

# МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.4

А.П. ЯНКОВСКИЙ, д-р физ.-мат. наук

ведущий научный сотрудник лаборатории «Физики быстропротекающих процессов»

E-mail: yankovsky\_ap@rambler.ru

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 10.03.2018.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛОКНИСТЫХ ОБОЛОЧЕК

*Сформулирована задача упругопластического осесимметричного деформирования гибких армированных круговых цилиндрических оболочек при динамическом и квазистатическом нагружении внутренним избыточным давлением. Ослабленное сопротивление волокнистых оболочек поперечному сдвигу моделируется неклассическими теориями Редди и Рейсснера. Геометрическая нелинейность учитывается в приближении Кармана. Неупругое поведение материалов фаз композиции оболочек описывается соотношениями теории течения с изотропным упрочнением. Для численного интегрирования поставленной задачи используется явная конечно-разностная схема типа «крест». Исследовано динамическое и квазистатическое упругопластическое деформирование коротких, весьма коротких и длинных цилиндрических волокнистых оболочек разной относительной толщины. Построены зависимости податливости таких конструкций от углов спирального армирования. Показано, что в зависимости от длины оболочки и ее относительной толщины рациональными по критерию минимума податливости конструкции могут быть разные направления армирования: продольное или окружное. Продемонстрировано, что теория Рейсснера, не учитывающая искривление поперечной нормали оболочки, не всегда гарантирует получение приемлемых результатов расчетов динамического поведения цилиндрических композитных оболочек, особенно при расчетных значениях времени порядка одной секунды и более. Установлено, что в силу геометрической нелинейности рассматриваемой задачи наибольшие по модулю прогибы могут возникнуть после большого числа осцилляций армированной конструкции, а не в окрестности начального момента времени, когда оболочка подвергается интенсивному, но кратковременному динамическому нагружению.*

**Ключевые слова:** цилиндрическая оболочка, армирование, геометрическая нелинейность, теория Редди, упругопластическое деформирование, теория Рейсснера, нагрузки взрывного типа, численная схема «крест»

**Введение.** Цилиндрические оболочки, выполненные из композиционных материалов (КМ), находят все более широкое распространение в качестве силовых элементов конструкций аэрокосмической техники, авиационных и морских транспортных средств, в качестве резервуаров и реакторов в объектах химической промышленности и в энергетических установках [1–4], поэтому актуальной является проблема адекватного описания механического поведения КМ-оболочек при воздействиях на них различных видов нагрузок [4–16]. При этом глубина и точность описания зависят как от количества элементов, учитываемых в расчетной схеме, так и от используемой теории расчета.

Изгибное поведение слоистых и анизотропных оболочек в рамках классической теории, не учитывающей ослабленного сопротивления тонкостенных КМ-конструкций поперечным сдвигам, рассматривалось в [5, 6, 12, 14–16]. Поперечные сдвиги в КМ-оболочках традиционно учитывают либо в рамках теории Тимошенко–Рейсснера [4, 7, 11, 13], либо теории Редди [6, 8, 10].

В подавляющем большинстве публикаций, посвященных проблеме изгибного деформирования тонкостенных КМ-конструкций, рассматривается лишь линейно-упругое поведение материалов их композиции [4–16]. Однако инженерные изделия могут быть выполнены и из КМ-материалов, компоненты которых обладают упругопластическими

свойствами [3, 17–19]. Проблема описания упругопластического деформирования КМ-конструкций при квазистатическом и динамическом нагружении находится в стадии становления. Так, в [7] исследовались задачи динамики тонкостенных КМ-конструкций, выполненных из линейно-упругих материалов, а также задачи упругопластического деформирования слоистых пластин и оболочек, слои которых являются изотропными. В [20] на основе деформационной теории пластичности в рамках теории Редди исследовано упругопластическое изгибное деформирование волокнистых пластин, а в [21] построена модель упругопластического изгиба армированных пластин в предположении, что неупругое поведение материалов композиции описывается соотношениями теории течения с изотропным упрочнением. В работе [22] с привлечением этой же механической модели исследован упругопластический изгиб слоисто-волокнистых стержней нерегулярной структуры.

Для численного интегрирования динамических и квазистатических задач тонкостенных элементов КМ-конструкций чаще всего используют явные схемы типа «крест» [7, 21, 22] или неявный метод Ньюмарка [23, 24].

В связи с вышеизложенным настоящее исследование посвящено моделированию упругопластического поведения гибких армированных замкнутых круговых цилиндрических оболочек при их нагружении внутренним давлением с использованием явной численной схемы «крест».

**Постановка задачи.** Рассматривается тонкая замкнутая круговая цилиндрическая оболочка длиной  $L$ , радиуса  $R$  и толщиной  $2h \ll \min(L, R)$  (рисунок 1), с которой связана цилиндрическая система координат  $r, \varphi$  и  $z$ , где  $z$  — осевая координата ( $0 \leq z \leq L$ );  $r, \varphi$  — полярные радиус и угол ( $R - h \leq r \leq R + h, 0 \leq \varphi < 2\pi$ ). Оболочка перекрестно (спирально) армирована четным числом семейств волокон  $2K$ . Семейства волокон разбиты на пары так, что в каждой паре материал арматуры один и тот же, а волокна разных семейств в паре уложены меридионально-симметрично ( $\psi_{2k-1}(z) = \psi_{2k}(z)$ ) с одинаковыми интенсивностями армирования ( $\omega_{2k-1}(z) = \omega_{2k}(z), 1 \leq k \leq K$ ), где  $\psi_k, \omega_k$  — углы (отсчитываемые от направления  $Oz$ ) и плотности армирования волокнами  $k$ -го семейства ( $1 \leq k \leq 2K$ ) (см. рисунок 1 б, где изображен случай  $K = 1$ ). В радиальном направлении  $Or$  структура армирования квазиоднородна. На рисунке 2 изображен представительный элемент такой композиции при ортогональном армировании:  $\psi_1 = -\psi_2 = \pi/4$  ( $K = 1$ ).

Далее предполагаем, что на кромках ( $z = 0, L$ ) заданы осесимметричные граничные условия, причем скручивание оболочки отсутствует, и конструкция осесимметрично нагружена поперечной поверхностной нагрузкой (например, внутренним давлением  $p$ , как показано на рисунке 1 а). Так

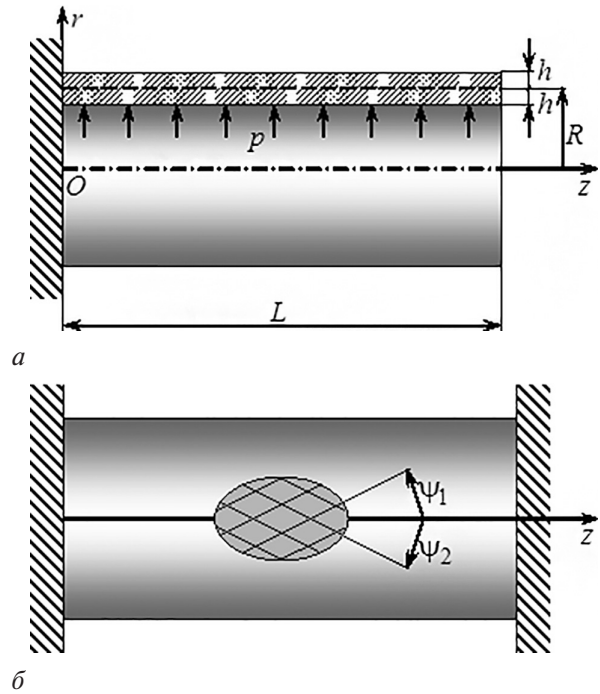


Рисунок 1 — Цилиндрические КМ-оболочки:  
а — жестко закрепленная только на левой кромке;  
б — жестко закрепленная на обеих кромках

как структура армирования, нагружение и закрепление оболочки осесимметричны, ее деформирование также будет осесимметричным. Вопросы потери устойчивости по неосесимметричным формам при задании внешнего давления в настоящей работе не исследуются.

