

УДК 539.3

Э.И. СТАРОВОЙТОВ, д-р физ.-мат. наук, проф.
заведующий кафедрой «Строительная механика»¹
E-mail: edstar0@yandex.by

Д.В. ЛЕОНЕНКО, д-р физ.-мат. наук, доц.
профессор кафедры «Строительная механика»¹
E-mail: leoden@tut.by

¹Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 23.01.2018.

ТЕРМОУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ ПОВЕРХНОСТНЫМИ НАГРУЗКАМИ РАЗЛИЧНЫХ ФОРМ

Приведена постановка краевой задачи об осесимметричном деформировании упругой круговой несимметричной по толщине трехслойной пластины, находящейся под действием равномерно распределенной и параболической нагрузок. Учтено влияние температурного поля на НДС пластины. Для описания кинематики пакета приняты гипотезы ломаной нормали: в тонких несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа; в несжимаемом по толщине жестком заполнителе выполняется гипотеза Тимошенко. Учтена работа заполнителя в тангенциальном направлении. Уравнения равновесия выведены вариационным методом. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы для предотвращения относительного сдвига слоев. На граничащих поверхностях слоев предполагается наличие склейки. Получено аналитическое решение краевой задачи в общем случае нагружения осесимметричной поверхностной нагрузкой. Рассмотрены случаи равномерно распределенной и параболической нагрузок. Проведен численный анализ решений.

Ключевые слова: трехслойная круговая пластина, параболическая нагрузка, температура, аналитическое решение, численный анализ

Введение. Современные тенденции в строительстве и машиностроении диктуют все новые требования к конструкциям и изделиям, что обуславливает применение композитных, в том числе трехслойных стержней, пластин и оболочек. В связи с этим возникает необходимость создания адекватных математических моделей для описания деформирования трехслойных элементов конструкций в комплексных термосиловых полях.

В монографиях [1–3] содержатся различные математические модели статического и динамического деформирования многослойных и трехслойных элементов конструкций, приведены постановки краевых задач, изложены методы их расчета. В статьях [4–9] исследованы свободные и вынужденные колебания трехслойных стержней и пластин, связанных и не связанных с упругим основанием. Рассмотрены резонансные режимы колебаний, различные виды внешних воздействий — локальные, импульсные и резонансные нагрузки, причем в круговых пластинах заполнитель принимался легким, т. е. не учитывалась его работа в тангенциальном направлении. Флаттер и ударное нагружение слоистых пластин описаны в статьях [10, 11]. Работы [12–15] посвящены нестационарным воздействиям на неоднородные элементы конструкций, рассмотрены контактные

задачи с подвижными границами, распространение волн в упругих слоях. Изучение квазистатического деформирования многослойных упругих и упругопластических балок и пластин с жестким соединением между слоями при непрерывных и локальных изотермических нагрузках проведено в статьях [16–18]. Термосиловому квазистатическому воздействию на трехслойные стержни посвящены статьи [19, 20].

Здесь приведена постановка и получено аналитическое решение краевой задачи о деформировании трехслойной круговой пластины с жестким заполнителем, отличающейся учетом температуры и локальностью распределенных нагрузок. Численная апробация решения проведена для металлполимерного пакета пластины.

Постановка краевой задачи. Рассматривается несимметричная по толщине трехслойная круговая пластина (рисунок 1). Постановка задачи и ее решение проводится в цилиндрической системе координат r, φ, z . Срединная плоскость заполнителя принимается за координатную, ось z направлена ей перпендикулярно вверх, к первому слою. Для тонких внешних несущих слоев толщиной $h_1 \neq h_2$ принимаются гипотезы Кирхгофа, для толстого жесткого заполнителя ($h_3 = 2c$), воспринимающего нагрузку в тангенциальном направле-

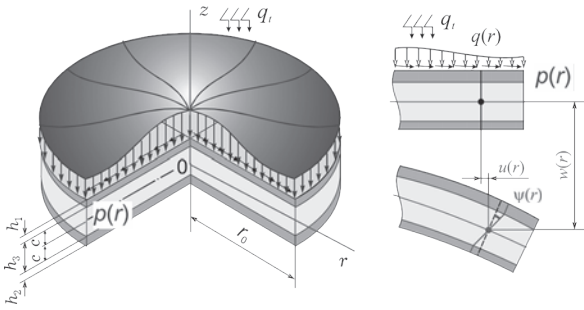


Рисунок 1 — Схема нагружения трехслойной пластины

нии, справедлива гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. Считаем, что к наружной поверхности первого несущего слоя приложены произвольные распределенные нагрузки $q(r)$, $p(r)$ и подводится тепловой поток q_r . Поверхность $z = -c - h_2$ и контур пластины считаются теплоизолированными. Это позволяет неоднородное температурное поле $T(z)$, отсчитываемое от некоторой начальной температуры T_0 , вычислять с достаточной точностью по формуле, приведенной в [3]. В дальнейшем считаем температуру в слоях пластины известной.

В силу симметрии нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют: $u_\varphi^{(k)} = 0$ (k — номер слоя), а прогиб пластины w , относительный сдвиг в наполнителе ψ и радиальное перемещение координатной поверхности u не зависят от координаты φ , то есть $w = w(r)$, $u = u(r)$, $\psi = \psi(r)$. В дальнейшем эти функции считаем искомыми. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев ($\psi = 0$ при $r = 1$). Все перемещения и линейные размеры пластины отнесены к ее радиусу r_0 .

