке точки срединного сечения остаются неподвижными. Как видим (см. рисунок 3), увеличение нагрузки на нижнем основании цилиндра привело к «выдавливанию» точек среднего поперечного сечения в сторону верхнего основания пропорционально увеличению нагрузки.

Исследование напряжений на боковой грани цилиндра показало, что при несимметричной нагрузке ($p_h = 2p_0$) график функции нормального напряжения $\sigma_r(1; z)$ теряет симметричность относительно срединного сечения: происходит смещения максимума нормального напряжения к точкам нижнего основания, напряжения в точках срединного сечения возрастает пропорционально увеличению нагрузки. График же функции касательного напряжения $\tau_{rz}(1; z)$ в точках боковой грани при симметричной ($p_0 = p_h$) и не симметричной ($p_h = 2p_0$) нагрузках на основания цилиндра остается симметричным относительно оси, проходящей через точки срединного сечения цилиндра, максимальное значение увеличивается по модулю пропорционально прикладываемой нагрузке.

Выпишем аналитические выражения для касательных и нормальных напряжений соответственно в явном виде:

- симметричная нагрузка:

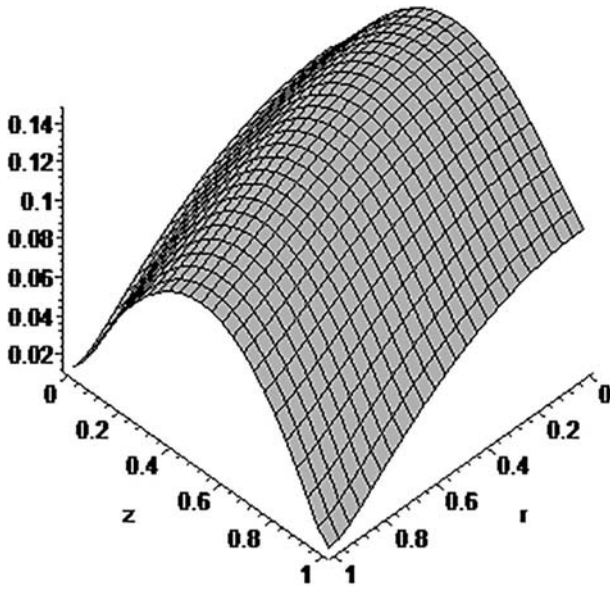
$$\begin{aligned}\sigma_r(1; z) &= -0,0075 + 0,13 \cdot z - 0,13 \cdot z^2; \\ \tau_{rz}(1; z) &= -0,2 \cdot z + 0,2 \cdot z^2;\end{aligned}\quad (7)$$

- несимметричная нагрузка:

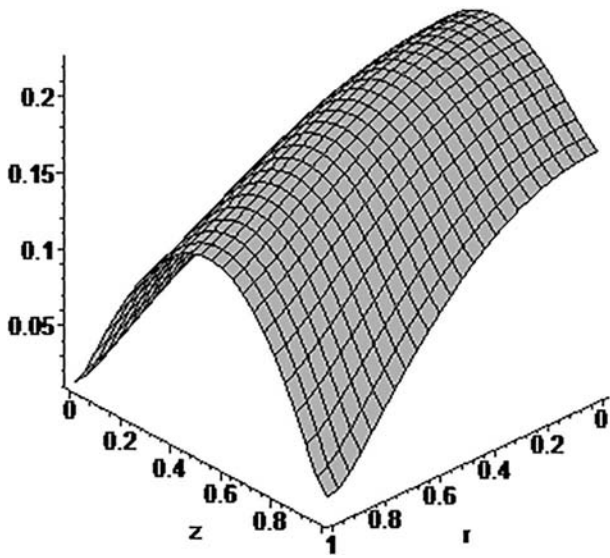
$$\begin{aligned}\sigma_r(1; z) &= -0,0075 + 0,1658 \cdot z - 0,13 \cdot z^2 + 0,07 \cdot z^3; \\ \tau_{rz}(1; z) &= -0,27 \cdot z + 0,2 \cdot z^2 + 0,07 \cdot z^3.\end{aligned}\quad (8)$$

Условия (4), (7) или (4), (8) в совокупности дают полную формулировку соответствующей граничной задачи теории упругости. Так как задача (4) решается полуобратным методом, то при условиях (7) и (8) полученные решения будут точными.