Согласно традиционным теориям изгиба тонких КМ-оболочек, для описания их ослабленного сопротивления поперечным сдвигам используем следующую аппроксимацию средней сдвиговой деформации композиции [4–8]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rz}(t, z, \bar{r}) &= h^{-2} (h^2 - \beta \bar{r}^2) \varepsilon_{rz}^0(t, z), \\ \varepsilon_{r\varphi} &\equiv 0, |\bar{r}| \leq h, 0 \leq z \leq L, t \geq t_0, r = R + \bar{r}, \end{aligned} \quad (1)$$

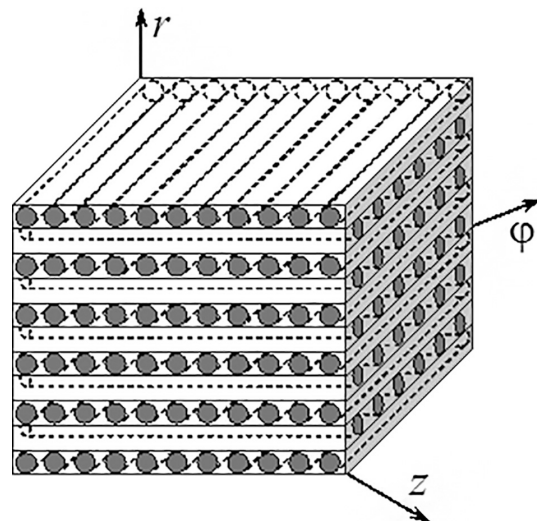


Рисунок 2 — Представительный элемент композиции армированной оболочки

где  $\varepsilon_{rz}^0$  — деформация поперечного сдвига в точках срединной поверхности ( $\bar{r}=0$ );  $t_0$  — начальный момент времени  $t$ ;  $\beta$  — параметр переключения, позволяющий выбирать ту или иную теорию деформирования оболочки.

При  $\varepsilon_{rz}^0 \equiv 0$  далее получаются соотношения классической теории цилиндрических оболочек [5]; при  $\beta = 0$  из (1) вытекают соотношения теории Рейсснера [4, 7]; при  $\beta = 1$  — теории Редди [6, 8, 10].

Согласно традиционной для тонкостенных КМ-элементов конструкций кинематической гипотезе [4–8, 10–16, 20, 21, 23], изменяемостью перемещения в поперечном направлении  $Or$  пренебрегаем:  $u_r(t, z, \bar{r}) = w(t, z)$ , где  $w$  — прогиб точек отсчетной поверхности ( $\bar{r} = 0$ ). С учетом этого предположения на основании (1) в приближении Кармана для осесимметрично деформируемой цилиндрической оболочки получим следующие выражения для тангенциальных перемещений и осредненных деформаций композиции [4, 6, 7, 10]:

$$u_z(t, z, \bar{r}) = u_z^0(t, z) - \bar{r} \partial w + 2\bar{r}h^{-2}(h^2 - \beta\bar{r}^2/3)\varepsilon_{rz}^0(t, z), \quad u_\varphi \equiv 0; \quad (2)$$

$$\varepsilon_{zz}(t, z, \bar{r}) = \partial u_z^0(t, z) - \bar{r} \partial^2 w + 2\bar{r}h^{-2}(h^2 - \beta\bar{r}^2/3)\partial\varepsilon_{rz}^0(t, z) + (\partial w)^2/2; \quad (3)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}(t, z, \bar{r}) = R^{-1}w(t, z), \quad \varepsilon_{z\varphi} \equiv 0, \quad |\bar{r}| \leq h, \quad 0 \leq z \leq L, \quad t \geq t_0,$$

где  $u_z, u_\varphi$  — перемещения точек оболочки в осевом и окружном направлениях;  $u_z^0$  — то же для точек срединной поверхности ( $\bar{r} = 0$ );  $\partial$  — оператор частного дифференцирования по переменной  $z$ .

Таким образом, в равенствах (1)–(3) неизвестными являются функции  $w, u_z^0$  и  $\varepsilon_{rz}^0$ , зависящие только от осевой координаты  $z$  и времени  $t$ .

Уравнения движения тонкой цилиндрической оболочки в рассматриваемом приближении имеют вид [4, 6, 7]:

$$2hr\dot{u}_z^0 = \partial(F_{zz} - F_{zr}\partial w) - \partial w(\sigma_{rr}^{(+)} - \sigma_{rr}^{(-)}); \quad (4)$$

$$2hr\dot{w} = \partial(F_{zr} + F_{zz}\partial w) - R^{-1}F_{\varphi\varphi} + \sigma_{rr}^{(+)} - \sigma_{rr}^{(-)};$$

$$2h^3\rho\dot{\gamma}/3 = \partial M_{zz} - F_{zr}, \quad 0 \leq z \leq L, \quad t \geq t_0,$$

где

$$\gamma(t, z) \equiv 2(1 - \beta/5)\varepsilon_{rz}^0 - \partial w, \quad \rho \equiv \rho_0\omega_0 + \sum_{k=1}^{2K} \rho_k\omega_k, \quad (5)$$

$$\omega_0 = 1 - \sum_{k=1}^{2K} \omega_k;$$

$F_{zz}, F_{\varphi\varphi}, F_{zr}$  — мембранные и поперечная силы в оболочке;  $M_{zz}$  — изгибающий момент;  $\sigma_{rr}^{(\pm)}$  — заданные на внешней (+) и внутренней (–) лицевых поверхностях нагрузки (на рисунке 1 *a* изображен случай  $\sigma_{rr}^{(+)} \equiv 0$  и  $\sigma_{rr}^{(-)} = -p$ );  $\rho_0, \rho_k$  — объемная плотность материала связующего и арматуры  $k$ -го семейства;  $\omega_0$  — относительное объемное содержание связующего в представительном элементе

композиции;  $\rho$  — объемная плотность материала композиции оболочки;  $\gamma$  — введенная для удобства функция [21]; точка означает операцию частного дифференцирования по времени  $t$ .

