

УДК 539.3

Д.В. ЛЕОНЕНКО, д-р физ.-мат. наук, доц.
профессор кафедры «Строительная механика»¹
E-mail: leoden@tut.by

А.С. ЗЕЛЕНАЯ, магистр техн. наук
аспирант кафедры «Строительная механика»¹
E-mail: anastasiya.zelenaya@tut.by

¹Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 10.03.2018.

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Исследовано напряженно-деформированное состояние физически нелинейных несимметричных по толщине трехслойных прямоугольных пластин со сжимаемым заполнителем. Для внешних слоев принимаются гипотезы Кирхгофа, в жестком сжимаемом заполнителе деформированная нормаль остается прямолинейной. При решении задачи был использован метод «упругих» решений Ильюшина. Приведены численные результаты для трехслойной металлополимерной пластины.

Ключевые слова: трехслойная прямоугольная пластина, сжимаемый заполнитель, пластичность, напряженно-деформированное состояние

Введение. Широкое применение трехслойных элементов конструкций в современных отраслях промышленности обуславливает необходимость разработки и уточнения методов их расчета.

В монографии [1] проведено исследование напряженно-деформированного состояния многослойных конструкций на статические, динамические и температурные воздействия, а также на устойчивость. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки рассмотрены в монографии [2]. Работа [3] посвящена изучению задач статики трехслойных элементов конструкций, связанных с упругим основанием. В монографии [4] исследовано деформирование трехслойных стержней в терморadiационных полях. В статье [5] получено значение допускаемой нагрузки в результате расчета на сосредоточенную нагрузку двухслойной трубчатой кости. Работа [6] посвящена изучению виброизоляции ограждений в виде тонких пластин в твердой упругой среде. В [7] исследуется задача определения предельной нагрузки для кольцевой трехслойной пластинки, средний слой которой армирован четырьмя слоями волокон. В статьях [8–9] рассмотрен цилиндрический изгиб прямоугольных трехслойных пластин с несжимаемым заполнителем, в том числе при терморadiационном воздействии.

В настоящей статье исследован изгиб прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем, слои которой проявляют упругопластические свойства.

Постановка задачи. Рассмотрим несимметричную по толщине трехслойную пластину со сжимаемым заполнителем, несущие слои которой выполнены из упругопластического материала, а заполнитель — нелинейно упругий. Несущие слои пластины воспринимают основную часть механической нагрузки, поэтому они выполняются из материалов высокой прочности и жесткости. Заполнитель в пластине необходим для образования монолитной конструкции, а также для перераспределения усилий между несущими слоями, тем самым гарантируя совместную работу всех слоев пластины.

Полагаем, что в изотропных несущих несжимаемых слоях приняты гипотезы Кирхгофа. В жестком сжимаемом заполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты z . На границах контакта перемещения непрерывны. Деформации малые. Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью заполнителя (рисунок 1). На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительно сдвигу слоев. К внешней поверхности первого несущего слоя приложена произвольная распределенная нагрузка, проекции которой на координатные оси: $q(x, y), p_x(x, y), p_y(x, y)$.

Продольные перемещения $u^{(k)}(x, y, z)$ и прогибы $w^{(k)}(x, y, z)$ в слоях выразим через искомые функции $w_1(x, y), w_2(x, y), u_{1x}(x, y), u_{1y}(x, y), u_{2x}(x, y), u_{2y}(x, y)$ следующими соотношениями ($k = 1, 2, 3$):

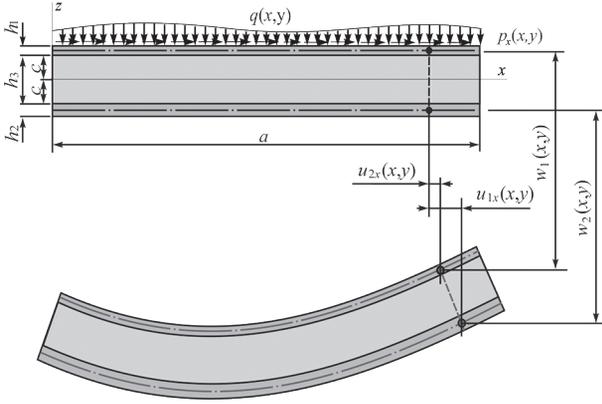


Рисунок 1 — Расчетная схема трехслойной пластины

- в несущих слоях:

$$\begin{aligned}
 u_x^{(1)} &= u_{1x} - \left(z - c - \frac{h_1}{2} \right) w_{1,x}, \quad w^{(1)} = w_1, \\
 u_y^{(1)} &= u_{1y} - \left(z - c - \frac{h_1}{2} \right) w_{1,y}, \quad (c \leq z \leq c + h_1); \\
 u_x^{(2)} &= u_{2x} - \left(z + c + \frac{h_2}{2} \right) w_{2,x}, \quad w^{(2)} = w_2, \\
 u_y^{(2)} &= u_{2y} - \left(z + c + \frac{h_2}{2} \right) w_{2,y}, \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c);
 \end{aligned}$$

