

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 534.42

А.О. ШИМАНОВСКИЙ, д-р техн. наук, проф.

заведующий кафедрой «Техническая физика и теоретическая механика»

E-mail: tm.belsut@gmail.com

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика Беларусь

Й.С. БОЦКО, канд. техн. наук, проф.

директор института конструирования и инженерии процессов — заведующий кафедрой прикладной механики и машиностроения

Технический университет в Кошице, г. Кошице, Словакия

Поступила в редакцию 12.01.2018.

ВЛИЯНИЕ ЖЕСТКОСТИ ЗАКРЕПЛЕНИЙ НА КОЛЕБАНИЯ КОРОТКИХ ОДНОПРОЛЕТНЫХ БАЛОК

Анализируется влияние жесткости узла крепления короткой консольной балки на частоты ее собственных колебаний. Для математического описания движения балки использовано уравнение Тимошенко. Показано, что граничное условие, реализующее защемление конца балки, может привести к завышенному в 4 раза значению частоты собственных колебаний по сравнению с экспериментальными данными и расчетом, учитывающим деформации узла крепления. Приведены рекомендации по созданию конечно-элементных моделей, предназначенных для анализа колебаний конструкций.

Ключевые слова: свободные колебания, граничные условия, уравнение Тимошенко, собственные частоты, жесткость узла крепления

Введение. При разработке конечно-элементных моделей различных конструкций широко используют стержневые модели, которые позволяют достаточно быстро оценить напряженно-деформированное состояние при статическом нагружении. В то же время при решении задач динамики, в частности, об определении частот собственных колебаний, результаты расчетов не всегда соответствуют наблюдающимся на практике значениям. С такой ситуацией приходилось сталкиваться и раньше, когда расчеты колебаний систем выполнялись с применением, главным образом, аналитических методов.

В классической монографии [1, с. 355] отмечается, что при одинаковом порядке высоты и длины стержня расчетное значение частоты, полученное путем решения уравнения Эйлера–Бернулли, оказывается весьма приближенным и может отличаться от действительного на 30–100 %. Наиболее велики погрешности при расчете защемленных стержней. Граничные условия в этом случае предполагают отсутствие линейного и углового перемещения в месте выхода стержня из узла крепления. В действительности

материал детали, с которой связан стержень, обладает определенной деформативностью и дает возможность стержню повернуться и сместиться поступательно. Например, в [2] описывается ситуация, при которой значения низшей частоты собственных поперечных колебаний стойки вентилятора, полученные расчетом и в ходе эксперимента, отличались почти в 5 раз. Очевидно, что результаты таких расчетов не могут быть использованы на практике.

Анализ колебаний однопролетных балок подробно изучен для случаев, при которых на их концы наложены идеальные связи [3, 4]. Также исследованы некоторые случаи колебаний упруго закрепленных длинных стержней, движение которых описывалось уравнением Эйлера–Бернулли [1]. Решение аналогичной задачи с применением уравнения Тимошенко выполнено в [5]. При этом вопрос о целесообразности использования граничных условий, учитывающих деформации узла крепления, при численных расчетах методом конечных элементов в известных нам источниках не рассматривался. Цель представленной работы — анализ погрешностей, возникающих при

расчетах конструкций вследствие неполного учета деформаций в местах крепления.

Механико-математическая модель. Частоты собственных поперечных колебаний длинных стержней постоянного поперечного сечения чаще всего определяют с помощью формулы [6, 7]

$$p_i = \frac{\alpha_i^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_z}{\mu}}, \quad (1)$$

где α_i — коэффициент, соответствующий i -й форме колебаний стержня, который зависит от способа закрепления его концов; l — длина стержня; E и μ — модуль Юнга и погонная масса стержня; I_z — осевой момент инерции поперечного сечения.

В справочнике [8] приведены соотношения, позволяющие в формуле (1) учесть влияние на частоту колебаний присоединенной массы, расширяя этим диапазон ее применения.

