

УДК 621.01

Г.А. ГЕВОРКЯН, канд. техн. наук

научный сотрудник

E-mail: hrgevorkian@mail.ru

Институт механики НАН Республики Армения, г. Ереван, Республика Армения

Поступила в редакцию 27.12.2017.

РАСЧЕТ ПРОГИБОВ ТОНКИХ ЖЕСТКИХ ОБОЛОЧЕК НА ОСНОВЕ МКЭ БЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ГИПОТЕЗЫ КИРХГОФА

В предлагаемой статье на основе плоско-пространственной задачи МКЭ развивается методика определения прогибов тонких жестких оболочек без использования гипотезы Кирхгофа; в силу геометрических свойств матрицы жесткости треугольного конечного элемента формируется тензор жесткости при изгибе. Формулируются линейная и нелинейная разновидности плоско-пространственной задачи МКЭ для определения малых упругих прогибов тонкостенных оболочек. Приводится пример расчета фрагмента пологой конической оболочки в соответствии с общепринятыми принципами дискретизации двумерных областей и некоторыми элементами фрактальной геометрии.

Ключевые слова: метод конечных элементов, антиплоский сдвиг, плоско-пространственная задача, гипотеза Кирхгофа, жесткость при изгибе, тензор жесткости, фрактальная геометрия, фрагмент оболочки

Введение. В работах [1–3] сформулирована и обоснована плоско-пространственная задача МКЭ применительно к эффективному численному анализу, без учета гипотезы Кирхгофа, тонких жестких пластинок, находящихся под действием равномерно распределенной нагрузки. Как показывают результаты предыдущих исследований [3], предлагаемая методика позволяет существенно повысить точность и упростить процесс моделирования вышеотмеченного класса задач с участием указанного типа деформируемых элементов конструкций по отношению к существующим расчетным методам и к другим модификациям МКЭ [4–12]. Как отмечалось в публикации [3], лучшим свидетельством актуальности применения нововведенной разновидности МКЭ является отсутствие таковой в работах классических [4, 5] и современных [6–10] авторов применительно к расчету прогибов тонких жестких пластин и оболочек. Между тем иные подходы к точному исследованию тонких пластин и оболочек, как, например, модели, основанные на гипотезе Тимошенко–Рейсснера [11, 12], во многом превосходят по сложности формализм плоско-пространственной задачи МКЭ. В силу вышеизложенного подтверждается актуальность развития новой модификации МКЭ в целях возможного определения прогибов тонких жестких оболочек.

Итак, целью настоящей работы является расширение плоско-пространственной задачи антиплоского сдвига МКЭ, сформулированной ранее для тонких жестких пластинок, на случай тонких жестких оболочек.

Адаптирование плоско-пространственной задачи МКЭ к определению малых упругих прогибов тонких жестких оболочек. Как известно [1], система дис-

кретных алгебраических уравнений плоско-пространственной задачи МКЭ, призванная к описанию малых упругих прогибов тонких жестких пластинок, выражается в абсолютной, т. е. единой для всех уравнений, системе координат $Oxuz$:

$$\begin{bmatrix} K^{mm} & K^{mf} \\ K^{fm} & K^{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^m \\ W^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^m \\ Q^f \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $[K]$ — матрица жесткости ансамбля элементов; $[W]$ и $[Q]$ — векторы прогибов и внешних сил, соответственно; индексы m (mobile) и f (fixed) обозначают подвижные и закрепленные степени свободы.

Однако результирующая система дискретных уравнений плоско-пространственной задачи МКЭ применительно к исследованию тонких жестких оболочек записывается в абсолютной системе координат в виде системы векторных уравнений. Следовательно, при переходе к моделированию антиплоским сдвигом тонких жестких оболочек удобнее всего каждое составляющее систему векторное уравнение изначально представить в локальной системе координат, или, что то же самое, спроецировать его на ту из координатных осей (нормаль) (рисунок 1), которая перпендикулярна недеформируемой срединной поверхности тонкой оболочки в конкретно взятой узловой точке l . В итоге получаем эквивалентную (1) систему алгебраических уравнений:

$$\begin{bmatrix} \hat{K}^{mm} & \hat{K}^{mf} \\ \hat{K}^{fm} & \hat{K}^{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{W}^m \\ \hat{W}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Q}^m \\ \hat{Q}^f \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Таким образом, каждое слагаемое алгебраических уравнений системы (2) выражает собой