Исходя из гипотезы прямолинейности нормали наполнителя

$$2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_r^{(3)} + w_{,r} = \psi,$$

после интегрирования получим выражения для радиальных перемещений в слоях $u_r^{(k)}$ через искомые функции:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r}; & c \leq z \leq c + h_1; \\ u_r^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,r}; & -c \leq z \leq c; \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r}; & -c - h_2 \leq z \leq -c; \end{aligned} \quad (1)$$

где z — координата рассматриваемого волокна; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Деформации в слоях следуют из (1) и соотношений Коши. Уравнения равновесия трехслойной пластины получены с помощью принципа возможных перемещений Лагранжа:

$$\delta A = \delta W,$$

где δA , δW — вариации работ внешних сил и внутренних напряжений.

При определении работы внешних сил считаем, что к срединной поверхности наполнителя приложены произвольные осесимметричные распределенные нагрузки, на контуре пластины могут быть заданы погонные силы и моменты T_r^0 , H_r^0 , M_r^0 , Q^0 . Вариация работы внешней поверхностной и контурной нагрузок $\delta A = \delta A_1 + \delta A_2$ представимы в виде:

$$\delta A_1 = \iint_S (q\delta w + p\delta u) r dr d\varphi;$$

$$\delta A_2 = \int_0^{2\pi} (T_r^0 \delta u + H_r^0 \delta \psi + M_r^0 \delta w_{,r} + Q^0 \delta w) d\varphi,$$

где двойной интеграл распространен по срединной поверхности наполнителя S .

Вариация работы сил упругости

$$\begin{aligned} \delta W = \iint_S \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_r^{(k)} \delta \varepsilon_r^{(k)} + \sigma_\varphi^{(k)} \delta \varepsilon_\varphi^{(k)}) dz + \right. \\ \left. + \int_{-c}^c \sigma_{rz}^{(3)} \delta \psi dz \right] r dr d\varphi. \end{aligned}$$

Вариации перемещений в слоях следуют из соотношений (1), вариации деформаций — из соотношений Коши. При выводе уравнений равновесия в перемещениях использованы термоупругие соотношения закона Гука в девиаторно-шаровой форме:

$$\begin{aligned} s_\alpha^{(k)} &= 2G_k(T_k) \varepsilon_\alpha^{(k)}; \\ \sigma^{(k)} &= 3K_k(T_k) (\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k} T_k) \quad (k = 1, 2, 3); \\ s_{rz}^{(3)} &= 2G_k(T_k) \varepsilon_{rz}^{(3)} \quad (\alpha = r, \varphi), \end{aligned} \quad (2)$$

где $s_\alpha^{(k)}$, $\varepsilon_\alpha^{(k)}$ — девиаторные, $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ — шаровые части тензоров напряжений и деформаций; $G_k(T_k)$, $K_k(T_k)$ — температурно-зависимые модули сдвига и объемного деформирования; T_k — известная температура; α_{0k} — коэффициент линейного температурного расширения материала k -го слоя.

Выполнив необходимые преобразования, используя соотношения (2), получим уравнения равновесия в перемещениях. Температура явным образом в них не входит, поэтому они формально не будут отличаться от полученных ранее для трехслойной пластины при изотермическом нагружении [3]:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= -p; \\ L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) - 2c G_3 \psi &= 0; \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) &= -q, \end{aligned} \quad (3)$$

где L_2 , L_3 — дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} L_2(g) &\equiv \left(\frac{1}{r} (rg)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}; \\ L_3(g) &\equiv \frac{1}{r} (rL_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}. \end{aligned}$$

Отличие здесь в коэффициентах a_i , которые имеют интегральный вид, т. к. модули упругости материалов изменяются в слоях по толщине вместе с температурой:

$$a_1 = \sum_{k=1}^3 K_{k0}; \quad a_2 = c(K_{10} - K_{20}); \quad a_3 = \sum_{k=1}^3 K_{k1};$$

$$a_4 = K_{32} + c^2(K_{10} + K_{20});$$

$$a_5 = K_{32} + c(K_{11} + K_{21}); \quad a_6 = \sum_{k=1}^3 K_{k2};$$

$$K_{km} = \int_{h_k} \left[K_k(T_k) + \frac{4}{3} G_k(T_k) \right] z^m dz, \quad (m = 0, 1, 2).$$

Если температурное поле усреднено по толщине k -го слоя пластины, то значения упругих параметров постоянны внутри слоя:

$$G_k(T_k) \equiv G_k(T_{0k}); \quad K_k(T_k) \equiv K_k(T_{0k});$$

$$T_{0k}(t) = \frac{1}{h_k} \int_{h_k} T_k(z, t) dz.$$

Краевая задача определения функций $u(r)$, $\psi(r)$, $w(r)$ замыкается присоединением к системе уравнений (3) силовых (7) и / или кинематических граничных условий:

- при заделке контура пластины:

$$u = \psi = w = w_{,r} = 0 \text{ при } r = 1;$$

- при шарнирном опирании пластины:

$$u = \psi = w = M_r = 0 \text{ при } r = 1. \quad (4)$$

Следует отметить, что температура в явном виде в уравнения равновесия (3) не входит, как и у трехслойного стержня с несжимаемым заполнителем [20].