- в заполнителе ($-c \leq z \leq c$)

$$\begin{aligned}
 u_x^{(3)} &= \left(1 + \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u_{1x} + \frac{h_1}{4} w_{1,x} \right) + \left(1 - \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u_{2x} - \frac{h_2}{4} w_{2,x} \right), \\
 u_y^{(3)} &= \left(1 + \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u_{1y} + \frac{h_1}{4} w_{1,y} \right) + \left(1 - \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u_{2y} - \frac{h_2}{4} w_{2,y} \right), \quad (1) \\
 w^{(3)} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{c} \right) w_1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{c} \right) w_2,
 \end{aligned}$$

где z — расстояние от рассматриваемого волокна до срединной линии заполнителя; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Уравнения равновесия рассматриваемой трехслойной пластины получим, используя вариационный принцип Лагранжа:

$$\delta A = \delta W, \quad (2)$$

где δA , δW — вариации работы внешней и внутренней сил.

Вариация работы внешней поверхностной нагрузки:

$$\begin{aligned}
 \delta A &= \iint_S (p_x (\delta u_{1x} - \frac{h_1}{2} \delta w_{1,x}) + \\
 &+ p_y (\delta u_{1y} - \frac{h_1}{2} \delta w_{1,y}) + q \delta w_1) dx dy.
 \end{aligned}$$

Вариация работы внутренних сил упругости:

$$\begin{aligned}
 \delta W &= \iint_S \left\{ \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_{xx}^{(k)} \delta \varepsilon_{xx}^{(k)} + \sigma_{yy}^{(k)} \delta \varepsilon_{yy}^{(k)} + 2\sigma_{xy}^{(k)} \delta \varepsilon_{xy}^{(k)}) dz + \right. \\
 &+ 2 \int_{h_3} (\sigma_{xz}^{(3)} \delta \varepsilon_{xz}^{(3)} + \sigma_{yz}^{(3)} \delta \varepsilon_{yz}^{(3)} + \sigma_{zz}^{(3)} \delta \varepsilon_{zz}^{(3)}) dz \left. \right\} dx dy. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Для упругопластической пластины применим физические уравнения состояния, которые соответствуют теории малых упругопластических деформаций:

$$\begin{aligned}
 s_{ij}^{(k)} &= 2G_k \left(1 - \omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}) \right) \varepsilon_{ij}^{(k)}, \quad (4) \\
 \sigma^{(k)} &= 3K_k \varepsilon^{(k)} \quad (i, j = x, y, z, \quad k = 1, 2, 3),
 \end{aligned}$$

где $s_{ij}^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ — девиаторная и шаровая части тензора напряжений; $\varepsilon_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ — девиаторная и шаровая части тензора деформаций; $\varepsilon_u^{(k)}$ — интенсивность деформации в k -м слое; $\omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)})$ — функции пластичности Ильюшина в несущих слоях; $\omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)})$ — универсальная функция, описывающая физическую нелинейность материала заполнителя; G_k , K_k — сдвиговой и объемный модули упругости материалов.

В тензоре напряжений соотношения (4) выделим упругие (с индексом «0») и нелинейные (с индексом « ω ») слагаемые:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij}^{(k)} &= \sigma_{ij}^{(k)0} - \sigma_{ij}^{(k)\omega}, \quad (5) \\
 \sigma_{ij}^{(k)0} &= 2G_k \varepsilon_{ij}^{(k)} + 3K_k \varepsilon^{(k)} \delta_{ij}; \quad \sigma_{ij}^{(k)\omega} = 2G_k \omega^{(k)} \varepsilon_{ij}^{(k)}.
 \end{aligned}$$

Выразим вариации деформаций и напряжения в (3) через искомые функции u_{1x} , u_{2x} , u_{1y} , u_{2y} , w_1 , w_2 с помощью (4), (5). Проведем интегрирование по толщине слоев с учетом (1). Подставив полученное выражение в (2), имеем уравнения равновесия в перемещениях прямоугольной трехслойной пластины. Так как точное решение системы нелинейных дифференциальных уравнений получить не удалось, то применим метод «упругих» решений Ильюшина [10]. Данный метод позволяет сводить краевую задачу последовательно на каждом шаге приближения к соответствующей линейной задаче теории упругости с дополнительными «внешними» нагрузками. В итерационном виде система уравнений равновесия имеет вид:

$$\begin{aligned}
 &a_1 u_{1x}'' - a_1 u_{2x}'' - a_4 u_{1x}''{}_{,xx} - a_5 u_{2x}''{}_{,xx} - a_{19} u_{1x}''{}_{,yy} - a_{18} u_{2x}''{}_{,yy} - \\
 &- a_{21} u_{1y}''{}_{,xy} - a_{23} u_{2y}''{}_{,xy} + a_2 w_1''{}_{,x} + a_3 w_2''{}_{,x} - 2a_{24} w_1''{}_{,xyy} + \\
 &+ a_{25} w_2''{}_{,xyy} - 2a_6 w_1''{}_{,xxx} + a_7 w_2''{}_{,xxx} = p_x + p_\omega^{n-1}; \\
 &- a_1 u_{1x}'' + a_1 u_{2x}'' - a_5 u_{1x}''{}_{,xx} - a_9 u_{2x}''{}_{,xx} - a_{18} u_{1x}''{}_{,yy} - a_{20} u_{2x}''{}_{,yy} - \\
 &- a_{23} u_{1y}''{}_{,xy} - a_{22} u_{2y}''{}_{,xy} - a_{10} w_1''{}_{,x} - a_{17} w_2''{}_{,x} - a_{24} w_1''{}_{,xyy} + \\
 &+ 2a_{25} w_2''{}_{,xyy} - a_6 w_1''{}_{,xxx} + 2a_7 w_2''{}_{,xxx} = s_\omega^{n-1}; \\
 &a_1 u_{1y}'' - a_1 u_{2y}'' - a_4 u_{1y}''{}_{,yy} - a_5 u_{2y}''{}_{,yy} - a_{19} u_{1y}''{}_{,xx} - a_{18} u_{2y}''{}_{,xx} - \\
 &- a_{21} u_{1x}''{}_{,xy} - a_{23} u_{2x}''{}_{,xy} + a_2 w_1''{}_{,y} + a_3 w_2''{}_{,y} - 2a_{24} w_1''{}_{,xyy} + \\
 &+ a_{25} w_2''{}_{,xyy} - 2a_6 w_1''{}_{,yyy} + a_7 w_2''{}_{,yyy} = p_y + h_\omega^{n-1}; \\
 &- a_1 u_{1y}'' + a_1 u_{2y}'' - a_5 u_{1y}''{}_{,yy} - a_9 u_{2y}''{}_{,yy} - a_{18} u_{1y}''{}_{,xx} - a_{20} u_{2y}''{}_{,xx} - \\
 &- a_{23} u_{1x}''{}_{,xy} - a_{22} u_{2x}''{}_{,xy} - a_{10} w_1''{}_{,y} - a_{17} w_2''{}_{,y} - a_{24} w_1''{}_{,xyy} + \\
 &+ 2a_{25} w_2''{}_{,xyy} - a_6 w_1''{}_{,yyy} + 2a_7 w_2''{}_{,yyy} = r_\omega^{n-1};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -a_2 u_{1x}^n - a_2 u_{1y}^n + a_{10} u_{2x}^n + a_{10} u_{2y}^n + 2a_6 u_{1x}^n + \\
 & + a_6 u_{2x}^n + 2a_6 u_{1y}^n + a_6 u_{2y}^n + 2a_{24} u_{1x}^n + \\
 & + a_{24} u_{2x}^n + 2a_{24} u_{1y}^n + a_{24} u_{2y}^n + a_{11} w_1^n + \\
 & + a_{11} w_1^n - a_{12} w_2^n - a_{12} w_2^n + a_{15} w_1^n + \\
 & + a_{15} w_1^n - a_{16} w_2^n - a_{16} w_2^n + a_{26} w_1^n - \\
 & - a_{28} w_2^n + a_8 w_1^n - a_8 w_2^n = q + \frac{p_x \cdot h_1}{2} + \frac{p_y \cdot h_1}{2} + q_{\omega}^{n-1}; \\
 & -a_3 u_{1y}^n - a_3 u_{1x}^n + a_{17} u_{2y}^n + a_{17} u_{2x}^n - a_7 u_{1y}^n - \\
 & - a_7 u_{1x}^n - 2a_7 u_{2y}^n - 2a_7 u_{2x}^n - 2a_{27} u_{1y}^n - \\
 & - 2a_{25} u_{1x}^n - 2a_{25} u_{2x}^n - a_{25} u_{1x}^n - a_{12} w_1^n - \\
 & - a_{12} w_1^n + a_{14} w_2^n + a_{14} w_2^n - a_{16} w_1^n - \\
 & - a_{16} w_1^n + a_{13} w_2^n + a_{13} w_2^n - a_{28} w_1^n + \\
 & + a_{27} w_2^n - a_8 w_1^n + a_8 w_2^n = g_{\omega}^{n-1},
 \end{aligned} \tag{6}$$

где a_1, \dots, a_{28} — коэффициенты, введенные ранее в [11] для упругой пластины; слагаемые с индексом « ω » в (6) включают все нелинейные добавки.