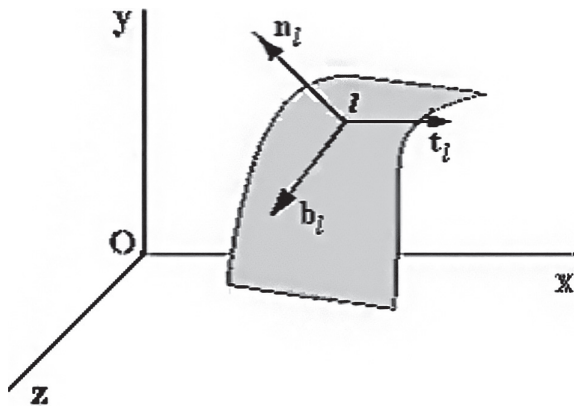


Рисунок 1 — Схема расположения абсолютной и локальной систем координат

проекцию на нормаль локальной системы координат слагаемых векторного уравнения прогибов, выраженного в абсолютной системе отсчета (см. рисунок 1). Понятно, что это направление для всех узлов единственно, потому что априори принимается предположение о жесткости оболочки, т. е. о недеформируемости ее срединной поверхности в смысле растяжения—сжатия.

Предположим, что окрестность узловой точки l (см. рисунок 1) представляет собой плоскую площадку (рисунок 2). Это допущение вовсе не является жестким геометрическим упрощением, поскольку при стягивании к точкам окружающих узел l конечных элементов на рисунке 2 окрестность любой точки произвольной гладкой срединной поверхности оболочки образует плоскую площадку. В таком случае формирование компонент матрицы жесткости вокруг каждой узловой точки производится совершенно аналогично формированию элементов матрицы жесткости для тонкой жесткой пластинки.

Тогда необходимо выяснить, как должны быть направлены в точке l (см. рисунок 1) касательная t и бинормаль b по отношению к нормали n . При этом ориентация локальных осей t и b не влияет на генерацию компонент жесткости.

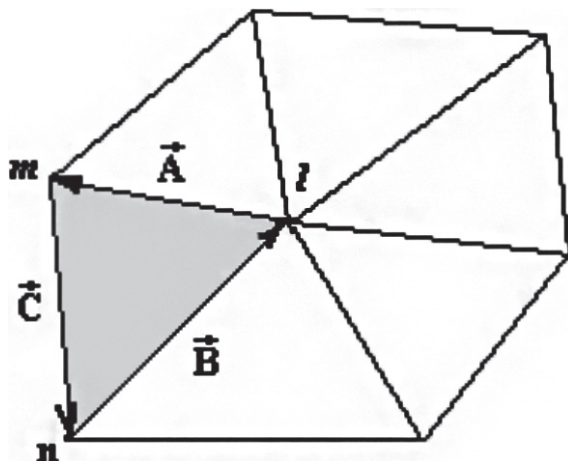


Рисунок 2 — Плоская площадка в окрестности узловой точки

В самом деле, на основании формулы для матрицы жесткости конечного элемента плоско-пространственной задачи МКЭ [1] будем иметь:

$$[K_{lmn}] = GV \begin{bmatrix} c_l^2 + b_l^2 & c_l c_m + b_l b_m & c_l c_n + b_l b_n \\ c_l c_m + b_l b_m & c_m^2 + b_m^2 & c_m c_n + b_m b_n \\ c_l c_n + b_l b_n & c_m c_n + b_m b_n & c_n^2 + b_n^2 \end{bmatrix} = GV \begin{bmatrix} \bar{C}^2 & \bar{C} \cdot \bar{B} & \bar{C} \cdot \bar{A} \\ \bar{B} \cdot \bar{C} & \bar{B}^2 & \bar{B} \cdot \bar{A} \\ \bar{A} \cdot \bar{C} & \bar{A} \bar{B} & \bar{A}^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

причем

$$b_l = \frac{1}{2\Delta}(y_m - y_n) \quad \text{и} \quad c_l = \frac{1}{2\Delta}(x_n - x_m),$$

где x и y — координаты узлов; G — модуль сдвига, а Δ — площадь конечного элемента (lmn); коэффициенты b_m, c_m и b_n, c_n образуются путем круговой перестановки индексов l, m и n в матрице (3). Отсюда следует: во-первых, что компоненты матрицы жесткости не зависят от направления координатных осей n, t и b , поскольку для скалярного произведения, например, для $\bar{B} \cdot \bar{C}$, имеет место в то же время и другая форма записи, а именно: $\bar{B} \cdot \bar{C} = |\bar{B}| |\bar{C}| \cos(\bar{B}, \bar{C})$; во-вторых, что матрица жесткости конечного треугольного элемента (3) представляет собой симметричный тензор изгибной жесткости при стягивании конечного элемента lmn оболочки (пластинки) на рисунке 2 в точку. Действительно, в таком случае матрица жесткости элемента оказывается величиной, определяемой шестью компонентами, которые не зависят от ориентации системы прямоугольных декартовых координатных осей и изменяются при переходе от одной точки срединной поверхности как двумерной сплошной среды к другой.