Для расчета колебаний коротких стержней используем уравнение Тимошенко. Примем, что высота стержня h и длина l . Дифференциальное уравнение, учитывающее сдвиговые деформации и инерцию поворота поперечного сечения имеет вид [7, 9]:

$$EI_z \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \rho I_z \left(1 + \frac{Ek}{G} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{I_z k \rho^2}{G} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0, \quad (2)$$

где $y(x, t)$ — уравнение динамической упругой линии стержня; G и ρ — модуль сдвига и плотность материала стержня; k — коэффициент неравномерности касательных напряжений в поперечном сечении стержня, зависящий от его формы, который вычисляется по формуле [1, 7]

$$k = \frac{A}{I_z^2} \int_{-h_1}^{h_2} \frac{S_b^2(y)}{B(y)} dy,$$

где A — площадь поперечного сечения стержня; h_1, h_2 — расстояния от центра тяжести поперечного сечения до наиболее удаленных его точек (рис. 1); $S_b(y)$ — статический момент выделенной части площади (см. рисунок 1); $B(y)$ — переменная ширина поперечного сечения.

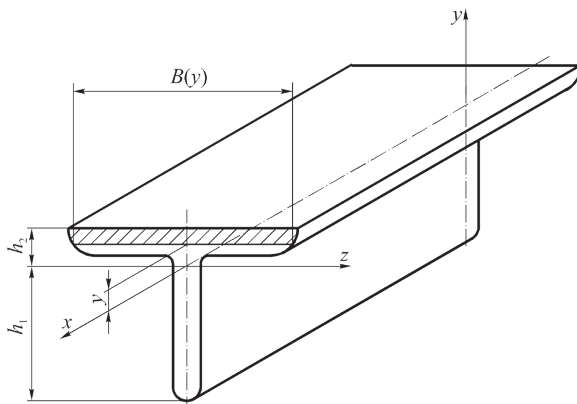


Рисунок 1 — Расчетная схема короткого стержня

Для сравнения с результатами, рассчитанными по формуле (1), выражение частот собственных колебаний, которое получено при решении уравнения (2) с применением метода Фурье, удобно записать в виде [10]:

$$p_i = \frac{\alpha_i^2 \beta_i}{l^2} \sqrt{\frac{EI_z}{\mu}}, \quad (3)$$

где β_i — поправочный коэффициент к формуле (1), который зависит от α_i :

$$\beta_i = \sqrt{\frac{1 - d_i^2(1 + e) - \sqrt{(1 - d_i^2(1 + e))^2 - 4ed_i^4}}{2ed_i^4}};$$

$$e = \frac{Ek}{G}; \quad d_i = \alpha_i \lambda v;$$

$\lambda = \frac{h}{l}$ — относительная высота поперечного сечения;

$v = \frac{r}{h}$ — коэффициент формы поперечного сечения;

h — высота поперечного сечения, $h = h_1 + h_2$; r — радиус его инерции.

Множитель β_i изменяется в пределах от 1 до 2, независимо от формы поперечного сечения стержня. Характерный закон его изменения от относительной высоты поперечного сечения представлен на рисунке 2. Возможно некоторое незначительное смещение точек представленных линий при рассмотрении различных форм поперечных сечений, что связано с изменением значения параметра e . Далее при рассмотрении численного примера показано, как практически используются функции $\beta_i = f(\lambda)$.

Для определения влияния несовершенства заделки стержня на частоты его колебаний запишем функцию формы упругой линии стержня в виде

$$Y(x) = C_1 S(\lambda x) + C_2 T(\lambda x) + C_3 U(\lambda x) + C_4 V(\lambda x),$$