В качестве граничных условий примем кинематические условия свободного опирания рассматриваемой упругопластической пластины по торцам на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Получим граничные условия в перемещениях ($k = 1, 2$):

$$\begin{aligned}
 & \text{при } x = 0, a \quad u_{kx}^n = u_{ky}^n = w_k^n = w_{k,xx}^n = 0; \\
 & \text{при } y = 0, b \quad u_{ky}^n = u_{kx}^n = w_k^n = w_{k,yy}^n = 0,
 \end{aligned} \tag{7}$$

где k — номер слоя, n — номер приближения.

Решение системы дифференциальных уравнений (6) предполагаем в виде разложения в тригонометрические ряды, которые автоматически удовлетворяют граничным условиям (7):

$$\begin{aligned}
 u_{1x}^n &= \sum_{p,m=0}^{\infty} U_{1xpm}^n \cos \frac{\pi p x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}; \\
 u_{2x}^n &= \sum_{p,m=0}^{\infty} U_{2xpm}^n \cos \frac{\pi p x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}; \\
 u_{1y}^n &= \sum_{p,m=0}^{\infty} U_{1ypm}^n \sin \frac{\pi p x}{a} \cos \frac{\pi m y}{b}; \\
 u_{2y}^n &= \sum_{p,m=0}^{\infty} U_{2ypm}^n \sin \frac{\pi p x}{a} \cos \frac{\pi m y}{b}; \\
 w_1^n &= \sum_{p,m=0}^{\infty} W_{1pm}^n \sin \frac{\pi p x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}; \\
 w_2^n &= \sum_{p,m=0}^{\infty} W_{2pm}^n \sin \frac{\pi p x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b},
 \end{aligned} \tag{8}$$

где $U_{1xpm}^n, U_{2xpm}^n, U_{1ypm}^n, U_{2ypm}^n, W_{1pm}^n, W_{2pm}^n$ — неизвестные амплитуды перемещений на n -м шаге.

Внешнюю и дополнительную нагрузки представим в виде разложения в следующие тригонометрические ряды:

$$\begin{aligned}
 q &= \sum_{p,m=0}^{\infty} q_{pm} \sin \frac{\pi p x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}; \\
 q_{pm} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{\pi p x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b} dx dy; \\
 p_{\omega}^{n-1} &= \sum_{p,m=0}^{\infty} p_{\omega pm}^{n-1} \cos \frac{\pi p x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}; \\
 p_{\omega pm}^{n-1} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p_{\omega}^{n-1}(x, y) \cos \frac{\pi p x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b} dx dy; \\
 s_{\omega}^{n-1} &= \sum_{p,m=0}^{\infty} s_{\omega pm}^{n-1} \cos \frac{\pi p x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}; \\
 s_{\omega pm}^{n-1} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b s_{\omega}^{n-1}(x, y) \cos \frac{\pi p x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b} dx dy; \\
 h_{\omega}^{n-1} &= \sum_{p,m=0}^{\infty} h_{\omega pm}^{n-1} \sin \frac{\pi p x}{a} \cos \frac{\pi m y}{b}; \\
 h_{\omega pm}^{n-1} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b h_{\omega}^{n-1}(x, y) \sin \frac{\pi p x}{a} \cos \frac{\pi m y}{b} dx dy; \\
 r_{\omega}^{n-1} &= \sum_{p,m=0}^{\infty} r_{\omega pm}^{n-1} \sin \frac{\pi p x}{a} \cos \frac{\pi m y}{b}; \\
 r_{\omega pm}^{n-1} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b r_{\omega}^{n-1}(x, y) \sin \frac{\pi p x}{a} \cos \frac{\pi m y}{b} dx dy; \\
 q_{\omega}^{n-1} &= \sum_{p,m=0}^{\infty} q_{\omega pm}^{n-1} \sin \frac{\pi p x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}; \\
 q_{\omega pm}^{n-1} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q_{\omega}^{n-1}(x, y) \sin \frac{\pi p x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b} dx dy; \\
 g_{\omega}^{n-1} &= \sum_{p,m=0}^{\infty} g_{\omega pm}^{n-1} \sin \frac{\pi p x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}; \\
 g_{\omega pm}^{n-1} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b g_{\omega}^{n-1}(x, y) \sin \frac{\pi p x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b} dx dy.
 \end{aligned} \tag{9}$$