Общее решение краевой задачи. Используя полученное первое и третье уравнения из системы (3), можно исключить из второго уравнения этой же системы радиальное перемещение $u(r)$ и прогиб $w(r)$. В результате, проведя необходимые преобразования, получим следующее решение рассматриваемой задачи:

$$\begin{aligned} \psi &= C_2 I_1(\beta r) + C_3 K_1(\beta r) + \psi_r; \\ w &= \frac{b_2}{b_3} \int \psi dr - \frac{a_3}{b_3 a_1} \int L_2^{-1}(p) dr + \frac{1}{b_3} \int L_3^{-1}(q) dr + \\ &+ \frac{1}{4} C_1 r^2 (\ln r - 1) + \frac{C_3 r^2}{4 b_3} + C_6 \ln r + C_4; \\ u &= \frac{a_3}{a_1} w_{,r} - \frac{a_2}{a_1} \psi - \frac{1}{a_1} L_2^{-1}(p) + \frac{C_7 r}{2} + \frac{C_8}{r}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $I_1(\beta r)$ — модифицированная функция Бесселя первого порядка, $K_1(\beta r)$ — функция Макдональда; L_2^{-1} , L_3^{-1} — интегральные операторы, обратные дифференциальным операторам (3);

$$L_2^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r} \int r \int f dr dr; \quad L_3^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r} \int r \int r \int f dr dr dr;$$

$$\psi_{,r} = -K_1(\beta r) \int I_1(\beta r) f(r) r dr + I_1(\beta r) \int K_1(\beta r) f(r) r dr;$$

$$\beta^2 = \frac{2cb_3 G_3}{b_1 b_3 - b_2^2}; \quad b_1 = \frac{a_1 a_4 - a_2^2}{a_1};$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1}; \quad b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_3^2}{a_1};$$

$$f(r) = \frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\frac{p(a_2 b_3 - a_3 b_2)}{a_1 b_3} + \frac{b_2}{b_3 r} \left(\int q r dr - C_1 \right) \right].$$

Все интегралы, встречающиеся в решении (5) и далее, являются определенными с переменным верхним пределом, т. е.

$$\int f(x) dx \equiv \int_0^r f(z) dz.$$

Исходя из условия гладкости решения в центре пластины ($r = 0$), для сплошных пластин необходимо в (5) положить константы интегрирования $C_1 = C_3 = C_6 = C_8 = 0$. Если контур пластинки заделан, то, удовлетворяя первому из условий (4), получим следующие константы интегрирования:

$$\begin{aligned} C_2 &= - \left. \frac{\psi_r}{I_1(\beta)} \right|_{r=1}; \\ C_4 &= -b_2 \left(\frac{C_2}{\beta} I_0(\beta) + \int \psi_r dr \Big|_{r=1} \right) + \int \left(\frac{a_3}{a_1} L_2^{-1}(p) - L_3^{-1}(q) \right) dr \Big|_{r=1} - \frac{C_5}{4}; \\ C_5 &= 2 \left(\frac{a_3}{a_1} L_2^{-1}(p) - L_3^{-1}(q) \right) \Big|_{r=1}; \\ C_7 &= \left(\frac{a_6}{a_3} L_2^{-1}(p) - L_3^{-1}(q) \right) \Big|_{r=1}. \end{aligned} \quad (6)$$

В этом случае решение (5) не зависит явно от температуры. Она будет влиять только на значения модулей упругости материалов.

Равномерно распределенная поверхностная нагрузка ($p = 0$, $q = \text{const}$). В этом случае подынтегральная функция и частное решение в формулах (5) будут равны:

$$f(r) = \frac{b_2 q}{2(b_1 b_3 - b_2^2)} r; \quad \psi_r(r) = - \frac{b_2 q}{4cb_3 G_3} r.$$

При шарнирно опертом контуре константы интегрирования следуют из второго условия (4):

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{b_2 q}{4cb_3 G_3 I_1(\beta)}; \\ C_4 &= - \frac{b_2^2 q}{4cb_3 G_3} \left(\frac{I_0(\beta)}{\beta I_1(\beta)} - \frac{1}{2} \right) - \frac{q}{64} - \frac{C_5}{4}; \\ C_5 &= \frac{2b_3}{a_6 + a_7} \left[a_3 u_{,r}(1) + \psi_{,r}(1) \left(a_5 - \frac{a_6 b_2}{b_3} \right) - \right. \\ &\left. \frac{q}{16b_3} (3a_6 + a_7) - 3 \sum_{k=1}^3 \alpha_{0k} \int_{h_k} K_k T_k z dz \right]; \quad C_7 = - \frac{q}{16}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \psi_{,r}(1) &= \frac{b_2 q}{4cb_3 G_3} \left(\frac{\beta I_0(\beta)}{I_1(\beta)} - 2 \right); \\ u_{,r}(1) &= \frac{a_3}{a_1 a_6 - a_3^2} \left[\left(a_5 - \frac{a_2 a_6}{a_3} \right) \psi_{,r}(1) + \frac{q}{8} \right]; \\ a_7 &= h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^- + h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) K_2^- + \frac{2}{3} c^3 K_3^-. \end{aligned}$$

Следует отметить, что в этом случае решение будет явно зависеть от температуры через константу C_5 .

Численные результаты приведены для круговой трехслойной несимметричной по толщине пластины, слои которой набраны из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т, соответствующие механические характеристики материалов приведены в [21]. Величина интенсивности нагрузки $q_0 = 1$ МПа, относительные толщины слоев $h_1 = 0,02$; $h_2 = 0,06$; $h_3 = 0,4$.

Нагрузка равномерно распределена по всей внешней поверхности первого слоя. На рисунке 2 а, б показано изменение сдвига в заполнителе и прогиба защемленной по контуру пластины вдоль ее радиуса при различных температурах: 1 – $T_1 = 293$ К, 2 – $T_2 = 323$ К, 3 – $T_3 = 373$ К. Повышение температуры на 30° от комнатной приводит к увеличению модулей максимальных перемещений примерно на 30 %. При увеличении температуры на 80° рост наблюдается порядка 70 %.

Соответствующее распределение нормальных напряжений σ_r при различных температурах в пластине с жестко заделанным контуром показано на рисунке 3: а – в центре, б – на контуре пластины (нумерация кривых предыдущая). При нагревании напряжения в центре пластины смещаются в отрицательную область параллельно самим себе, увеличиваясь по модулю в разы. На контуре они изменяются в гораздо меньшей степени. Максимум напряжения в обоих случаях достигают на внешней поверхности второго слоя.