где C_1, C_2, C_3 и C_4 — постоянные интегрирования; балочные функции академика А.Н. Крылова [11]:

$$S(\lambda x) = 0,5(\operatorname{ch} \lambda x + \cos \lambda x);$$

$$T(\lambda x) = 0,5(\operatorname{sh} \lambda x + \sin \lambda x);$$

$$U(\lambda x) = 0,5(\operatorname{ch} \lambda x - \cos \lambda x);$$

$$V(\lambda x) = 0,5(\operatorname{sh} \lambda x - \sin \lambda x).$$

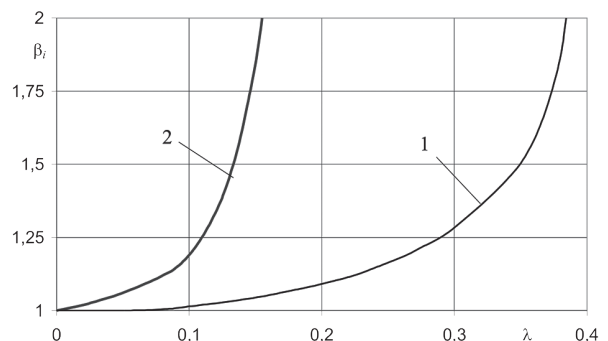


Рисунок 2 — Зависимость поправочного коэффициента β_i от относительной высоты поперечного сечения λ ; цифра возле линии соответствует значению i

При идеальном закреплении стержня смещение и угол поворота поперечного сечения стержня в месте выхода его из закремляющего устройства равны нулю. Располагая координатные оси, как показано на рисунке 3 а, для случая длинного стержня имеем граничные условия:

$$\text{при } x = 0 \quad y = 0, y' = 0; \text{ при } x = l \quad y'' = 0, y''' = 0,$$

которые приводят к уравнению

$$\operatorname{ch} \alpha \cdot \cos \alpha + 1 = 0 \quad (\alpha = \lambda l),$$

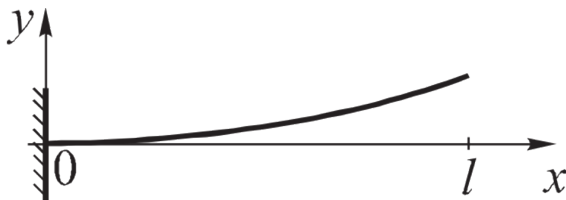
из которого определяются значения параметра α , соответствующие различным формам изгиба упругой линии стержня ($\alpha_1 = 1,875$, $\alpha_2 = 4,694$ и т. д.). Как уже отмечалось выше, они часто приводят к значительным погрешностям при использовании в формуле (1).

В некоторых случаях, например, при прикреплении массивного короткого стержня к основанию с помощью фланца и болтов, деформации стержня и реального узла его крепления соизмеримы. Для такого случая расчетная схема имеет вид, представленный на рисунке 3 б. Взаимодействие стержня с основанием осуществляется с помощью двух пружин с линейными свойствами, одна из которых работает в условиях растяжения–сжатия и имеет коэффициент жесткости c_y , а вторая, с коэффициентом жесткости c_ϕ , закручивается. Граничные условия для этого случая имеют вид:

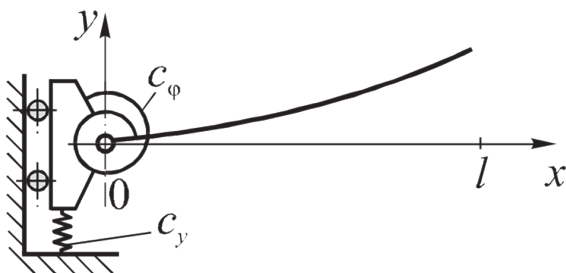
$$\begin{aligned} \text{при } x = 0 \quad EI_z y' &= c_\phi y', \quad EI_z y''' = -c_y y; \\ \text{при } x = l \quad y'' &= 0, \quad y''' = 0. \end{aligned}$$

Они приводят к уравнению для определения коэффициентов α_i :

$$\begin{aligned} \alpha^4 ab [-T(\alpha)V(\alpha) + U^2(\alpha)] - \alpha^3 b [S(\alpha)T(\alpha) - \\ - U(\alpha)V(\alpha)] + \alpha a [S(\alpha)V(\alpha) - T(\alpha)U(\alpha)] + \\ + S^2(\alpha) - T(\alpha)V(\alpha) = 0, \end{aligned}$$