В силу вышеизложенного вытекает равенство матриц жесткости в системах алгебраических уравнений (1) и (2), т. е. будем иметь:

$$[K] = [\bar{K}]. \quad (4)$$

Рассмотренное выше обобщение (2)–(4) плоско-пространственной задачи МКЭ [1] на случай определения малых упругих прогибов тонких жестких оболочек, невзирая на ряд интересных аналитических следствий, не может выглядеть законченным. В самом деле, до сих пор остается неясным, почему конечные элементы, окружающие узловую точку l , находятся на одной общей плоской площадке, в то время как любые два соседних элемента, воспроизводящих поверхность оболочки, могут лежать в разных плоскостях. Если указанная несообразность выражает некое геометрическое упрощение, то требуется выяснить, какова же его алгебраическая интерпретация.

Нелинейная и линейная разновидности плоско-пространственной задачи МКЭ для расчета прогибов тонких жестких оболочек. Рассмотрим оболочку

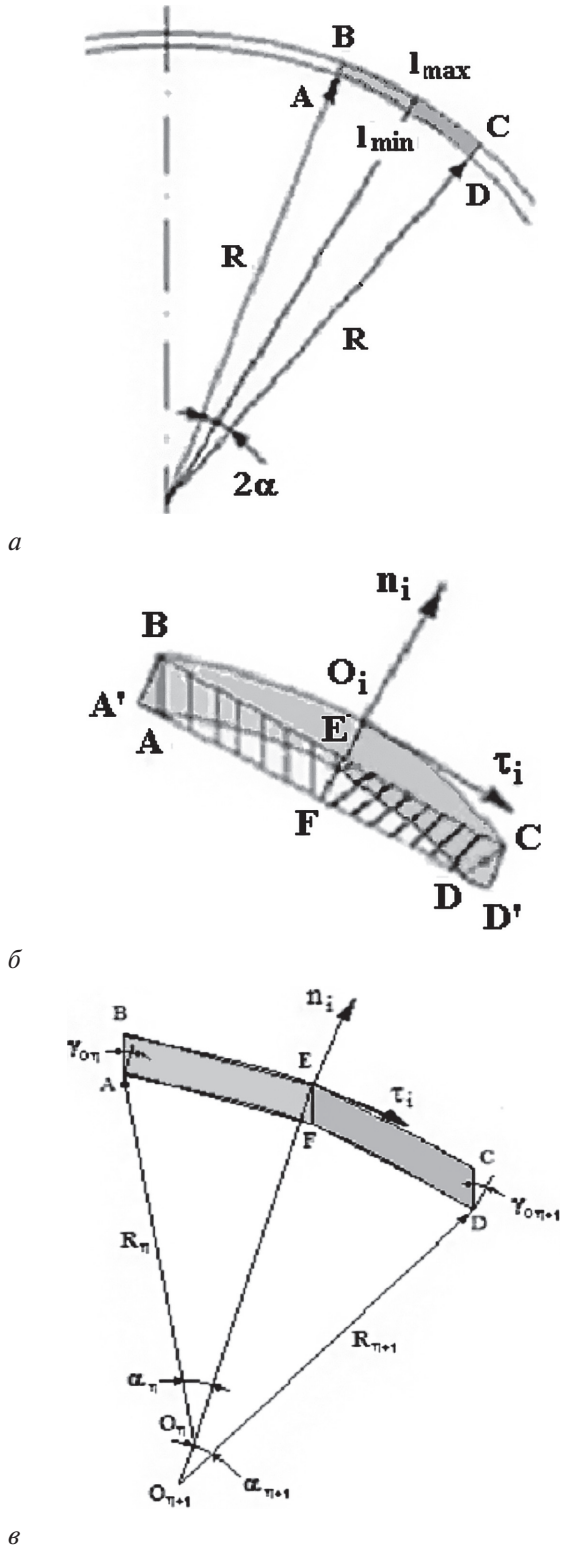


Рисунок 3 — Правила прямоугольников и параллелограммов МКЭ

малой постоянной толщины h (рисунок 3 а), для которой выполняются основные допущения плоско-пространственной задачи МКЭ для тонких пластинок; кроме этого, срединная поверхность оболочки будет полагаться гладкой функцией координат. На этот раз будет проводиться ассимиляция кольцевых секторов профилей сопряженных элементов не с прямоугольниками (см. рисунок 3 б),

как это делалось раньше, а с параллелограммами (см. рисунок 3 в). Эту модель, в отличие от предыдущей (правило прямоугольников МКЭ), будем называть *правилом параллелограммов МКЭ* [13].