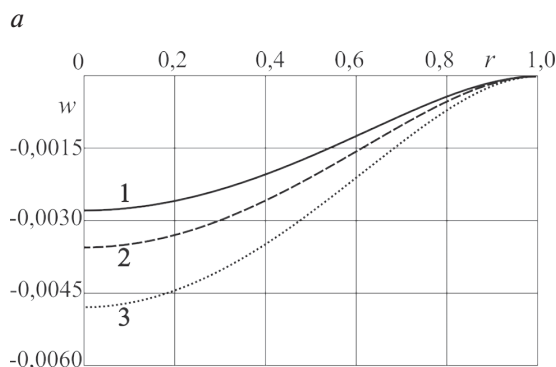
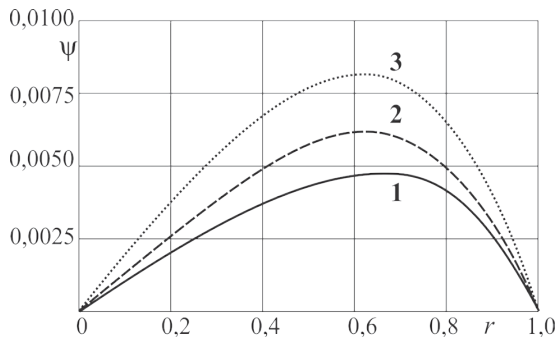


Рисунок 2 — Зависимость сдвига и прогиба пластины от температуры

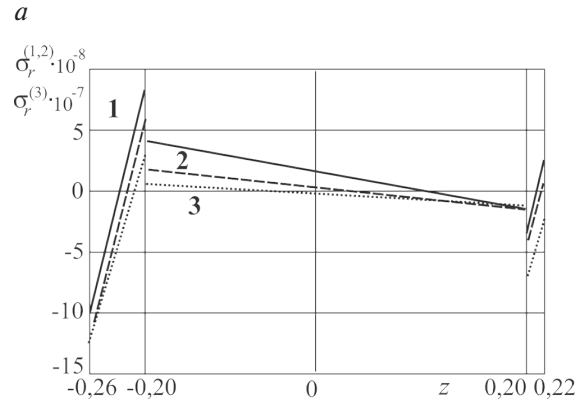
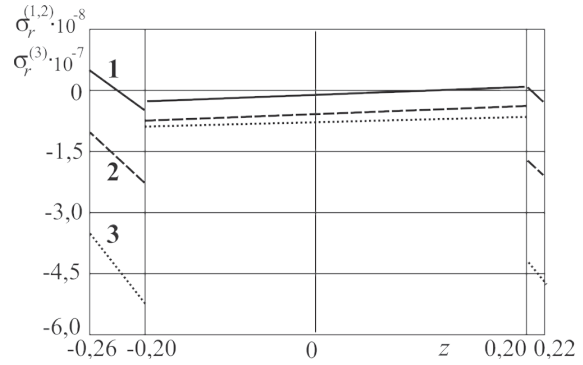


Рисунок 3 — Зависимость напряжений от температуры по толщине в центре (а) и на контуре пластины (б)

Нагрузка равномерно распределена по кругу $[0, a]$. Тогда ее можно записать в виде

$$q(r) = q_0 H_0(b-r), \quad p = 0, \quad (7)$$

где $H_0(r)$ — функция Хевисайда.

Для преобразования решения (5) на случай нагрузки (7) необходимо предварительно провести интегральные операции с использованием функции Хевисайда. В результате

$$L_3^{-1}(H_0(b-r)) = \left(\frac{r^3}{16} - \frac{b^4}{16r} - \frac{b^2 r}{4} \ln\left(\frac{r}{b}\right) \right) H_0(b-r);$$

$$f(r) = \frac{\gamma_1}{r} \left(\frac{q_0(r^2 - b^2)}{2} H_0(b-r) - C_1 \right); \quad (8)$$

$$\gamma_1 = \frac{b_2}{(b_1 b_3 - b_2^2)}; \quad \psi_r = \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} H_0(b-r) \left[\frac{b^2}{r} - r + \right.$$

$$\left. + 2b(K_1(\beta b)I_1(\beta r) - I_1(\beta b)K_1(\beta r)) \right] + \frac{C_1 \gamma_1}{\beta^2 r}.$$

Подставляя (8) в решение (5), получим следующие искомые перемещения в трехслойной круговой пластине при локальной круговой нагрузке:

$$\psi = C_2 I_1(\beta r) + C_3 K_1(\beta r) + \psi_r;$$

$$w = \frac{b_2}{b_3} \int \psi dr + \frac{1}{b_3} \int L_3^{-1}(q) dr - \frac{C_1}{4b_3} r^2 (\ln r - 1) + \quad (9)$$

$$+ \frac{C_5 r^2}{4b_3} + C_6 \ln r + C_4; \quad u = \frac{a_3}{a_1} w_r - \frac{a_2}{a_1} \psi + \frac{C_7 r}{2} + \frac{C_8}{r},$$

где

$$\int L_3^{-1}(q)dr = q_0 \left(\frac{r^4 - 5b^4}{64} - \frac{b^4}{16} \ln\left(\frac{r}{b}\right) - \frac{b^2 r^2}{8} \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{b^2 r^2}{16} \right) H_0(b-r);$$

$$\int \Psi dr = \frac{C_2 I_0(\beta r)}{\beta} - \frac{C_3 K_0(\beta r)}{\beta} + \frac{C_1 \gamma_1}{\beta^2} \ln(r) + \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} H_0(b-r) \times \left[\frac{b^2 - r^2}{2} + b^2 \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{2b}{\beta} (K_1(\beta b) I_0(\beta r) + I_1(\beta b) K_0(\beta r)) - \frac{2}{\beta^2} \right].$$