Материалы фаз композиции предполагаются однородными и изотропными, а их упругопластическое деформирование описывается соотношениями теории Прандтля–Рейсса–Хилла. Повторяя рассуждения из работы [21] (см. формулы (10)–(32)) и учитывая традиционную для тонкостенных элементов конструкций силовую гипотезу  $\sigma_{rr}(t, z, \bar{r}) \approx 0$  [4–8, 10–16, 20, 21, 23], получим линеаризованные определяющие уравнения для композиции оболочки, записанные в матричном виде:

$$\dot{\sigma} = B\dot{\varepsilon}, \quad (6)$$

где

$$\sigma = \{\sigma_{zz}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{z\varphi}, \sigma_{zr}, \sigma_{r\varphi}\}^T, \quad \varepsilon = \{\varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{z\varphi}, \varepsilon_{zr}, \varepsilon_{r\varphi}\}^T;$$

$\sigma, \varepsilon$  — пятикомпонентные векторы-столбцы, элементами которых являются осредненные напряжения и деформации в композиции  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ ;  $B$  —  $5 \times 5$ -матрица, вычисляемая по формуле (33) из [21], элементы  $b_{ij}$  которой зависят от структуры армирования и механического состояния материалов компонентов композиции;  $T$  — операция транспонирования.

Силовые факторы в (4) и средние напряжения в композиции связаны соотношениями [4–8]:

$$F_{zz}(t, z) = \int_{-h}^h \sigma_{zz}(t, z, \bar{r}) d\bar{r};$$

$$F_{\varphi\varphi}(t, z) = \int_{-h}^h \sigma_{\varphi\varphi}(t, z, \bar{r}) d\bar{r};$$

$$F_{zr}(t, z) = \int_{-h}^h \sigma_{zr}(t, z, \bar{r}) d\bar{r}; \quad (7)$$

$$M_{zz}(t, z) = \int_{-h}^h \sigma_{zz}(t, z, \bar{r}) \bar{r} d\bar{r}, \quad 0 \leq z \leq L, \quad t \geq t_0.$$

Как показано в [21], из равенств (6) при учете (1) вытекает, что в рамках теории Редди ( $\beta = 1$ ) [6, 8, 10, 20] на лицевых поверхностях оболочки тождественно выполняются силовые граничные условия по касательным напряжениям:  $\sigma_{zr}(t, z, \pm h) = 0$ . Согласно же классической теории ( $\varepsilon_{rz}^0 \equiv 0$ ) [4–6, 23] и теории Рейсснера ( $\beta = 0$ ) [4, 7], эти граничные условия удовлетворить не удается.

Для однозначного интегрирования рассматриваемой задачи на кромках оболочки следует задать силовые [6]

$$(-1)^i (F_{zz} - F_{zr}\partial w) = F_z, \quad (-1)^i (F_{zr} + F_{zz}\partial w) = F_r, \quad (8)$$

$$M_{zz} = M_z, \quad i=1 \text{ при } z=0, \quad i=2 \text{ при } z=L, \quad t \geq t_0$$

и кинематические [21] (см. (2) при учете (5))

$$w(t, z_*) = u_{r*}(t, z_*); \quad 2hu_z^0(t, z_*) = u_{z*}(t, z_*); \quad (9)$$

$$2h^3\gamma(t, z_*)/3 = \bar{u}_{z*}(t, z_*), \quad z_* = 0, L, \quad t \geq t_0$$

граничные условия. Кроме того, должны быть заданы и начальные условия [21]:

$$\begin{aligned} w(t_0, z) = u_{r0}(z); \quad \dot{w}(t_0, z) = v_{r0}(z); \quad 2hu_z^0(t_0, z) = u_{z0}(z); \\ 2h\dot{u}_z^0(t_0, z) = v_{z0}(z); \quad 2h^3\gamma(t_0, z)/3 = \bar{u}_{z0}(z); \quad (10) \\ 2h^3\dot{\gamma}(t_0, z)/3 = \bar{v}_{z0}(z), \quad 0 \leq z \leq L, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} u_{z^*}(t, z_*) &\equiv \int_{-h}^h U_{z^*}(t, z_*, \bar{r}) d\bar{r}; \\ \bar{u}_{z^*}(t, z_*) &\equiv \int_{-h}^h U_{z^*}(t, z_*, \bar{r}) \bar{r} d\bar{r}; \\ u_{z0}(z) &\equiv \int_{-h}^h U_{z0}(z, \bar{r}) d\bar{r}; \quad \bar{u}_{z0}(z) \equiv \int_{-h}^h U_{z0}(z, \bar{r}) \bar{r} d\bar{r}; \quad (11) \\ v_{z0}(z) &\equiv \int_{-h}^h V_{z0}(z, \bar{r}) d\bar{r}; \quad \bar{v}_{z0}(z) \equiv \int_{-h}^h V_{z0}(z, \bar{r}) \bar{r} d\bar{r}; \end{aligned}$$

$F_z, F_r$  — осевая и радиальная силы, действующие на кромках;  $M_z$  — заданный на кромках изгибающий момент;  $U_{z^*}, u_{r^*}$  — заданные на кромках перемещения;  $u_{r0}, U_{z0}, v_{r0}, V_{z0}$  — заданные начальные перемещения и скорости точек оболочки. В силу осевой симметрии задачи при отсутствии скручивания оболочки на каждой кромке могут быть заданы по три смешанных из (8) и (9) граничных условий (например, при шарнирном опирании кромки).

**Метод решения.** Численное решение рассматриваемой задачи построим на основе метода шагов по времени [7, 21–24], т. е. будем определять неизвестные функции в дискретные моменты времени  $t_{n+1} = t_n + \tau$ , где  $\tau = \text{const} > 0$  — шаг по времени. При этом считаем, что в моменты времени  $t_m$  известны значения следующих величин:

$$\begin{aligned} u_z^0(z) &\equiv u_z^0(t_m, z); \quad w(z) \equiv w(t_m, z); \quad \gamma(z) \equiv \gamma(t_m, z); \\ \sigma_{rr}^{(\pm)}(z) &\equiv \sigma_{rr}^{(\pm)}(t_m, z); \quad \sigma_{zz}^m(z, \bar{r}) \equiv \sigma_{zz}(t_m, z, \bar{r}); \quad (12) \\ \sigma_{\varphi\varphi}^m(z, \bar{r}) &\equiv \sigma_{\varphi\varphi}(t_m, z, \bar{r}); \quad \sigma_{zr}^m(z, \bar{r}) \equiv \sigma_{zr}(t_m, z, \bar{r}), \\ |\bar{r}| &\leq h, \quad 0 \leq z \leq L, \quad m = n-1, n. \end{aligned}$$

Используя (7), в момент времени  $t_n$  при учете (12) можно вычислить все функции, входящие в правые части равенств (4).