На рисунке 4 изображены графики функции потенциальной энергии формоизменения $F(r, z)$ в случае одинаковой по модулю нагрузки и при двойной нагрузке на нижнее основание $p_h = 2p_0$. Как и следовало ожидать, функция потенциальной энергии формоизменения при симметричной нагрузке на основания цилиндра также распределяется симметрично, точка глобального максимума находится на оси цилиндра в ее середине. Сечения двумерного графика функции $F(r, z)$ плоскостями $r = 0$ и $z = 0$, $z = 1$ в случае несимметричной нагрузки (при $p_h = 2p_0$) позволяют сделать вывод о том, что при пропорциональном увеличении нагрузки на одно из оснований, точка экстремума функции энергии смещается вдоль оси ближе к тому торцу цилиндра, к которому



а



б

Рисунок 4 — Функция $F(r, z)$ при нагрузках $p_0 = p_h$ и $p_h = 2p_0$

приложена большая нагрузка. Заметим, что точки глобального максимума функции энергии формоизменения являются наиболее опасными с точки зрения прочности. Именно в точках глобального максимума функции потенциальной энергии быстрее всего произойдет разрушение материала конструкции.

Положение глобального максимума функции энергии при несимметричной нагрузке. Зафиксируем нагрузку на одном из оснований цилиндра и будем увеличивать ее на другом основании в целое число раз. Был проведен ряд вычислительных экспериментов, при которых определялись положения и значения глобального максимума функции $F(r, z)$ при различных значениях отношения нагрузки на основаниях цилиндра $s = p_h/p_0$, $s = 1, 2, 3, 4$. В таблице 2 приведены точки и значения глобально-

Таблица 2 — Точки и значения глобального максимума функции $F(r, z)$

| $s = p_h/p_0$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---------------|-------|-------|-------|-------|
| h_{\max} | 0,5 | 0,601 | 0,651 | 0,682 |
| F_{\max} | 0,146 | 0,224 | 0,306 | 0,391 |

го максимума функции потенциальной энергии формоизменения при фиксированной нагрузке p_0 (здесь $p_0 = 0,1$; $\nu = 0,3$) на верхнее основание и пропорциональном увеличении нагрузки на нижнее основание $p_h = s \cdot p_0$.

Итак, если зафиксировать нагрузку на одном из оснований цилиндра и увеличивать ее на другом основании, то точка глобального максимума будет смещаться ближе к более нагруженному основанию, а значение глобального максимума функции потенциальной энергии будет расти, и этот рост не будет линейным (рисунок 5).

Исследование влияния коэффициента Пуассона на поведение функции энергии формообразования. Результаты проведенных вычислительных экспериментов, при которых определялись положения и значения глобального максимума функции $F(r, z)$ при различных значениях коэффициента Пуассона $\nu \in [0,05; 0,49]$ с шагом 0,05 и при различных значениях параметра $s = 1, 2, 3, 4$, представлены в таблицах 3–6.

Как видим, максимальное значение функции потенциальной энергии увеличивается по мере возрастания параметра s и уменьшается с возрастанием коэффициента Пуассона.

Вывод. Предложен способ нахождения наиболее опасных с точки зрения прочности областей в цилиндре, деформированном усилиями, приложенными к его торцам и изменяющимися по па-