После подстановки перемещений (8), нагрузок (9) в систему (6) получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для нахождения искомого амплитуд перемещений $U_{1xpm}^n, U_{2xpm}^n, U_{1ypm}^n, U_{2ypm}^n, W_{1pm}^n, W_{2pm}^n$:

$$\begin{aligned}
 & b_1 U_{1xpm}^n + b_2 U_{2xpm}^n + b_{11} U_{1ypm}^n + b_{12} U_{2ypm}^n + b_3 W_{1pm}^n + b_4 W_{2pm}^n = p_{\omega pm}^{n-1}; \\
 & b_2 U_{1xpm}^n + b_3 U_{2xpm}^n + b_{12} U_{1ypm}^n + b_{13} U_{2ypm}^n + b_6 W_{1pm}^n + b_7 W_{2pm}^n = s_{\omega pm}^{n-1}; \\
 & b_{11} U_{1xpm}^n + b_{12} U_{2xpm}^n + b_{14} U_{1ypm}^n + b_{15} U_{2ypm}^n + b_{16} W_{1pm}^n + b_{17} W_{2pm}^n = h_{\omega pm}^{n-1}; \\
 & b_{12} U_{1xpm}^n + b_{13} U_{2xpm}^n + b_{15} U_{1ypm}^n + b_{18} U_{2ypm}^n + b_{19} W_{1pm}^n + b_{20} W_{2pm}^n = r_{\omega pm}^{n-1}; \\
 & b_3 U_{1xpm}^n + b_6 U_{2xpm}^n + b_{16} U_{1ypm}^n + b_{19} U_{2ypm}^n + b_8 W_{1pm}^n + b_9 W_{2pm}^n = q_{\omega pm}^{n-1} + q_{\omega pm}^{n-1}; \\
 & b_4 U_{1xpm}^n + b_7 U_{2xpm}^n + b_{17} U_{1ypm}^n + b_{20} U_{2ypm}^n + b_9 W_{1pm}^n + b_{10} W_{2pm}^n = g_{\omega pm}^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты b_i выражаются через величины a_i , зависят от параметров p и m и вычисляются по формулам, введенным в [12].

Численные результаты. Для численной реализации полученного решения разработан комплекс компьютерных программ на базе пакета MathCAD, с помощью которого был проведен параметрический анализ деформирования пластины.

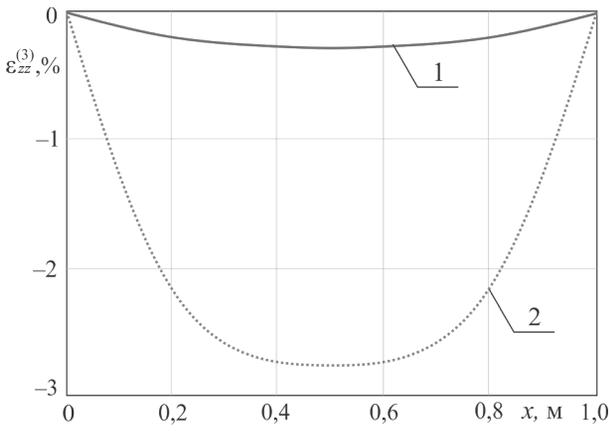


Рисунок 2 — Относительная деформация заполнителя

В качестве материалов несущих слоев и заполнителя принимались Д16Т–фторопласт–Д16Т. Размеры пластины: $a = 1$ м, $b = 1$ м, $h_1 = 0,04$ м, $h_2 = 0,02$ м, $h_3 = 0,2$ м. Нагрузка с интенсивностью $q = 20$ МПа равномерно распределена по всей поверхности первого несущего слоя пластины.

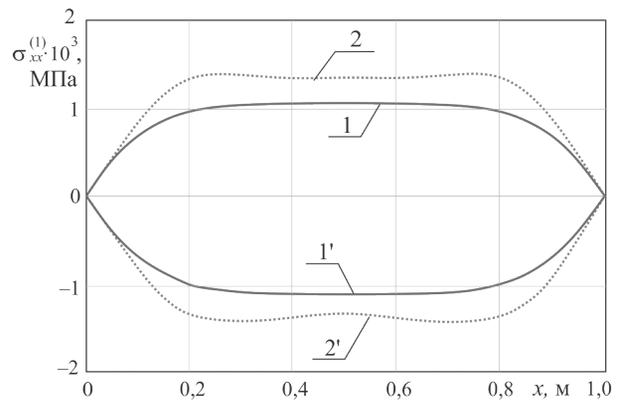
На рисунке 2 представлена величина относительной деформации заполнителя $\varepsilon_{zz}^{(3)}$ вдоль оси x ($y = 0,5$ м). Упругая пластина соответствует 1, упругопластическая пластина — 2. Учет физической нелинейности заполнителя и пластичности материалов внешних слоев приводит к увеличению обжатия в 10,8 раз.