Для аппроксимации производных по времени  $t$  используем центральные конечные разности [7, 21, 22]. Это позволяет построить явную численную схему. Заменяв в левых частях равенств (4) производные по времени конечно-разностными аналогами, при учете обозначений, подобных (12), получим:

$$\begin{aligned} \frac{2h\rho}{\tau^2} \left( u_z^{n+1} - 2u_z^n + u_z^{n-1} \right) &= \partial \left( F_{zz}^n - F_{zr}^n \partial w \right) - \partial w \left( \sigma_{rr}^{n(+)} - \sigma_{rr}^{n(-)} \right); \\ \frac{2h\rho}{\tau^2} \left( w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1} \right) &= \partial \left( F_{zr}^n + F_{zz}^n \partial w \right) - R^{-1} F_{\varphi\varphi}^n + \sigma_{rr}^{n(+)} - \sigma_{rr}^{n(-)}; \quad (13) \\ \frac{2h^3\rho}{3\tau^2} \left( \gamma^{n+1} - 2\gamma^n + \gamma^{n-1} \right) &= \partial M_{zz}^n - F_{zr}^n, \quad 0 \leq z \leq L, \quad n=1, 2, 3... \end{aligned}$$

Добавляя к (13) требуемые граничные условия на кромках (8), (9) при учете (11) и заменяя в равенствах (8), (13) производные  $\partial(\bullet)$  от известных в момент времени  $t_n$  функций (см. (12)) их конечно-разностными аналогами по переменной  $z$  на трехточечных шаблонах, построим явную схему «крест» [7, 21, 22] для численного интегрирования исследуемой задачи. При известных из (13) функ-

циях  $u_z^{n+1}, w$  и  $\gamma$  по первой формуле (5) можно определить функцию  $\epsilon_{zr}^{n+1}$ , после чего на основании соотношений (1) и (3) в каждой точке оболочки можно вычислить средние деформации композиции  $\epsilon_{zr}^{n+1}, \epsilon_{zz}^{n+1}$  и  $\epsilon_{\varphi\varphi}^{n+1}$ . Далее решение рассматриваемой задачи строится так, как описано в [21] (см. формулы (49)–(51)).

Структура левых частей равенств (13) свидетельствует о том, что для начала расчета по явной схеме «крест», кроме функций  $u_z^0, w$  и  $\gamma$ , известных из начальных условий (10) при учете (11), необходимо знать и функции  $u_z^1, w, \gamma$  (см. (13) при  $n = 1$ ). Согласно [21], значения этих функций определим по формуле Тейлора, учитывая начальные условия (10) и уравнения движения (4) при  $t = t_0$ :

$$\begin{aligned} w^1(z) &= w^0(z) + \tau \dot{w}^0(z) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{w}^0(z) + O(\tau^3) \approx 0; \\ u_z^1(z) &= u_z^0(z) + \tau \dot{u}_z^0(z) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{u}_z^0(z) + O(\tau^3) \approx 0; \quad (14) \\ \gamma^1(z) &= \gamma^0(z) + \tau \dot{\gamma}^0(z) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{\gamma}^0(z) + O(\tau^3) \approx 0, \quad 0 \leq z \leq L. \end{aligned}$$

Приближенные равенства в (14) выполняются с точностью  $\tau^3$ , при этом нулевые значения справа получаются при естественном начальном состоянии конструкции, когда оболочка покоится:  $u_{r0} \equiv 0, v_{r0} \equiv 0, U_{z0} \equiv 0, V_{z0} \equiv 0$  (см. (10) и (11)), а внешние нагрузки отсутствуют:  $\sigma_{rr}^{(\pm)}(t_0, z) \equiv 0, 0 \leq z \leq L$  (см. (4)).

Необходимые условия устойчивости схемы «крест» вытекают из условия Куранта–Фридрихса–Леви и для армированной оболочки определяются неравенствами, аналогичными (60) из [21]. Как показано в [21], если условие Куранта выполняется для каждого компонента композиции оболочки, то оно с запасом выполняется и для композиции в целом при любых параметрах структуры армирования  $\psi_k$  и  $\omega_k$  ( $0 \leq k \leq 2K$ ). Поэтому далее используем именно такой упрощенный критерий устойчивости численной схемы «крест».

**Обсуждение результатов расчетов.** В качестве конкретных примеров рассмотрим упругопластическое поведение армированных цилиндрических оболочек с разными размерами  $L, R$  и  $2h$ . Оболочки могут быть либо жестко закреплены на обеих кромках (см. рисунок 1 б и равенства (9) при  $u_{r^*} = 0$ ,



Таблица — Физико-механические характеристики материалов компонентов композиции конструкций [17, 18]

Материал	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$\nu$	$\sigma_y$ , МПа	$E$ , ГПа	$E_y$ , ГПа	$a$ , м/с
Эпоксидная смола	1210	0,33	20	2,8	1,114	1521,2
Стекловолокно S-994	2520	0,25	4500	86,8	6,230	5868,9

$u_{z^*} = 0, \bar{u}_{z^*} = 0, z^* = 0, L$ ), либо жестко закреплены на левой кромке (см. (9) при  $u_{r^*} = 0, u_{z^*} = 0, \bar{u}_{z^*} = 0, z^* = 0$ ) и свободны от опирания и нагружения на правой кромке (см. рисунок 1 а и соотношения (8) при  $F_r = F_z = 0, M_z = 0, z = L$ ).

Конструкции нагружаются избыточным внутренним давлением по следующему закону (см. (4), (13)) [23]:

$$\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} \equiv p(t) = \begin{cases} p_{\max} t / t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}; \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t - t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \quad (15)$$

где

$$\alpha = -\ln(0,01) / (t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}; \quad (16)$$

$t_{\max}$  — момент времени, при котором нагрузка  $p(t)$  достигает максимального значения  $p_{\max} > 0$ ;  $t_{\min}$  — момент времени, при котором давление  $p(t)$  пренебрежимо мало по сравнению с  $p_{\max}$  (в частности, соотношение (16) соответствует условию  $p(t_{\min}) = 0,01p_{\max}$ ). В случае нагрузки, порожденной воздушной взрывной волной, согласно [23], в (15) и (16) можно использовать экспериментальные данные:  $t_{\max} = 0,1$  мс и  $t_{\min} = 2$  мс или  $t_{\min} = 200$  мс.

Предполагаем: в начальный момент времени  $t = t_0 = 0$  оболочки покоятся в естественном состоянии (см. (10) при  $u_{r0} \equiv 0, v_{r0} \equiv 0, u_{z0} \equiv 0, v_{z0} \equiv 0, \bar{u}_{z0} \equiv 0, \bar{v}_{z0} \equiv 0$ ). Из (15) имеем, что при  $t = 0$  нагрузка отсутствует, следовательно, справедливы приближенные равенства (14).

Оболочки изготовлены из эпоксисвязующего и усилены двумя ( $K = 1$ ) семействами стекловолокна марки S-994. Упругопластическое деформирование материалов фаз композиции описывается диаграммой с линейным упрочнением на стадии активного нагружения:

$$\sigma = \begin{cases} E_k \varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_y^{(k)} = \sigma_y^{(k)} / E_k; \\ \text{sign}(\varepsilon) \sigma_y^{(k)} + \\ + E_y^{(k)} (\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon) \varepsilon_y^{(k)}), & |\varepsilon| > \varepsilon_y^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq 2K, \end{cases} \quad (17)$$

где  $\sigma, \varepsilon$  — напряжение и деформация материала при растяжении–сжатии;  $E_k, E_y^{(k)}$  — модули Юнга и упрочнения материала  $k$ -го компонента композиции;  $\sigma_y^{(k)}, \varepsilon_y^{(k)}$  — предел текучести и соответствующая ему деформация для того же материала. Физико-механические характеристики материалов фаз композиции приведены в таблице, где  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $a$  — скорость звука.