Из условий ограниченности решения в центре пластины следует:

$$C_1 = -\frac{q_0 b^2}{2}; \quad C_3 = \frac{q_0 \gamma_1 b I_1(\beta b)}{\beta^2};$$

$$C_6 = \frac{q_0 b^4}{16 b_3}; \quad C_8 = 0.$$

При шарнирном опирании контура из второго условия (4) получим:

$$C_2 = \frac{\gamma_1 q_0}{\beta^2 I_1(\beta)} \left(\frac{b^2}{2} - b K_1(\beta) I_1(\beta b) \right);$$

$$C_4 = \frac{b_2}{b_3} \left(-\frac{C_2 I_0(\beta)}{\beta} + \frac{C_3 K_0(\beta)}{\beta} \right) - \frac{1}{4b_3} (C_1 + C_5);$$

$$C_5 = \frac{q_0 b^2}{4} \left(1 - \frac{b^2}{2} \right) \frac{a_3^2 - a_1 b_3 + a_7 a_1}{a_1 (a_6 + a_7)} - \frac{6b_3}{a_6 + a_7} \sum_{k=1}^3 \alpha_{0k} \int_{h_k} K_k T_k z dz;$$

$$C_7 = \frac{2a_3}{a_1 (a_6 + a_7)} \left(3 \sum_{k=1}^3 \alpha_{0k} \int_{h_k} K_k T_k z dz + \frac{q_0 b^2}{4} \left(1 - \frac{b^2}{2} \right) \right).$$

Параболическая нагрузка, распределенная по кругу [0, a]. Пусть на рассматриваемую круговую трехслойную пластину действует локальная вертикальная поверхностная нагрузка параболической формы (рисунок 4). Для нее можно принять аналитический вид:

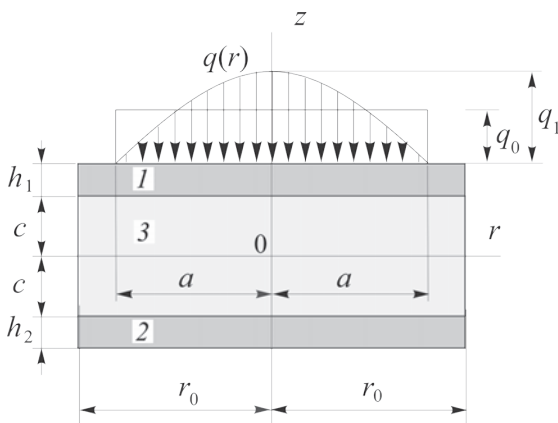


Рисунок 4 — Расчетная схема нагружения пластины параболической нагрузкой

$$q(r) = q_0 H_0(a-r) \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right). \quad (10)$$

Интегральный оператор от нагрузки (10), функция $f(r)$ и интегралы от нее, входящие в решение (5), а также частное решение будут следующими:

$$L_3^{-1}(q)dr = q_0 H_0(a-r) \left(\frac{3r^4 - a^4}{48r} - \frac{r^5}{96a^2} - \frac{a^2 r}{8} \ln\left(\frac{r}{a}\right) - \frac{a^2 r^2}{32} \right);$$

$$f(r) = \frac{\gamma_1}{r} \left(\frac{q_0}{4} \left(2r^2 - a^2 - \frac{r^4}{a^2} \right) H_0(a-r) - C_1 \right);$$

$$\int I_1(\beta r) f(r) r dr = \frac{\gamma_1 q_0}{4\beta^2} H_0(a-r) \times \left[I_0(\beta r) \left(2r^2 \beta - \frac{r^4 \beta}{a^2} - \frac{8r^2}{a^2 \beta} \right) + \frac{8I_0(\beta a)}{\beta} - \frac{16I_1(\beta a)}{\beta^2 a} - 4I_1(\beta r) \left(r - \frac{r^3}{a^2} - \frac{4}{a^2 \beta^2} \right) \right] - \frac{C_1 \gamma_1}{\beta} I_0(\beta r);$$

$$\int K_1(\beta r) f(r) r dr = \frac{\gamma_1 q_0}{4\beta^2} H_0(a-r) \times \left[-K_0(\beta r) \left(2r^2 \beta - \frac{r^4 \beta}{a^2} - \frac{8r^2}{a^2 \beta} \right) - \frac{8K_0(\beta a)}{\beta} - \frac{16K_1(\beta a)}{\beta^2 a} - 4K_1(\beta r) \left(r - \frac{r^3}{a^2} - \frac{4}{a^2 \beta^2} \right) \right] - \frac{C_1 \gamma_1}{\beta} I_0(\beta r);$$

$$\Psi_r = \frac{\gamma_1 q_0}{4\beta^4 a^2} H_0(a-r) \left[\beta^2 r^3 + \frac{\beta^2 a^4}{r} + r(8 - 2\beta^2 a^2) - 8\beta a^2 (K_1(\beta r) I_0(\beta a) + I_1(\beta r) K_0(\beta a)) + 16a (K_1(\beta r) I_1(\beta a) - I_1(\beta r) K_1(\beta a)) \right] + \frac{C_1 \gamma_1}{\beta^2 r}.$$