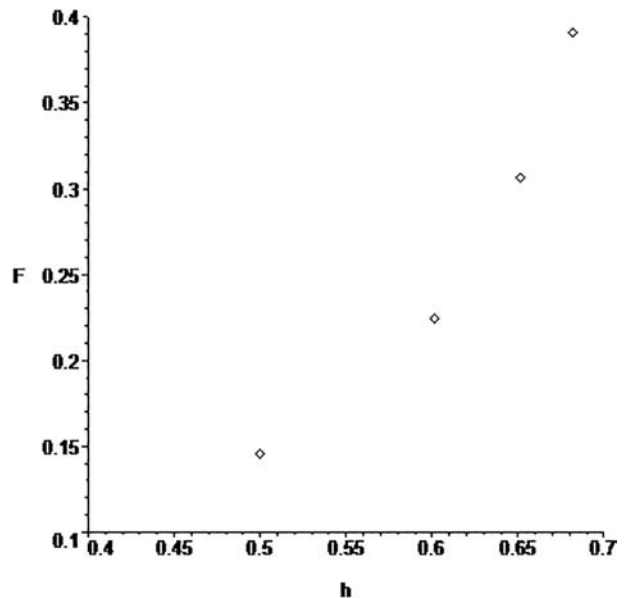


Рисунок 5 — Точки и значения глобального максимума функции $F(r, z)$

Таблица 3 — $s = 1$

| | | | | | | | | | | |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| ν | 0,05 | 0,1 | 0,15 | 0,2 | 0,25 | 0,3 | 0,35 | 0,4 | 0,45 | 0,49 |
| F_{\max} | 0,151 | 0,150 | 0,149 | 0,148 | 0,147 | 0,146 | 0,145 | 0,144 | 0,143 | 0,142 |

Таблица 4 — $s = 2$

| | | | | | | | | | | |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| ν | 0,05 | 0,1 | 0,15 | 0,2 | 0,25 | 0,3 | 0,35 | 0,4 | 0,45 | 0,49 |
| F_{\max} | 0,233 | 0,230 | 0,229 | 0,227 | 0,225 | 0,224 | 0,222 | 0,220 | 0,218 | 0,217 |

Таблица 5 — $s = 3$

| | | | | | | | | | | |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| ν | 0,05 | 0,1 | 0,15 | 0,2 | 0,25 | 0,3 | 0,35 | 0,4 | 0,45 | 0,49 |
| F_{\max} | 0,320 | 0,317 | 0,315 | 0,311 | 0,309 | 0,306 | 0,303 | 0,301 | 0,297 | 0,295 |

Таблица 6 — $s = 4$

| | | | | | | | | | | |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| ν | 0,05 | 0,1 | 0,15 | 0,2 | 0,25 | 0,3 | 0,35 | 0,4 | 0,45 | 0,49 |
| F_{\max} | 0,411 | 0,407 | 0,403 | 0,399 | 0,394 | 0,391 | 0,386 | 0,382 | 0,378 | 0,375 |

рабочему закону. Получены аналитические выражения для компонент вектора перемещений и тензора напряжений короткого цилиндра, к основаниям которого приложены сжимающие нагрузки. Решение поставленной задачи является точным и может использоваться как тестовое при решении численными методами. Численная реализация предложенного в работе метода решения задачи для короткого цилиндра проведена с помощью разработанной авторами компьютерной программы в системе МАХИМА. В результате численных экспериментов выяснено положение зон, в которых потенциальная энергия формоизменения максимальна. Численно исследовано влияние коэффициента Пуассона на поведение функции потенциальной энергии формоизменения цилиндра.

Список литературы

1. Власов, В.З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В.З. Власов. — М.: ГИФМЛ, 1960. — 490 с.
2. Александров, А.С. Обзор применения критериев прочности и условий пластичности в дорожных конструкциях и грунтовых основаниях / А.С. Александров, Н.П. Александрова // Совершенствование технологий строительства и ремонта дорог для условий Сибири: сб. науч. тр. — Омск, 2010. — С. 65–86.
3. Кухарь, В.В. Макропоказатели формоизменения и работа деформации при осадке заготовок выпуклыми плитами / В.В. Кухарь // Вісн. Нац. техн. ун-ту України «КПІ». Сер. Машинобудування. — Київ, 2012. — Вип. № 64. — С. 227–233.
4. Тутьшкин, Н.Д. Моделирование деформационной повреждаемости материалов при осесимметричной осадке / Н.Д. Тутьшкин, Х.Х. Куанг // Изв. ТулГУ. Естественные науки. — Тула, 2011. — Вып. № 1. — С. 129–137.
5. Локощенко, А.М. Исследование осадки круговых цилиндров при ползучести с учетом и без учета бочкообразования / А.М. Локощенко, П.А. Моссаковский, В.В. Терауд // Вычислительная механика сплошных сред. — 2010. — Т. 3, № 1. — С. 52–62.
6. Штефан, Т.А. Энергия формоизменения в коротком цилиндре при аксиальной симметричной деформации / Т.А. Штефан, Е.В. Величко // Деформация и разрушение материалов. — 2014. — № 6. — С. 12–18.
7. Ляв, А. Математическая теория упругости / А. Ляв. — М.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. — 675 с.
8. Лурье, А.И. Теория упругости / А.И. Лурье. — М.: ГИФМЛ, 1970. — 940 с.