а



б

Рисунок 3 — Расчетная схема стержня для идеального (а) и реального (б) закрепления

где

$$a = \frac{EI_z}{c_\phi} \quad \text{и} \quad b = \frac{EI_z}{c_y}.$$

Результат решения этого уравнения зависит от конкретного соотношения между жесткостью стержня при изгибе EI_z и коэффициентами c_ϕ , c_y , определяющими жесткость узла крепления. В ходе вычислений получено поле значений α в зависимости от параметров a и b . Замечено, что крутильная жесткость более сильно влияет на частоты колебаний, чем линейная. По этой причине на рисунке 4 представлены значения α_1 в функции от a , рассматриваемой в качестве независимой переменной, а величина b принималась как параметр.

Результаты расчета. В качестве примера рассмотрим колебания представленной в работе [2] стойки вентилятора, поперечное сечение которой состоит из двух швеллеров, к концу которой присоединен массивный вентиляторный узел. Стойка имеет длину $l = 0,664$ м и высоту сечения $h = 0,1$ м. Приведение конструкции к схеме с распределенной массой, соответствующей рисунку 3, дало значение $\mu = 83,79$ кг/м. Момент инерции поперечного сечения равен удвоенному значению момента инерции одного швеллера и составляет $I_z = 133,4 \cdot 10^{-8}$ м⁴. Соответствующее форме поперечного сечения значение коэффициента неравномерности касательных напряжений, рассчитанное по формулам, приведенным в [1], $k = 2,1$.

$$\text{Поскольку } \lambda = \frac{h}{l} = \frac{0,1}{0,664} = 0,15, \text{ то в соответствии с графиком, представленным на рисунке 2, получаем } \beta_1 = 1,05.$$

Для определения коэффициента крутильной жесткости c_ϕ рассмотрена схема деформирования узла крепления под действием постоянного момента M с учетом деформации болтов и фланца стойки (рисунок 5). С применением соотношений сопротивления материалов и деталей машин получено соответствующее приложенному моменту M значение угла поворота ϕ , что дало возможность нахождения коэффициента a :

$$c_\phi = \frac{M}{\phi}; \quad a = \frac{EI_z}{c_\phi} = 1,681 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

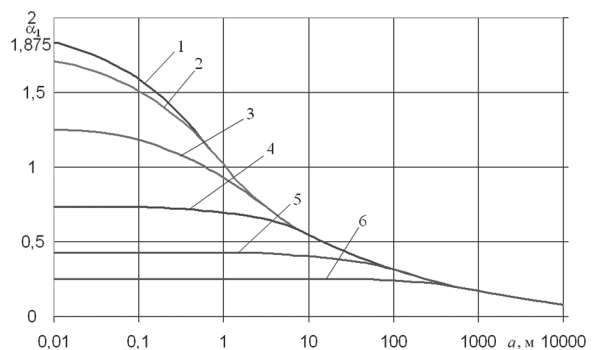


Рисунок 4 — Влияние параметров a и b на значения α_i :
1 — $b = 0$; 2 — $b = 10^{-7}$ м³; 3 — $b = 10^{-6}$ м³; 4 — $b = 10^{-5}$ м³;
5 — $b = 10^{-4}$ м³; 6 — $b = 10^{-3}$ м³