Распределение нормальных напряжений $\sigma_{xx}^{(1)}$ во внешнем несущем слое вдоль оси x ($y = 0,5$ м) показано на рисунке 3 а. Кривые без штриха соответствуют напряжениям на поверхности склейки этого слоя с заполнителем $z = c$, со штрихом — 1', 2' — напряжениям на внешней поверхности $z = c + h_1$. При учете пластических и физически нелинейных свойств материалов слоев напряжения увеличиваются на внешней поверхности на 15,7%, а на поверхности склейки слоя с заполнителем увеличиваются на 21,3%.

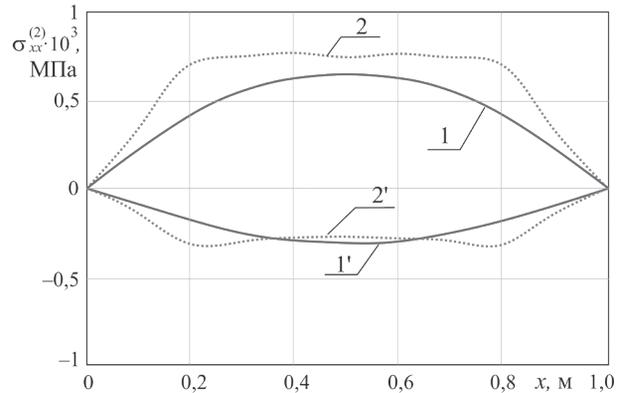
Рисунок 3 б показывает распределение нормальных напряжений во втором несущем слое $\sigma_{xx}^{(2)}$. Кривые без штриха соответствуют напряжениям на внешней поверхности $z = -c - h_2$, со штрихом — 1', 2' — напряжениям на поверхности склейки слоя с заполнителем $z = -c$. На внешней поверхности второго несущего слоя напряжения увеличились, максимальная разность составляет 18,7%. На поверхности склейки этого слоя с заполнителем напряжения возрастают на расстоянии 0,2 и 0,8 м, а в середине сечения незначительно уменьшаются.

Изменение продольных $\sigma_{xx}^{(3)}$ и поперечных $\sigma_{zz}^{(3)}$ напряжений в заполнителе показано на рисунке 4 а, б соответственно. Кривые без штриха соответствуют напряжениям в склейке со вторым слоем $z = -c$, со штрихом — напряжениям в склейке с первым слоем $z = c$.

В склейке со вторым слоем в обоих случаях наблюдается рост напряжений по модулю при уче-

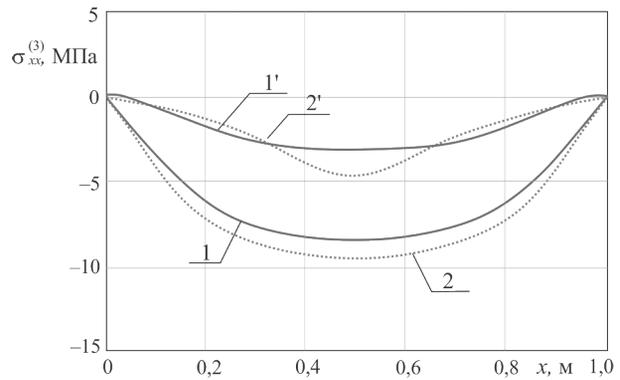


а

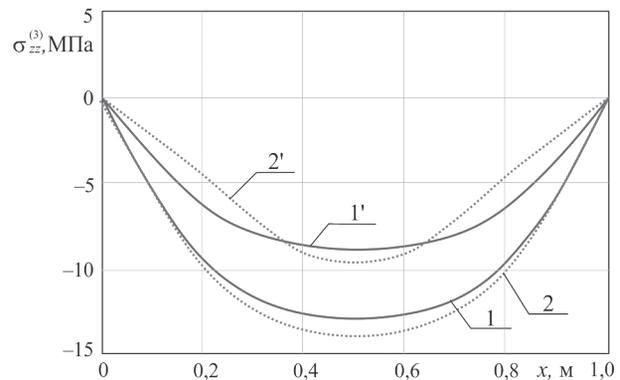


б

Рисунок 3 — Продольные напряжения в несущих слоях упругой и упругопластической пластины



а



б

Рисунок 4 — Напряжения в заполнителе упругой и упругопластической пластины

те пластических и физически нелинейных свойств материалов и составляют 7,3% для напряжений $\sigma_{xx}^{(3)}$, 9,2% — для поперечных напряжений $\sigma_{zz}^{(3)}$. Напряжения в склейке с первым слоем, напротив, в обоих случаях увеличиваются по модулю в центре сечения: на 11,5% — для продольных напряжений $\sigma_{xx}^{(3)}$ и 8,6% — для поперечных.