Рассматриваются оболочки с однородными структурами армирования:  $\psi_1 = -\psi_2 = \text{const}, \omega_1 = \omega_2 = \text{const}$ .

В качестве меры податливости конструкций примем величину

$$w_m = \max_{t, z} |w(t, z; \psi_1, \omega_1)|, \quad 0 \leq z \leq L, \quad t \geq 0. \quad (18)$$

На рисунке 3 изображены зависимости  $w_m(\psi_1)$ , рассчитанные для коротких ( $R = L = 1$  м: кривые 1–3 и 1'–3') и весьма коротких ( $R = 3$  м,  $L = 1$  м: кривые 1''–3'') оболочек толщиной  $2h = 10$  см при плотностях армирования  $\omega_1 = \omega_2 = 0,25$ . Конструкции нагружены избыточным давлением взрывного типа, причем  $t_{\min} = 200$  мс (см. (16)). Кривые 1–3 рассчитаны при  $p_{\max} = 7$  МПа (см. (15)), а линии 1'–3' и 1''–3'' — при  $p_{\max} = 4$  МПа. Кривые 1–3 и 1''–3'' получены для оболочек, жестко закрепленных на обеих кромках (см. рисунок 1 б), а линии 1'–3' — для оболочки, закрепленной только на левой кромке (см. рисунок 1 а). Кривые 1, 1' и 1'' определены по теории Редди ( $\beta = 1$ ), линии 2, 2' и 2'' — по теории Рейснера ( $\beta = 0$ ), а кривые 3, 3' и 3'' — по классической теории.

Поведение правых участков кривых на рисунке 3 свидетельствует о том, что при армировании рассматриваемых оболочек по направлениям, близким к окружным ( $\psi_1 = -\psi_2 \approx \pi/2$ ), расчеты податливости, выполненные по разным теориям, различаются пренебрежимо мало. Левые же участки кривых 1–3 и 1''–3'' указывают на то, что для соответствующих оболочек, закрепленных на обеих кромках, при армировании по направлениям, близким к продольным ( $\psi_1 = -\psi_2 \approx 0$ ), податливость, определенная по разным теориям, может существенно различаться. При этом расчеты, выполненные по классической теории (кривые 3 и 3''), для таких оболочек при указанных углах армирования следует признать неприемлемыми, так как классическая теория значительно занижает податливость конструкций по сравнению

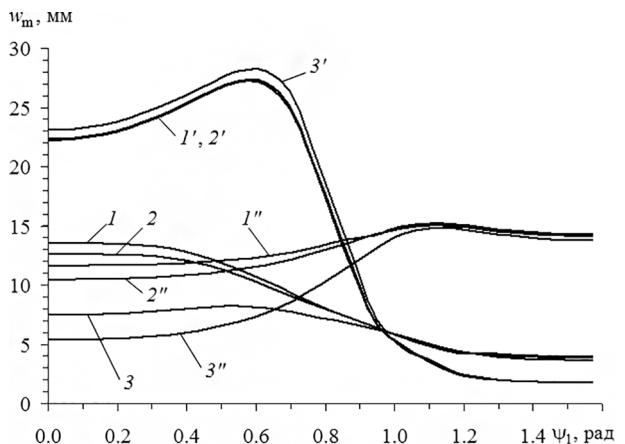


Рисунок 3 — Зависимость максимального по модулю прогиба КМ-оболочки от угла армирования

с расчетами, выполненными по более точным теориям Редди и Рейсснера (кривые 1, 2 и 1', 2'').

Если в качестве критерия рационального армирования цилиндрических оболочек использовать условие минимума величины (18), то, согласно поведению кривых 1–3 и 1'–3' на рисунке 3, для коротких оболочек ( $R = L = 1$  м) рациональным будет окружное армирование ( $\psi_1 = -\psi_2 = \pi/2$ ). При этом расчеты податливости, выполненные по разным теориям, практически совпадают. Согласно же поведению кривых 1''–3'', в случае весьма короткой оболочки ( $R = 3$  м,  $L = 1$  м), жестко закрепленной на обеих кромках, рациональным является продольное армирование ( $\psi_1 = -\psi_2 = 0$ ). При этом значения податливости, рассчитанные по трем рассматриваемым теориям, существенно различаются.

Дополнительные расчеты показали, что в случае квазистатического нагружения ( $t_{\max} \approx 1$  с; см. (15) и (16)) рассматриваемых конструкций зависимости  $w_m(\psi_1)$  качественно аналогичны кривым, изображенным на рисунке 3, но значения  $w_m$  при этом примерно на 40% меньше значений ординат точек на соответствующих кривых рисунка 3. Кроме того, расчеты, выполненные для длинных оболочек и оболочек средней длины, свидетельствуют о том, что зависимости  $w_m(\psi_1)$  в этих случаях качественно подобны кривым 1'–3' на рисунке 3, т. е. для таких оболочек рациональным является окружное армирование.

На рисунке 4 изображены осцилляции точек центрального сечения весьма коротких цилиндрических оболочек ( $w_0(t) = w(t, L/2)$ ,  $R = 3$  м,  $L = 1$  м). Кривые 1''–3'' на рисунке 4 рассчитаны при тех же условиях, что и кривые 1'–3' на рисунке 3. Ординаты точек первых локальных максимумов на кривых рисунка 4 совпадают с ординатами левых точек на кривых 1''–3'' рисунка 3 ( $\psi_1 = 0$ ). Сравнение ординат этих точек показывает, что при рациональном продольном армировании весьма коротких цилиндрических оболочек классическая теория (кривые 3'') занижает расчетную податливость конструкции на 54% по сравнению с теорией Редди (кривые 1''), а теория Рейсснера (кривые 2'') — на 10%. Так как в отличие от классической теории и теории Рейсснера теория

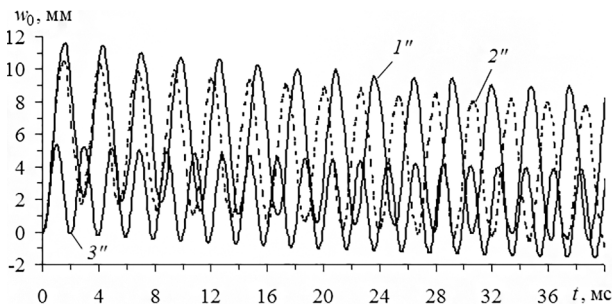


Рисунок 4 — Осцилляции точек центрального сечения весьма короткой цилиндрической оболочки в поперечном направлении, рассчитанные по разным теориям

Редди учитывает в первом приближении искривление поперечной нормали оболочки, расчеты, выполненные по последней теории, в рамках настоящего исследования целесообразно принять за эталонные.

Сравнение сплошной кривой 1'' с пунктирной линией 2'' на рисунке 4 показывает, что с течением времени различие решений, полученных по двум традиционным неклассическим теориям, увеличивается (см. правые участки кривых на рисунке 4).