Общий вид решения (5) формально остается в данном случае без изменения, если учесть выражение (11) и следующие интегралы:

$$\int L_3^{-1}(q(r)) = H_0(a-r) \left(\frac{r^4}{64} - \frac{r^6}{576a^2} + \frac{a^2 r^2}{64} - \frac{a^2 r^2}{16} \ln\left(\frac{r}{a}\right) - \frac{a^4}{48} \ln\left(\frac{r}{a}\right) - \frac{17a^4}{576} \right);$$

$$\int \Psi dr = \frac{C_2 I_0(\beta r)}{\beta} - \frac{C_3 K_0(\beta r)}{\beta} + \frac{C_1 \gamma_1}{\beta^2} \ln(r) + \frac{\gamma_1 q_0}{4\beta^4 a^2} H_0(a-r) \times \left[\beta^2 a^4 \ln\left(\frac{r}{a}\right) - \frac{16a}{\beta} \times (K_1(\beta a) I_0(\beta r) + I_1(\beta a) K_0(\beta r)) + \frac{16}{\beta^2} + 4(r^2 - a^2) + \frac{\beta^2 r^4}{4} + \frac{3\beta^2 a^4}{4} - \beta^2 a^2 r^2 - 8a^2 (K_0(\beta a) I_0(\beta r) - I_0(\beta a) K_0(\beta r)) \right].$$

При шарнирно опертом контуре константы интегрирования будут:

$$C_1 = -\frac{q_0 a^2}{4};$$

$$C_2 = \frac{2\gamma_1 q_0}{\beta^3 I_1(\beta)} \left(\frac{\beta a^2}{8} - K_1(\beta) \left(I_0(\beta a) - \frac{2}{\beta a} I_1(\beta a) \right) \right);$$

$$C_3 = \frac{2q_0 \gamma_1}{\beta^3} \left(I_0(\beta a) - \frac{2}{\beta a} I_1(\beta a) \right);$$

$$C_4 = \frac{b_2}{b_3} \left(-\frac{C_2 I_0(\beta)}{\beta} + \frac{C_3 K_0(\beta)}{\beta} \right) - \frac{1}{4b_3} (C_1 + C_5);$$

$$C_5 = \frac{q_0 a^2}{8} \left(1 - \frac{a^2}{3} \right) \frac{a_3^2 - a_1 b_3 + a_7 a_1}{a_1 (a_6 + a_7)} -$$

$$-\frac{6b_3}{a_6 + a_7} \sum_{k=1}^3 \alpha_{0k} \int_{h_k} K_k T_k z dz; \quad C_6 = \frac{q_0 a^4}{48b_3};$$

$$C_7 = \frac{2a_3}{a_1 (a_6 + a_7)} \left(3 \sum_{k=1}^3 \alpha_{0k} \int_{h_k} K_k T_k z dz + \frac{q_0 a^2}{8} \left(1 - \frac{a^2}{3} \right) \right).$$

Численные результаты. На рисунке 5 показана зависимость прогиба шарнирно опертой круговой трехслойной пластины в центре от радиуса силового пятна при различных по форме и величине нагрузок. Параболическая нагрузка с амплитудой q_1 статически эквивалентна прямоугольной q_0 , т. к.

$$q_1 \int_A \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right) H_0(a-r) r dr d\varphi =$$

$$= q_0 \int_A H_0(a-r) r dr d\varphi,$$

отсюда $q_1 = 2q_0$.

При одинаковой амплитуде (1, 2) прямоугольная нагрузка вызывает больший по величине прогиб. В случае статически эквивалентных нагрузок (2, 3) прогиб от параболической больше на 47 %, при нагревании разница уменьшается до 40 %. С ростом радиуса пятна нагрузки прогиб увеличивается нелинейно, достигая максимума при нагрузке, распределенной по всей поверхности пластины. Следует отметить, при отсутствии на-

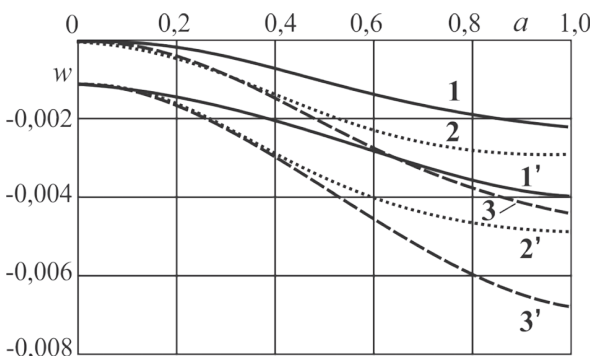


Рисунок 5 — Зависимость прогиба шарнирно опертой круговой трехслойной пластины в центре от радиуса силового пятна при различных по форме и величине нагрузок:
 1 — параболическая амплитуды q_0 ; 2 — прямоугольная q_0 ;
 3 — параболической амплитуды $q_1 = 2q_0$ (см. рисунок 4); без штриха — при комнатной температуре; со штрихом — $T = 323$ К

грузки ($a = 0$) нагревание вызывает прогиб пластины в силу зависимости решений от температуры.

Выводы. Предложенная постановка краевой задачи о деформировании трехслойных круговых пластин равномерно распределенными и параболическими нагрузками и полученные решения соответствующих краевых задач позволяют исследовать их напряженно-деформированное состояние в температурном поле при непрерывных и локально распределенных нагрузках. Численные расчеты показали существенное влияние температуры и формы нагрузки на НДС в пластине.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

Список обозначений

- $q(x), p(x)$ — внешняя распределенная нагрузка, Па;
- q_0, p_0 — интенсивности распределенной нагрузки, Па;
- $w(x)$ — прогиб пластины, м;
- $\psi(x)$ — относительный сдвиг в заполнителе, рад;
- $u(x)$ — продольное перемещение срединной плоскости заполнителя, м;
- G_k, K_k — модули сдвига и объемной деформации, Па;
- h_k — толщины слоев, м;
- $s_{ij}^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}$ — девиаторы напряжений и деформаций, Па, б. р.;
- $\sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$ — шаровые тензоры напряжений и деформаций, Па, б. р.;
- $H_0(r)$ — функция Хевисайда;
- T — температура, К;
- $I_1(r)$ — модифицированная функция Бесселя первого порядка;
- $K_1(r)$ — функция Макдональда.