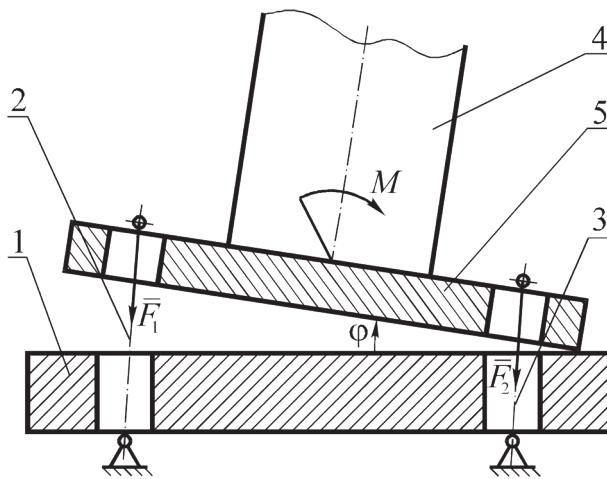


Рисунок 5 — Схема для определения коэффициента c_y :
1 — корпус машины; 2, 3 — оси болтов; 4 — стойка
вентилятора; 5 — фланец стойки

Для нахождения коэффициента жесткости c_y к верхней плоскости поверхности фланца была приложена горизонтальная поперечная сила с равнодействующей Q . Было принято, что поперечное перемещение точки 0 (см. рисунок 3 б) происходит в связи со сдвигом материала фланцев и определено его значение Δ . После этого были получены c_y и коэффициент b по формулам:

$$c_y = \frac{Q}{\Delta}; \quad b = \frac{EI_z}{c_y} = 1,16 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Далее с помощью графиков, представленных на рисунке 4, определено значение $\alpha_1 = 0,879$.

Подстановка полученных значений в формулу (3) дает

$$p_1 = \frac{0,879^2 \cdot 1,05}{0,664^2} \sqrt{\frac{2,06 \cdot 10^{11} \cdot 133,4 \cdot 10^{-8}}{83,79}} = 105,4 \text{ с}^{-1},$$

что незначительно отличается от полученного экспериментально значения 110 с^{-1} , в то время как расчет по формуле (1) приводит к частоте

$$p_1 = \frac{1,875^2}{0,664^2} \sqrt{\frac{2,06 \cdot 10^{11} \cdot 133,4 \cdot 10^{-8}}{83,79}} = 457 \text{ с}^{-1},$$

которую нельзя использовать на практике.

Заключение. Полученный результат показывает, что граничное условие, реализующее идеальное защемление конца балки, может привести к завышенному в несколько раз значению частоты собственных колебаний по сравнению с экспериментальными данными. Поэтому при разработке конечно-элементных моделей, предназначенных для расчета параметров колебаний конструкций, следует особое внимание уделять заданию граничных условий. Например, при наличии контактных взаимодействий между телами нельзя пользоваться стандартными идеальными связями типа шарнира и заделки.

Для определения коэффициентов, характеризующих жесткость соединений, можно рекомендо-

вать подход, примененный в представленной статье. С целью нахождения коэффициента крутильной жесткости надо в месте наложения связи приложить к телу момент пары сил и определить угол поворота закрепляемого сечения. Для расчета коэффициента продольной или поперечной жесткости следует в месте расположения связи в соответствующем направлении приложить силу и рассчитать вызываемое ей перемещение, связанное с деформацией связи. Нахождение указанных угловых и линейных перемещений может быть выполнено как аналитическим, так и численным методом, например, путем использования метода конечных элементов [12–14].

Благодарности. Часть работы, выполненная первым соавтором, осуществлена в рамках Государственной программы научных исследований «Механика, металлургия, диагностика в машиностроении», задание 1.40.

Второй автор выражает глубокую признательность за поддержку, оказанную Словацким агентством грантов VEGA по гранту № 1/0731/16 «Разработка современных численных и экспериментальных методов анализа механических систем».