Выше рассматривались относительно толстые оболочки ( $2h/L = 1/10$ ). Расчеты показывают, что не только для относительно толстых и весьма коротких цилиндрических оболочек (см. рисунок 4), но и для весьма тонких и длинных армированных оболочек динамические расчеты, выполненные по теориям Рейсснера и Редди, с увеличением времени начинают значительно различаться. Так, на рисунке 5 изображены зависимости  $w_0(t)$ , рассчитанные для тонкой длинной цилиндрической оболочки ( $2h = 1$  см,  $R = 1$  м,  $L = 4$  м), рационально армированной в окружном направлении ( $\psi_1 = -\psi_2 = \pi/2$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = 0,15$ ), жестко закрепленной на обеих кромках и нагруженной избыточным давлением взрывного типа ( $p_{\max} = 3$  МПа,  $t_{\min} = 2$  мс; см. (15)). Согласно (16), при  $t > t_{\min} = 2$  мс колебания такой оболочки можно рассматривать как свободные.

На рисунке 5 а приведена зависимость  $w_0(t)$ , рассчитанная по теории Редди. Почти неотличимой от нее получается зависимость  $w_0(t)$ , полученная по теории Рейсснера; заметное различие в расчетах податливости наблюдается лишь

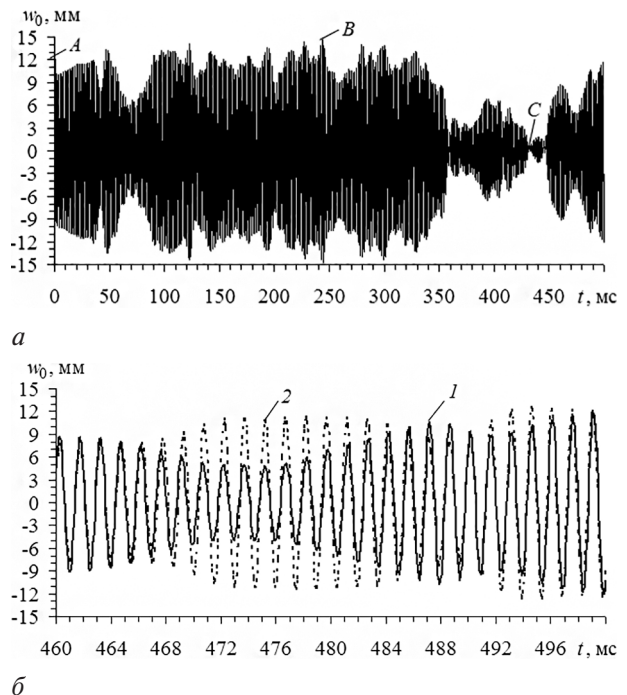


Рисунок 5 — Осцилляции точек центрального сечения тонкой длинной цилиндрической оболочки в поперечном направлении: а — расчет по теории Редди; б — расчеты по теориям Редди и Рейсснера в окрестности момента времени  $t = 500$  мс

в окрестности момента времени  $t \approx 500$  мс. Поэтому на рисунке 5 б изображены соответствующие зависимости на интервале времени  $460 \leq t \leq 500$  мс, где сплошная кривая 1 рассчитана по теории Редди, а пунктирная линия 2 — по теории Рейсснера. Согласно поведению этих кривых, на интервале времени  $468 \leq t \leq 485$  мс наблюдается значительное различие расчетной податливости рассматриваемой оболочки, определенной по этим неклассическим теориям.

Для объяснения того факта, почему с течением времени динамические расчеты, выполненные по теориям Рейсснера и Редди, начинают значительно различаться даже для тонких оболочек, рассмотрим эпюры прогибов  $w(t, z)$  в некоторые фиксированные моменты времени  $t$ . На рисунке 6 изображены зависимости  $w(z)$ , определенные по теории Редди при  $t = 0,6$  мс (кривая 1),  $t = 243,7$  мс (линия 2) и  $t = 435,3$  мс (кривая 3). Расчет проводился при тех же условиях, что и в случае рисунка 5. Так как закрепление, нагружение и структура армирования оболочки симметричны относительно центрального сечения  $z = L/2$ , зависимости  $w(z)$  также симметричны относительно этого сечения ( $w(z) = w(L - z)$ ,  $0 \leq z \leq L/2$ ), поэтому на рисунке 6 изображены лишь левые половины графиков  $w(z)$ . Точки A, B и C на рисунке 6 соответствуют точкам A, B и C на рисунке 5 а, что дает наглядное представление о моментах времени, в которые получены эпюры прогибов на рисунке 6.

Кривая 1 на рисунке 6 соответствует моменту времени, в который достигается первый локальный максимум. Поведение кривой 1 на рисунке 6 свидетельствует о том, что в окрестности начального момента времени ( $t = 0,6$  мс) почти всюду в оболочке реализуется безмоментное напряженное состояние (см. протяженный горизонтальный участок на кривой 1). Именно поэтому в окрестности начального момента времени теории Рейсснера и Редди приводят к очень близким результатам. Кроме того, при квазистатическом нагружении такой конструкции внутренним дав-

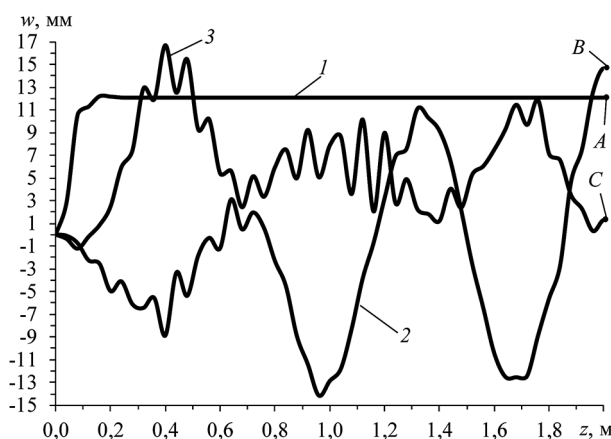


Рисунок 6 — Эпюры прогибов тонкой длинной цилиндрической оболочки, рассчитанные по теории Редди в разные моменты времени

лением эпюра прогибов получается аналогичной кривой 1 на рисунке 6, поэтому и расчеты податливости, выполненные по этим двум теориям, практически неразличимы; в силу тонкости рассматриваемой оболочки вполне приемлемый результат дает и классическая теория при квазистатическом нагружении оболочки.

В случае же динамического нагружения конструкции с течением времени начальное, почти безмоментное состояние в длинной цилиндрической оболочке «распадается», и доминирующими становятся изгибные деформации, о чем свидетельствует сравнение кривых 2 и 3 с линией 1 на рисунке 6. При этом с течением времени вся конструкция начинает испытывать поперечное сдвиговое деформирование (а не только в зонах краевых эффектов, как в случае, которому соответствует кривая 1), интенсивность которого возрастает. Именно поэтому в окрестности момента времени  $t = 500$  мс после многократных осцилляций оболочки (см. рисунок 5 а) наблюдается существенное различие в прогибах конструкции, определенных по теориям Рейсснера и Редди (см. рисунок 5 б).