Заключение. В работе получено аналитическое решение изгиба прямоугольных трехслойных пластин со сжимаемым нелинейно-упругим наполнителем. Проведен численный анализ полученных итерационных решений, показавший, что учет пластических свойств материалов слоев вносит ощутимый вклад в напряженно-деформированное состояние пластины.

Работа выполнена в рамках ГПНИ «Механика, металлургия диагностика в машиностроении» (задание № 1.40).

Обозначения

$q(x, y)$ — внешняя произвольная вертикальная распределенная нагрузка;
 $p_x(x, y), p_y(x, y)$ — внешняя произвольная горизонтальная нагрузка;
 x, y, z — система координат;
 w_1, w_2 — прогибы несущих слоев пластины;
 $u_{1x}, u_{2x}, u_{1y}, u_{2y}$ — горизонтальные перемещения срединной поверхности несущих слоев;
 G_k, K_k — модули сдвига и объемной деформации;
 k — номер слоя;
 a, b — длина и ширина пластины;
 $h_1, h_2, h_3 = 2c$ — толщины слоев;
 z — расстояние от рассматриваемого волокна до срединной линии наполнителя;
 δA — вариация работы внешних сил;
 δW — вариация работы сил упругости;
 $s_{ij}^{(k)}, \sigma^{(k)}$ — девиаторная и шаровая часть тензора напряжений;
 $\varepsilon_{ij}^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$ — девиаторная и шаровая часть тензора деформаций;
 $\varepsilon_u^{(k)}$ — интенсивность деформации в k -м слое;
 $\omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)})$ — функции пластичности Ильюшина в несущих слоях;
 $\omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)})$ — универсальная функция, описывающая физическую нелинейность материала наполнителя;

$\sigma_{ij}^{(k)0}$ — упругая часть, входящая в шаровую часть тензора напряжений;

$\sigma_{ij}^{(k)\omega}$ — нелинейная часть, входящая в шаровую часть тензора напряжений;

n — номер приближения;

$U_{1xpm}^n, U_{2xpm}^n, U_{1ypm}^n, U_{2ypm}^n, W_{1pm}^n, W_{2pm}^n$ — амплитуды перемещений на n -м шаге.

Список литературы

1. Болотин, В.В. Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. — М.: Машиностроение, 1980. — 375 с.
2. Старовойтов, Э.И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э.И. Старовойтов. — Гомель: БелГУТ, 2002. — 344 с.
3. Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 379 с.
4. Старовойтов, Э.И. Трехслойные стержни в терморadiaционных полях / Э.И. Старовойтов, М.А. Журавков, Д.В. Леоненко. — Минск: Беларус. навука, 2017. — 275 с.
5. Чигарев, А.В. Исследование моделей многослойных частей человека на прочность при нагружении / А.В. Чигарев, А.В. Борисов // Механика машин, механизмов и материалов. — 2009. — № 1(1). — С. 85–87.
6. Василевич, Ю.В. Метод расчета эффективности виброизоляции однослойного и многослойного ограждений в твердой упругой среде / Ю.В. Василевич, В.В. Неумержицкий // Механика машин, механизмов и материалов. — 2009. — № 1(1). — С. 56–58.
7. Джагангиров, А.А. Предельная нагрузка кольцевой трехслойной пластинки, внутренний слой которой армирован четырьмя слоями волокон / А.А. Джагангиров // Механика машин, механизмов и материалов. — 2017. — № 4(41). — С. 96–100.
8. Доровская, Е.П. Цилиндрический изгиб прямоугольной трехслойной упругопластической пластины на деформируемом основании / Е.П. Доровская // Материалы, технологии, инструменты. — 2007. — Т. 12, № 3. — С. 6–11.
9. Старовойтов, Э.И. Цилиндрический изгиб прямоугольной трехслойной пластины в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки: междунар. сб. науч. тр. — Гомель, 2014. — Вып. 8. — С. 179–185.
10. Ильюшин, А.А. Упругопластические деформации полых цилиндров / А.А. Ильюшин, П.М. Огибалов. — М.: Изд-во МГУ, 1960. — 224 с.
11. Зеленая, А.С. Изгиб упругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем [Электронный ресурс] / А.С. Зеленая // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. — 2017. — № 3. — Режим доступа: mathmod.esrae.ru/15-52. — Дата доступа: 08.12.2017.
12. Зеленая, А.С. Напряженно-деформированное состояние упругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым наполнителем / А.С. Зеленая // Механика. Исследования и инновации: междунар. сб. науч. тр. / БелГУТ. — Гомель, 2017. — Вып. 10. — С. 67–74.

LEONENKO Denis V., D. Sc. in Phys. and Math., Assoc. Prof.

Professor of the Department “Structural Mechanics”¹

E-mail: leoden@tut.by

ZELENAYA Anastasiya S., Mas. Techn. Sc.