Список литературы

1. Филиппов, А.П. Колебания деформируемых систем / А.П. Филиппов. — М.: Машиностроение, 1970. — 736 с.
2. Дубко, А.Н. Расчет частот собственных поперечных колебаний защемленного стержня при учете его относительной длины и податливости узла крепления / А.Н. Дубко, А.О. Шимановский // Динамика и надежность мобильных сельскохозяйственных машин: тез. докл. обл. семинара-совещ., 20–22 сент. 1983 г. — Гомель, 1983. — С. 79–90.
3. Лаврович, Н.И. Собственные частоты колебаний стержней / Н.И. Лаврович // Омский научный вестник. — 2000. — Вып. 13. — С. 106–108.
4. Korabathina, R. Linear free vibration analysis of tapered Timoshenko beams using coupled displacement field method / R. Korabathina, M.S. Koppanati // Journal of Mathematical Models in Engineering. — 2016. — Vol. 2, Iss. 1. — Pp. 27–33.
5. Majkut, L. Free and forced vibrations of Timoshenko beams described by single difference equation / L. Majkut // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. — 2009. — Vol. 47, No. 1. — Pp. 193–210.
6. Бидерман, В.Л. Прикладная теория механических колебаний / В.Л. Бидерман. — М.: Высш. шк., 1972. — 416 с.
7. Тимошенко, С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко; пер. Я.Г. Пановко с 3-го американ. изд., перераб. совместно с Д.Х. Янгом. — 2-е изд., стер. — М.: URSS: КомКнига, 2006. — 439 с.
8. Ананьев, И.В. Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем / И.В. Ананьев. — М.—Л.: ОГИЗ; Гос. изд-во техн.-теоретич. лит-ры, 1946. — 223 с.
9. Ziegler, F. Mechanics of Solids and Fluids, 2nd ed. / F. Ziegler. — New York: Springer-Verlag, 1998. — 845 p.
10. Дубко, А.Н. Обобщенное решение задачи об определении частот собственных поперечных колебаний однородных прямых стержней / А.Н. Дубко // Вестн. машиностроения. — 1983. — № 6. — С. 37–38.
11. Крылов, А.Н. Собрание трудов: Т. 2–10 / АН СССР. — М. — Л.: Изд-во АН СССР, 1936–1949. — Т. 10: Вибрация судов. — 1948. — 398 с.
12. Bocko, J. Application of finite element method for analysis of nanostructures / J. Bocko, P. Lengvarský // Acta Mechanica et Automatica. — 2017. — Vol. 11, No. 2. — Pp. 116–120.
13. Шимановский, А.О. Анализ точности и сходимости решения контактных задач с применением программного

комплекса ANSYS / А.О. Шимановский, О.А. Суханова // Актуальные вопросы машиноведения: сб. науч. тр. / Объедин. ин-т машиностроения НАН Беларуси; редкол.: С.Н. Поддубко [и др.]. — 2016. — Вып. 5. — С. 205–208.

14. Shimanovsky, A. Modeling of the pantograph-catenary wire contact interaction / A. Shimanovsky, V. Yakubovich, I. Kapliuk // Procedia Engineering. — 2016. — Vol. 134. — Pp. 284–290.

SHIMANOVSKY Alexander O., D. Sc. in Eng., Prof.
Head of the Department “Technical Physics and Theoretical Mechanics”
Belarusian State Transport University, Gomel, Republic of Belarus
E-mail: tm.belsut@gmail.com

BOCKO Jozef S., Ph. D. in Eng., Prof.
Head of Institute of Structural and Processing Engineering — Head of Department of Applied Mechanics and Mechanical Engineering
Technical University of Košice, Košice, Slovakia

Received 12 January 2018.

INFLUENCE OF THE FIXATION STIFFNESS ON THE VIBRATIONS OF SHORT SINGLE-BINDING BEAMS

The influence of the fixation stiffness on the vibrations eigenfrequencies of short single-binding beams is analyzed. The Timoshenko's equation is used to describe the beam motion. It is shown that boundary condition applied to the end of beam can lead to 4 times more values of the beam eigenfrequencies in comparison with the experimental or computational results obtained considering the deformation of the fixation place. The recommendations on the creation of finite element models for structural vibrations analysis are given.