Сравнение кривых на рисунке 6 показывает, что максимальный по модулю прогиб конструкции может возникнуть после нескольких десятков свободных колебаний цилиндрической оболочки, причем в сечении, не совпадающем с центральным ( $z = L/2 = 2$  м). Действительно, максимальный прогиб на рисунке 6 достигается на кривой 3 ( $t = 435,3$  мс) в точке  $z = 0,4$  м.

**Заключение.** Проведенный анализ упругопластического осесимметричного деформирования гибких волокнистых цилиндрических оболочек показал, что в отличие от гибких пластин [21], наиболее часто используемая в расчетной практике неклассическая теория Рейсснера не гарантирует получения приемлемой точности определения податливости не только для весьма коротких и относительно толстых цилиндрических оболочек (как при динамическом, так и квазистатическом нагружении), но и для тонких длинных армированных оболочек при динамическом их нагружении, так как для таких конструкций при расчетных временах порядка одной секунды и более прогибы, рассчитанные по традиционным неклассическим теориям Рейсснера и Редди, существенно различаются. При этом для проведения практических расчетов следует рекомендовать использование теории Редди, так как, в отличие от теории Рейсснера, она в первом приближении учитывает искривление поперечной нормали оболочки, а сложность реализаций обеих теорий почти одинакова.

В силу геометрической и физической нелинейности рассматриваемой задачи максимальный по модулю прогиб цилиндрической оболочки может возникнуть после большого количества ее колебаний в поперечном направлении, а не на

первой осцилляции, как это предполагается в работах [7, 21, 23].

Результаты динамических расчетов упруго-пластического изгиба тонких цилиндрических армированных оболочек свидетельствуют о том, что наиболее вероятный механизм начального разрушения таких конструкций заключается в накоплении повреждений, порожденных малоцикловой усталостью материала связующей матрицы, в котором возникает знакопеременная пластичность за счет значительных поперечных колебаний конструкции.

### Список литературы

1. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines / A.P. Mouritz [et al.] // *Compos. Struct.* — 2001. — Vol. 53, No. 1. — Pp. 21–42.
2. Gibson, R.F. Principles of composite material mechanics / R.F. Gibson. — 3rd ed. — Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2012.
3. Gill, S.K. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites / S.K. Gill, M. Gupta, P. Satsangi // *Frontiers of Mechanical Eng.* — 2013. — Vol. 8, No. 2. — Pp. 187–200.
4. Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек / Ю.С. Соломонов [и др.]. — М.: Физматлит, 2014. — 408 с.
5. Григоренко, Я.М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости / Я.М. Григоренко. — Киев: Наук. думка, 1973. — 228 с.
6. Амбарцумян, С.А. Общая теория анизотропных оболочек / С.А. Амбарцумян. — М.: Наука, 1974. — 446 с.
7. Абросимов, Н.А. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций / Н.А. Абросимов, В.Г. Баженов. — Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. — 400 с.
8. Reddy, J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis / J.N. Reddy. — 2nd ed. — Boca Raton: CRC Press, 2004.
9. Muc, A. An evolution strategy in structural optimization problems for plates and shells / A. Muc, M. Muc-Wierzoń // *Compos. Struct.* — 2012. — Vol. 94, No. 4. — Pp. 1461–1470.
10. Андреев, А. Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа / А. Андреев. — Saarbrücken (Deutschland): Palmarium Academic Publishing, 2013. — 93 с.
11. Моделирование статики и динамики оболочечных конструкций из композиционных материалов / В.О. Каледин [и др.]. — М.: Физматлит, 2014. — 196 с.
12. Босяков, С.М. Анализ свободных колебаний цилиндрической оболочки из стеклопластика при граничных условиях Навье / С.М. Босяков, В. Чживэй // *Механика машин, механизмов и материалов.* — 2011. — № 3(16). — С. 24–27.
13. Старовойтов, Э.И. Колебания трехслойных цилиндрических оболочек в упругой среде Винклера при резонансе / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Ю.М. Плескачевский // *Механика машин, механизмов и материалов.* — 2013. — № 4(25). — С. 70–73.
14. Гулгазрян, Г.Р. О свободных интерфейсных колебаниях тонких упругих круговых цилиндрических оболочек / Г.Р. Гулгазрян, Р.Г. Гулгазрян // *Механика машин, механизмов и материалов.* — 2013. — № 4(25). — С. 12–19.
15. Гулгазрян, Г.Р. О свободных интерфейсных и краевых колебаниях тонких упругих полубесконечных круговых цилиндрических оболочек со свободным торцом / Г.Р. Гулгазрян, Р.Г. Гулгазрян, Г.И. Михасев // *Механика машин, механизмов и материалов.* — 2016. — № 2(35). — С. 34–46.
16. Агаларова, И.У. Колебания подкрепленных перекрестными системами ребер анизотропных цилиндрических оболочек с наполнителем при осевом сжатии и с учетом трения / И.У. Агаларова // *Механика машин, механизмов и материалов.* — 2017. — № 1(38). — С. 57–63.
17. Композиционные материалы: справ. / под ред. Д.М. Карпиноса. — Киев: Наук. думка, 1985. — 592 с.
18. Справочник по композитным материалам: в 2-х кн. / под ред. Дж. Любина; пер. с англ. А.Б. Геллера, М.М. Гельмонта; под ред. Б.Э. Геллера. — М.: Машиностроение, 1988. — Кн. 1. — 448 с.
19. Maćko, W. Mechanical properties of A359/SiCp metal matrix composites at wide range of strain rates / W. Maćko, Z.L. Kowalewski // *Appl. Mech. Mater.* — 2011. — Vol. 82. — Pp. 166–171.
20. Янковский, А.П. Упругопластическое деформирование изгибаемых армированных пластин при ослабленном сопротивлении поперечному сдвигу / А.П. Янковский // *Прикладная математика и механика.* — 2013. — Т. 77, вып. 6. — С. 853–876.
21. Янковский, А.П. Применение явного по времени метода центральных разностей для численного моделирования динамического поведения упругопластических гибких армированных пластин / А.П. Янковский // *Вычислительная механика сплошных сред.* — 2016. — Т. 9, № 3. — С. 279–297.
22. Янковский, А.П. Моделирование динамического упруго-пластического поведения балок нерегулярной слоисто-волоконистой структуры / А.П. Янковский // *Механика машин, механизмов и материалов.* — 2017. — № 1(38). — С. 45–56.
23. Houlston, R. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // *Computers & Structures / R. Houlston, C.G. DesRochers.* — 1987. — Vol. 26, No. 1–2. — Pp. 1–15.
24. Kazanci, Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses / Z. Kazanci // *International Journal of Non-Linear Mechanics.* — 2011. — Vol. 46. — Pp. 807–817.

YANKOVSKII Andrei P., D. Sc. in Phys. and Math.

Leading Researcher of the Laboratory of Fast Processes Physics

E-mail: yankovsky\_ap@rambler.ru

Khrstianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Novosibirsk, Russia

Received 10 March 2018.