Post-Graduate Student of the Department “Structural Mechanics”¹

E-mail: anastasiya.zelenaya@tut.by

¹Belarusian State University of Transport, Gomel, Republic of Belarus

STRESS-STRAIN STATE OF A PHYSICALLY NON-LINEAR THREE-LAYER RECTANGULAR PLATE WITH A COMPRESSED FILLER

The stress-strain state of physically nonlinear asymmetric three-layer rectangular plates with a compressed filler was studied. For outer layers Kirchhoff's hypotheses are accepted, the deformed normal remains rectilinear in a rigid compressible filler. Ilyushin's "elastic" solutions method was used while solving the issue. Numerical results for a three-layer metal-polymer plate are presented.

Keywords: three-layer rectangular plate, compressed filler, plasticity, stress-strain state

References

1. Bolotin V.V., Novichkov Yu.N. *Mekhanika mnogosloynnykh konstruksiy* [Mechanics of Layered Structures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1980. 375 p.
2. Starovoytov E.I. *Vyazkoupругoplasticheskie sloistye plastiny i obolochki* [Viscoelastoplastic laminated plates and shells]. Gomel, Belarusian state university of transport Publ., 2002. 344 p.
3. Starovoytov E.I., Yarovaya A.V., Leonenko D.V. *Deformirovanie trekhsloynnykh elementov konstruksiy na uprugom osnovanii* [Deformation of three-layer construction elements on the elastic foundation]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2006. 379 p.
4. Starovoytov E.I., Zhuravkov M.A., Leonenko D.V. *Trekhsloynnye sterzhni v termoradiatsionnykh polyakh* [Three-layer bars in thermoradiation fields]. Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 2017. 275 p.
5. Chigarev A.V., Borisov A.V. Issledovanie modeley mnogosloynnykh kostey cheloveka na prochnost pri nagruzhении [Strength models of multilayer human bones by loading]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2009, no. 1(1), pp. 85–87.
6. Vasilevich Yu.V., Neumerzhitskiy V.V. Metod rascheta effektivnosti vibroizolyatsii odnosloynnogo i mnogosloynnogo ograzhdeniy v tverdoy uprugoy srede [Calculating method of vibrating insulation efficiency of single and multi-layer enclosures in solid elastic medium]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2009, no. 1(1), pp. 56–58.
7. Dzhagangirov A.A. Predelnaya nagruzka koltsevoy trekhsloynnoy plastinki, vnutrenniy sloy kotoroy armirovan chetyrmya sloyami volokon [Limiting load of circular three-layer plate with a fiber-reinforced middle layer]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2017, no. 4(41), pp. 96–100.
8. Dorovskaya E.P. Tsilindricheskii izgib pryamougolnoy trekhsloynnoy uprugoplasticheskoy plastiny na deformiruemom osnovanii [Cylindrical bending of a rectangular three-layer elastoplastic plate on a deformable base]. *Materialy, tekhnologii, instrumenty* [Materials, technologies, tools], 2007, vol. 12, no. 3, pp. 6–11.
9. Starovoytov E.I., Leonenko D.V. Tsilindricheskii izgib pryamougolnoy trekhsloynnoy plastiny v temperaturnom pole [Cylindrical bending of rectangular sandwich plates in the temperature field]. *Trudy BelGUT "Mekhanika. Nauchnye issledovaniya i uchebno-metodicheskie razrabotki"* [Proc. of the BelSUT "Mechanics. Scientific researches and educational-methodical developments"], 2014, vol. 8, pp. 179–185.
10. Ilyushin A.A., Ogibalov P.M. *Uprugoplasticheskie deformatsii polykh tsilindrov* [Elastoplastic deformations of hollow cylinders]. Moscow, Moscow state university Publ., 1960. 224 p.
11. Zelenaya A.S. Izgib uprugoy trekhsloynnoy pryamougolnoy plastiny so szhimaemym zapolnitelem [Bending of an elastic three-layer rectangular plate with a compressible filler]. *Matematicheskoe modelirovanie, kompyuternyy i naturnyy eksperiment v estestvennykh naukakh* [Mathematical modeling, computer and natural experiment in the natural sciences], 2017, no. 3. Available at: mathmod.esrae.ru/15-52 (accessed 08 December 2017).
12. Zelenaya A.S. Napryazhenno-deformirovanoe sostoyanie uprugoy trekhsloynnoy pryamougolnoy plastiny so szhimaemym zapolnitelem [Stress-strain state of the elastic three-layer plate with the compressible filler]. *Trudy BelGUT "Mekhanika. Issledovaniya i innovatsii"* [Proc. of the BelSUT "Mechanics. Research and Innovation"], 2017, vol. 10, pp. 67–74.