Список литературы

1. Болотин, В.В. Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. — М.: Машиностроение, 1980. — 375 с.
2. Головкин, К.Г. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / К.Г. Головкин, П.З. Луговой, В.Ф. Мейш. — Киев: Киевский ун-т, 2012. — 541 с.
3. Плескачевский, Ю.М. Деформирование металлополимерных систем / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. — Минск: Бел. наука. 2004. — 342 с.
4. Горшков, А.Г. Колебания трехслойных стержней под действием локальных нагрузок различных форм / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. — 2004. — № 1. — С. 45–52.
5. Плескачевский, Ю.М. Динамика круговых металлополимерных пластин на упругом основании. Ч. 1: Свободные колебания / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. — 2008. — № 4 (4). — С. 48–52.
6. Плескачевский, Ю.М. Динамика круговых металлополимерных пластин на упругом основании. Часть II. Вынужденные колебания / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. — 2009. — № 1(5). — С. 48–51
7. Starovoitov, E.I. Resonant effects of local loads on circular sandwich plates on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International applied mechanics. — 2010. — Vol. 46, no. 1. — Pp. 86–93.
8. Starovoitov, É.I. Vibration of a sandwich rod under local and impulsive forces / É.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarov

- vaya // International Applied Mechanics. — 2005. — Vol. 41, no. 7. — Pp. 809–816.
9. Старовойтов, Э.И. Колебания трехслойных цилиндрических оболочек в упругой среде Винклера при резонансе / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Ю.М. Плескачевский // Механика машин, механизмов и материалов. — 2013. — № 4(22). — С. 70–73.
 10. The oblique impact response of composite sandwich plates / I. Ivañez [et al.] // Composite Structures. — 2015. — No. 133. — Pp. 1127–1136.
 11. Grover, N. An Inverse Trigonometric Shear Deformation Theory for Supersonic Flutter Characteristics of Multilayered Composite Plates / N. Grover, B.N. Singh, D.K. Maiti // Aerospace Science and Technology. — 2016. — 52. — Pp. 41–51.
 12. Tarlakovskiy, D.V. Analytic investigation of features of stresses in plane nonstationary contact problems with moving boundaries / D.V. Tarlakovskiy, G.V. Fedotenkov // Journal of Mathematical Sciences. — 2009. — Vol. 162, no. 2. — Pp. 246–253.
 13. Kuznetsova, E.L. Propagation of unsteady waves in an elastic layer / E.L. Kuznetsova, D.V. Tarlakovskii, G.V. Fedotenkov // Mechanics of Solids. — 2011. — Vol. 46, no. 5. — Pp. 779–787.
 14. Tarlakovskii, D.V. Nonstationary 3D motion of an elastic spherical shell / D.V. Tarlakovskii, G.V. Fedotenkov // Mechanics of Solids. — 2015. — Vol. 50, no. 2. — Pp. 208–217.
 15. Tarlakovskii, D.V. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells / D.V. Tarlakovskii, G.V. Fedotenkov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. — 2014. — Vol. 43, no. 2. — Pp. 145–152.
 16. Škec, L. Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection / L. Škec, G. Jelenić // Acta Mechanica. — 2014. — Vol. 225, no. 2. — pp. 523–541.
 17. Kulikov, G.M. Advanced formulation for laminated composite shells: 3D stress analysis and rigid-body motions / G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova // Composite Structures. — 2013. — Vol. 95. — Pp. 236–246.
 18. Деформирование трехслойной круговой пластины на упругом основании / Горшков А.Г. [и др.] // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. — 2005. — № 1. — С. 16–22.
 19. Журавков, М.А. Нелинейное деформирование упруго-пластического трехслойного стержня локальной нагрузкой / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. — 2016. — № 3(36). — С. 71–79.
 20. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. — 2013. — № 1(6). — С. 31–35.
 21. Starovoitov, E.I. Description of the thermomechanical properties of some structural materials // Strength of materials. — 1988. — Vol. 20, no. 4. — Pp. 426–431.

STAROVOITOV Eduard I., D. Sc. in Phys. and Math., Prof.

Head of the Department “Structural Mechanics”¹

E-mail: edstar0@yandex.by

LEONENKO Denis V., D. Sc. in Phys. and Math., Assoc. Prof.

Professor of the Department “Structural mechanics”¹

E-mail: leoden@tut.by

¹Belarusian State University of Transport, Gomel, Republic of Belarus

Received 23 January 2018.

THERMOELASTIC DEFORMATION OF THREE-LAYER CIRCULAR PLATE BY A SURFACE LOADS OF VARIOUS FORMS

The formulation of the boundary value problem of axisymmetric deformation of circular elastic steel thickness of the plate under the action of uniformly distributed and parabolic loads is given. The effect of a thermal field on the SSS of a plate is considered. For the asymmetric in thickness three-layer plate we have accepted the kinematic hypothesis of a broken normal. In the thin external layers the Kirchhoff's hypotheses are accepted. The filler is no compressible through thickness. It's normal subject to the Tymoshenko hypothesis. The work of arising shear stresses is taken into account. The equations of equilibrium in terms of displacements of the rod were obtained by the Variational method. At the ends of the plate the presence of rigid diaphragms is assumed to prevent the relative shift of the layers. On the bordering surfaces of the layers requires a gluing. The analytical solution of the boundary-value problem in the case of a distributed load was obtained. The case of uniformly distributed and parabolic loads was considered. The numerical analysis of the solutions is given.