## MODELING OF AXISYMMETRIC ELASTOPLASTIC DEFORMATION OF CYLINDRICAL FIBROUS SHELLS

*The problem of elastoplastic axisymmetric deformation is formulated for flexible reinforced circular cylindrical shells under dynamic and quasi-static action of internal excessive pressure. The weakened resistance to transverse shear is modeled by the nonclassical Reddy and Reissner theories. The geometric nonlinearity is taken into account*



in the Karman approximation. The inelastic behavior of phase materials of composition is described by relations of flow theory with isotropic hardening. The explicit finite-difference "cross" scheme is used for the numerical integration of the problem. The dynamic and quasi-static elastoplastic deformation is studied for short, very short and long cylindrical fibrous shells of different relative thickness. The dependences of the maximum deflections on the angles of spiral reinforcement are obtained for such structures. It is shown that depending on the length of the shell and its relative thickness, longitudinal or circumferential reinforcement can be rational by the criterion of the minimum of deflection of the structure. It is demonstrated that the Reissner theory, which does not take into account the curvature of the shell transverse normal, does not always guarantee the satisfactory results of calculations of the dynamic behavior of cylindrical composite shells, especially at the calculated time values of one second or more. It is found that due to the geometric nonlinearity of the problem under consideration, the maximum deflections modulo may occur after a large number of oscillations of the reinforced structure, rather than in the vicinity of the initial moment of time when the shell is subjected to intense short-term dynamic loading.

**Keywords:** cylindrical shell, reinforcement, geometric nonlinearity, Reddy theory, elastic-plastic deformation, Reissner theory, explosive loads, numerical "cross" scheme

## References

- Mouritz A.P., Gellert E., Burchill P., Challis K. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines. *Composite Structures*, 2001, vol. 53, no. 1, pp. 21–42.
- Gibson R.F. *Principles of composite material mechanics*. Boca Raton, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2012.
- Gill S.K., Gupta M., Satsangi P. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites. *Frontiers of Mechanical Engineering*, 2013, vol. 8, no. 2, pp. 187–200.
- Solomonov Yu.S., Georgievskiy V.P., Nedbay A.Ya., Andryushin V.A. *Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek* [Applied problems of mechanics of composite cylindrical shells]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2014. 408 p.
- Grigorenko Ya.M. *Izotropnyye i anizotropnyye sloistye obolochki vrashcheniya peremennoy zhestkosti* [Isotropic and anisotropic layered shells of rotation of variable rigidity]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1973. 228 p.
- Ambartsumyan S.A. *Obshchaya teoriya anizotropnykh obolochek* [The general theory of anisotropic shells]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 446 p.
- Abrsominov N.A., Bazhenov V.G. *Nelineynye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruksiy* [Nonlinear problems of dynamics composite designs]. Nizhniy Novgorod, Izd-vo NNGU Publ., 2002. 400 p.
- Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis*. 2nd ed. Boca Raton, CRC Press, 2004. 855 p.
- Muc A., Muc-Wierzgoń M. An evolution strategy in structural optimization problems for plates and shells. *Composite Structures*, 2012, vol. 94, no. 4, pp. 1461–1470.
- Andreev A.N. *Uprugost i termouprugost sloistyykh kompozitnykh obolochek. Matematicheskaya model i nekotorye aspekty chislennogo analiza* [Elasticity and thermo-elasticity of layered composite shells. Mathematical model and some aspects of the numerical analysis]. Saarbrücken, Palmarium Academic Publishing, 2013. 93 p.
- Kaledin V.O., Aulchenko S.M., Mitkevich A.B., Reshetnikova E.V., Sedova E.A., Shpakova Yu.V. *Modelirovanie statiki i dinamiki obolocheknykh konstruksiy iz kompozitsionnykh materialov* [Modeling of a static's and dynamics of shelled designs from composite materials]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2014. 196 p.
- Bosyakov S.M., Zhivey W. Analiz svobodnykh kolebaniy tsilindricheskoy obolochki iz stekloplastika pri granichnykh usloviyakh Nave [Free vibration analysis of cylindrical shell from fiberglass with Navier boundary conditions]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2011, no. 3(16), pp. 24–27.
- Starovoytov E.I., Leonenko D.V., Pleskachevskiy Yu.M. Kolebaniya trekhslonnykh tsilindricheskikh obolochek v uprugoy srede Vinklera pri rezonanse [Vibrations of the three-layered cylindrical shells in the elastic Winkler's medium at resonance]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2013, no. 4(25), pp. 70–73.
- Ghulghazaryan G.R., Ghulghazaryan R.G. O svobodnykh interfeisnykh kolebaniyakh tonkikh uprugikh krugovykh tsilindricheskikh obolochek [About free interfacial vibrations of thin elastic circular cylindrical shells]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2013, no. 4(25), pp. 12–19.
- Gulgazaryan G.R., Gulgazaryan R.G., Mikhasev G.I. O svobodnykh interfeisnykh i kraevykh kolebaniyakh tonkikh uprugikh polubeskonechnykh krugovykh tsilindricheskikh obolochek so svobodnym tortsom [About free boundary and interfacial vibrations of thin elastic semi-infinite circular cylindrical shells]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2016, no. 2(35), pp. 34–46.
- Agalarova I.U. Kolebaniya podkreplennykh perekrestnymi sistemami reber anizotropnykh tsilindricheskikh obolochek s zapolnitelem pri osevom szhatii i s uchetom treniya [Oscillations of anisotropic cylindrical shells with filler supported with cross ribs system under axial compression and giver friction]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2017, no. 1(38), pp. 57–63.
- Kompozitsionnye materialy. Spravochnik* [Composite materials. Reference Book]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1985. 592 p.
- Lubin G. *Handbook of composites*. New York, Van Nostrand Reinhold, 1982. 786 p.
- Maćko W., Kowalewski Z.L. Mechanical properties of A359/SiCp metal matrix composites at wide range of strain rates. *Applied Mechanics and Materials*, 2011, vol. 82, pp. 166–171.
- Yankovskii A.P. Uprugoplasticheskoe deformirovanie izgi-baemykh armirovannykh plastin pri oslablenom soprotivlenii poperechnomu sdvigu [Elastoplastic deformation of flexible reinforced plates with reduced shear strength]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 2013, vol. 77, no. 6, pp. 613–628.
- Yankovskii A.P. Primenenie yavnogo po vremeni metoda tsentralnykh raznostey dlya chislennogo modelirovaniya dinamicheskogo povedeniya uprugoplasticheskikh gibkikh armirovannykh plastin [Applying the Explicit Time Central Difference Method for Numerical Simulation of the Dynamic Behavior of Elastoplastic Flexible Reinforced Plates]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred* [Computational Continuum Mechanics], 2017, vol. 58, no. 7, pp. 1223–1241.
- Yankovskii A.P. Modelirovanie dinamicheskogo uprugoplasticheskogo povedeniya balok neregulyarnoy sloisto-voloknistoy struktury [Modeling of dynamic elastic-plastic behavior of beams of irregular layered-fibrous structures]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2017, no. 1(38), pp. 45–56.
- Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading. *Computers and Structures*, 1987, vol. 26, no. 1–2, pp. 1–15.
- Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2011, vol. 46, pp. 807–817.