SHTEFAN Tatyana A.

Lecturer, Department of High Mathematics
E-mail: tayana2000@rambler.ru
Zaporizhzhya National Technical University

VELICHKO Helen V., Ph. D. in Phys.-Math., Assoc. Prof.

Ph. D. Student of Computer Science Department
E-mail: velichko_ev@i.ua
Tavria State Agrotechnological University, Melitopol, Ukraine

Received 10 March 2016.

NUMERICAL-ANALYTICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF AXISYMMETRIC DEFORMATION IN A CYLINDER UNDER ACTION OF COMPRESSIVE LOADS

A circular cylinder of finite height that is in the conditions of axial symmetric deformation is considered. Compressive loads are applied to the bases of the cylinder. The Erie stress function is represented in the form of Legendre polynomials. The behavior of a function describing the potential energy of formation in a cylinder is investigated. As a result of numerical experiments, the location of the zones, in which the potential energy is maximum, is clarified. The cases of a symmetric and asymmetric load on the cylinder bases are considered.

Keywords: elastic cylinder, axisymmetric deformation, forming energy, Legendre polynomials

References

1. Vlasov V.Z. *Balki, plity i obolochki na uprugom osnovanii* [Beams, plates and shells on elastic Foundation]. Moscow, GIFML, 1960. 490 p.
2. Alexandrov A.S., Alexandrova N.P. *Obzor primeneniya kriteriev prochnosti i usloviy plastichnosti v dorognykh konstrukciyakh i gruntovykh osnovaniyakh* [Review of the application of criteria of strength and plasticity in terms of road structures and soil foundations]. *Sovershenstvovanie tekhnologii stroitelstva i remonta dorog dlya uslovii Sibiri: sb. naych. tr.* [Improvement of technologies of construction and repair of roads for the conditions of Siberia: collection of scientific papers], Omsk, 2010, pp. 65–86.
3. Kukhar V.V. *Makropokazateli formoizmeneniya i rabota deformatsii pri osadke zagotovok vipyklimi plitami* [Macroindicators of deformation and strain in upsetting convex plates]. *Visnik Nacionalnogo tekhnichnogo universitetu Ykraïni "KPI". Seriya "Mashinobdyvannya"* [Bulletin of the National Technical University of Ukraine "KPI". Series "Mechanical Engineering"]. Kiev, 2012, no. 64, pp. 227–233.
4. Tutyshkin N.D., Quang H.H., *Modelirovanie deformatsionnoi povrejdaemosti materialov pri osesimmetrichnoi osadke* [Modeling of deformation deformation of materials during axisymmetric upsetting]. *Izvestiya TylGU. Estestvennye nayki* [News TulGU. Natural science.], 2011, no. 1, pp. 129–137.
5. Lokoshchenko A.M., Mossakovsky P.A., Teraud V.V. *Issledovanie osadki krygovih cilindrov pri polzychesti s uchetom i bez ucheta bochkobrazovaniya* [Investigation of the precipitation of circular cylinders in creep with and without the education barrel]. *Vichislitel'naya mehanika sploshnih sred* [Computational continuum mechanics], 2010, vol. 3, no. 1, pp. 52–62.
6. Stefan T.A., Velichko E.V. *Energiya formoizmeneniya v korotkom cilindre pri aksialnoi simmetricheskoï deformatsii* [The Energy of deformation in a short cylinder under axial symmetric deformation]. *Deformatsiya i razryshenie materialov* [Deformation and fracture of materials], 2014, no. 6, pp. 12–18.
7. Law A. *Matematicheskaya teoriya uprugosti* [The Mathematical theory of elasticity]. Moscow, 1935. 675 p.
8. Lurie A.I. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow, GIFML, 1970. 940 p.