Keywords: circular sandwich plate, parabolic loads, thermal field, analytical solution, numerical analysis

References

1. Bolotin V.V., Novichkov Yu.N. *Mekhanika mnogosloynnykh konstruktii* [Mechanics of Layered Structures]. Moscow, Mashinostroenie, 1980. 375 p.
2. Golovko K.G., Lugovoj P.Z., Mejsh V.F. *Dinamika neodnorodnykh obolochek pri nestacionarnykh nagruzkah* [The Dynamics of Inhomogeneous Shells under Transient Load Conditions]. Kiev, Kievskij universitet, 2012. 541 p.
3. Pleskatshevskiy U.M., Starovoitov E.I., Yarovaya A.V. *Deformirovanie metalopolimernykh sistem* [Strain of Metal-Polymeric Systems]. Minsk, Belaruskaja navuka, 2004. 342 p.
4. Gorshkov A.G., Starovoitov E.I., Leonenko D.V. *Kolebanija trehslojnykh stержnej pod dejstviem lokalnykh nagruzk razlichnykh form* [Vibrations of Sandwich Beams under the Action of Local Loads of the Different Forms]. *Ekologicheskij vestnik nauchnykh centrov Chernomorskogo ekonomicheskogo*

- sotrudnichestva* [Ecological bulletin of scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2004, no. 1, pp. 45–52.
5. Pleskatshevsky Y.M., Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Dinamika krugovykh metallopolimernykh plastin na uprugom osnovanii. Ch. I: Svobodnye kolebanija [Dynamics of Circular Metal-polymeric Plates on Elastic Foundation. Part 1. Free Vibrations]. *Mehanika mashin, mehanizmov i materialov* [Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials], 2008, no. 4(4), pp. 48–52.
 6. Pleskatshevsky Y.M., Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Dinamika krugovykh metallopolimernykh plastin na uprugom osnovanii. Ch. II. Vynuzhdennye kolebanija [Dynamics of Circular Metal-polymeric Plates on Elastic Foundation. Part 2. Forced Vibrations]. *Mehanika mashin, mehanizmov i materialov* [Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials], 2009, no. 1(5), pp. 48–51.
 7. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Resonant Effects of Local Loads on Circular Sandwich Plates on Elastic Foundation. *International applied mechanics*, 2010, vol. 46, no. 1, pp. 86–93.
 8. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Yarovaya A.V. Vibration of a Sandwich Rod under Local and Impulsive Forces. *International Applied Mechanics*, 2005, vol. 41, no. 7, pp. 809–816.
 9. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Pleskatshevsky Y.M. Kolebanija trehslojnykh cilindricheskikh obolochek v uprugoj srede Vinklera pri rezonanse [Vibrations of the Three-layered Cylindrical Shells in the Elastic Winkler's Medium at Resonance]. *Mehanika mashin, mehanizmov i materialov* [Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials], 2013, no. 4(22), pp. 70–73.
 10. Ivañez I., Moure M.M., Garcia-Castillo S.K., Sanchez-Saez S. The Oblique Impact Response of Composite Sandwich Plates. *Composite Structures*, 2015, no. 133, pp. 1127–1136.
 11. Grover N., Singh B.N., Maiti D.K. An Inverse Trigonometric Shear Deformation Theory for Supersonic Flutter Characteristics of Multilayered Composite Plates. *Aerospace Science and Technology*, 2016, vol. 52, pp. 41–51.
 12. Tarlakovskiy D.V., Fedotenkov G.V. Analytic Investigation of Features of Stresses in Plane Nonstationary Contact Problems with Moving Boundaries. *Journal of Mathematical Sciences*, 2009, vol. 162, no. 2, pp. 246–253.
 13. Kuznetsova E.L., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Propagation of Unsteady Waves in an Elastic Layer. *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, no. 5, pp. 779–787.
 14. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Nonstationary 3D Motion of an Elastic Spherical Shell. *Mechanics of Solids*, 2015, vol. 50, no. 2, pp. 208–217.
 15. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2014, vol. 43, no. 2, pp. 145–152.
 16. Škec L., Jelenić G. Analysis of a Geometrically Exact Multi-layer Beam with a Rigid Interlayer Connection. *Acta Mechanica*, 2014, vol. 225, no. 2, pp. 523–541.
 17. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. Advanced Formulation for Laminated Composite Shells: 3D Stress Analysis and Rigid-body Motions. *Composite Structures*, 2013, vol. 95, pp. 236–246.
 18. Gorshkov A.G., Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Yarovaya A.V. Deformirovanie trehslojnoj krugovoj plastiny na uprugom osnovanii [Strain of Circle Sandwich Plate on Elastic Foundation]. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh centrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological bulletin of scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2005, no. 1, pp. 16–22.
 19. Zhuravkov M.A., Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Nelinejnoe deformirovanie uprugoplasticheskogo trehslojnogo sterzhnja lokalnoj nagruzkoy [The second deformation of the three-layer elastoplastic rod by local load]. *Mehanika mashin, mehanizmov i materialov* [Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials], 2016, no. 3(36), pp. 71–79.
 20. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Deformirovanie trehslojnogo sterzhnja v temperaturnom pole [Deformation of Three-layer Beam in a Temperature Field]. *Mehanika mashin, mehanizmov i materialov* [Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials], 2013, no. 1(6), pp. 31–35.
 21. Starovoitov E.I. Description of the Thermomechanical Properties of Some Structural Materials. *Strength of materials*, 1988, vol. 20, no. 4, pp. 426–431.