Keywords: free vibrations, boundary conditions, Timoshenko's equation, eigenfrequencies, fixation stiffness

References

1. Filippov A.P. *Kolebanija deformiruemih sistem* [Vibrations of deformable systems]. Moscow, Mashinostroenie, 1970. 736 p.
2. Dubko A.N., Shimanovsky A.O. Raschet chastot sobstvennykh poperechnykh kolebanij zashhemlennogo sterzhnja pri uchete ego odnositel'noj dliny i podatlivosti uzla krepjenija [Calculation of the clamped rod transverse vibrations eigenfrequencies, taking into account its relative length and the mount deformability]. *Trudy oblastnogo seminar-soveshhanija "Dinamika i nadezhnost mobilnykh sel'skhozajstvennykh mashin"* [Proc. regional seminar-meeting "Dynamics and reliability of mobile agricultural machines"]. Gomel, 1983, pp. 79–90.
3. Lavrovich N.I. Sobstvennye chastoty kolebanij sterzhnej [Rods eigenfrequencies]. *Omskij nauchnyj vestnik* [Omsk Scientific Bulletin], 2000, no. 13, pp. 106–108.
4. Korabathina R. Linear free vibration analysis of tapered Timoshenko beams using coupled displacement field method. *Journal of Mathematical Models in Engineering*, 2016, vol. 2, no. 1, pp. 27–33.
5. Majkut L. Free and forced vibrations of Timoshenko beams described by single difference equation. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2009, vol. 47, no. 1, pp. 193–210.
6. Biderman V.L. *Prikladnaja teorija mehanicheskikh kolebanij* [Applied theory of mechanical oscillations]. Moscow, Vysshaja shkola, 1972. 416 p.
7. Timoshenko S.P. *Vibration problems in engineering*. New York, Van Nostrand, 1955. 468 p.
8. Anan'ev I.V. *Spravochnik po raschetu sobstvennykh kolebanij uprugih sistem* [Handbook on the calculation of elastic systems natural oscillations]. Moscow–Leningrad, Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1946. 223 p.
9. Ziegler F. *Mechanics of Solids and Fluids*. New York, Springer-Verlag, 1998. 845 p.
10. Dubko A.N. Obobshchennoe reshenie zadachi ob opredelenii chastot sobstvennykh poperechnykh kolebanij odnorodnykh prjamykh sterzhnej [Generalized solution of the transverse oscillations eigenfrequencies determining problem for the straight homogeneous rods]. *Vestnik mashinostroenija* [Bulletin of Machine Building], 1983, no. 6, pp. 37–38.
11. Krylov A.N. *Sobranie trudov*, t. 10: Vibracija sudov [Collection of works, vol. 10: Vibration of ships]. Moscow–Leningrad, Izdatel'stvo AN SSSR, 1948. 398 p.
12. Bocko J., Lengvarský P. Application of finite element method for analysis of nanostructures. *Acta Mechanica et Automatica*, 2017, vol. 11, no. 2, pp. 116–120.
13. Shimanovsky A.O., Sukhanova O.A. Analiz tochnosti i shodimosti reshenija kontaktnykh zadach s primeneniem programmnogo kompleksa ANSYS [Analysis of the accuracy and convergence of the contact problems' solutions with the use of ANSYS Software]. *Trudy OIM NAN Belarusi "Aktualnye voprosy mashinovedenija"* [Proc. of the Joint Institute of Mechanical Engineering of the NAS of Belarus "Topical Issues of Mechanical Engineering"], 2016, no. 5, pp. 205–208.
14. Shimanovsky A., Yakubovich V., Kapliuk I. Modeling of the pantograph-catenary wire contact interaction. *Procedia Engineering*, 2016, vol. 134, pp. 284–290.

Acknowledgments. *The Work carried out by the first co-author was performed according to the State Program of Scientific Research «Mechanics, Metallurgy, Diagnostics in Mechanical Engineering» (task 1.40).*

The second author gratefully acknowledges the support given by the Slovak Grant Agency VEGA under the grant no. 1/0731/16 Development of Modern Numerical and Experimental Methods of Mechanical System Analysis.