Нетрудно догадаться, что углы $\gamma_{0\eta}$, $\eta \in N$ в трактуемой модели представляют собой *начальные угловые деформации*, которым оболочка была предварительно подвергнута [13]. Как видно из рисунка 3, правило параллелограммов не требует постоянства кривизн профилей смежных конечных элементов, однако в то же время накладывает жесткие ограничения на абсолютные значения начальных деформаций, т. е. $|\gamma_{0\eta}| \ll 1$, $\eta \in N$, выражающие *условия постоянства толщины оболочки*. Легко заметить, что нарушение условия постоянства толщины могло бы обуславливаться еще и неким изломом срединной поверхности оболочки, однако эта возможность исключается принятым наперед допущением о ее гладкости.

Итак, задача МКЭ для определения малых упругих прогибов тонкостенных оболочек в точной постановке формулируется следующим образом [13]:

$$[\tilde{K}][\tilde{W}] = [\tilde{P}], \quad (5)$$

где

$$[\tilde{K}] = \begin{bmatrix} \tilde{K} & \tilde{K}\tilde{K} \\ (\tilde{K}\tilde{K})^T & \tilde{K} \end{bmatrix};$$

$$[\tilde{W}] = [\tilde{U}^T, \tilde{W}^T]^T \text{ и } [\tilde{P}] = [\tilde{P}^T, \tilde{P}^T]^T.$$

Как видно из матричного уравнения (5), комбинированная матрица жесткости $[\tilde{K}]$, содержащая в себе матрицу при растяжении–сжатии $[\tilde{K}]$ и при изгибе $[\tilde{K}]$, причем подвекторы $[\tilde{U}]$ и $[\tilde{P}]$ выражают соответственно планарные перемещения и обобщенные силы, здесь уже не является ленточной. Нетрудно удостовериться, что это обстоятельство выступает следствием наличия в математической модели оболочки начальных деформаций $\gamma_{0\eta}$, $\eta \in N$. В самом деле, на основании принципа возможных работ коэффициенты матрицы жесткости $[\tilde{K}]$ определяются [13]:

$$[\tilde{K}\tilde{K}^{rs}] = \Sigma [\tilde{k}\tilde{k}^{rs}], \quad r = 1, \dots, 2n; \quad s = 1, \dots, n, \quad (6)$$

где

$$[\tilde{k}\tilde{k}_\eta^{rs}] = \iiint_{V_\eta} \tau_{\eta xy} [\gamma_\eta] dV = \iiint_{V_\eta} \tau_{\eta xy} [\gamma_{0\eta}] dV =$$

$$= \iiint_{V_\eta} \gamma_{\eta xy} G_{\eta xy} [\gamma_{0\eta}] dV = \iiint_{V_\eta} \gamma_{\eta xy} [\tau_\eta] dV =$$

$$= \iiint_{V_\eta} \gamma_{\eta xy} \begin{bmatrix} G_{\eta yz} & 0 \\ 0 & G_{\eta xz} \end{bmatrix} [\gamma_{0\eta}] dV,$$

причем τ_η и γ_η — касательные напряжения и угол сдвига элемента η , позволяющие в силу малости упругих перемещений ассимиляция $\gamma_\eta \approx \gamma_{0\eta}$, а также

$$[\tau_\eta] = \begin{bmatrix} \tau_{\eta yz} \\ \tau_{\eta xz} \end{bmatrix} \text{ и } [\gamma_{0\eta}] = \begin{bmatrix} \gamma_{0\eta yz} \\ \gamma_{0\eta xz} \end{bmatrix},$$

откуда, в подтверждение правильности проведенных выкладок, вытекает наглядная иллюстрация *изотропии физико-механических свойств однородного конечного элемента*, т. е.

$$G_{\eta\chi\gamma} = G_{\eta\chi\zeta} = G_{\eta\chi\zeta} = G_{\eta}.$$

Теперь, возвращаясь к правилу прямоугольников (см. рисунок 3 б), обнаруживаем, что при $\gamma_{0\eta}$, $\eta \in N$ девиаторные блоки (б) комбинированной матрицы жесткости $[\tilde{K}]$ обнуляются, а задача МКЭ в точной формулировке распадается на плоскую и плоско-пространственную задачи. Назовем сформулированную выше задачу *нелинейной (хотя и линеаризованной) или комплексной задачей МКЭ для определения малых упругих перемещений тонкостенных оболочек*, в отличие от первоначально рассмотренной *линейной задачи МКЭ для определения малых упругих прогибов тонкостенных оболочек*.

Теперь путем исключения в системе линейных матричных уравнений (5) степеней свободы, ответственных за растяжение и сжатие оболочки, представляется возможным сформулировать комплексную или нелинейную плоско-пространственную задачу МКЭ для тонкостенных оболочек, эквивалентную вышеизложенной комплексной задаче МКЭ [13]:

$$[\tilde{K}'][\tilde{W}] = [\tilde{P}'], \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} [\tilde{K}'] &= [\tilde{K}] - [\tilde{K}\tilde{K}]^T [\tilde{K}]^{-1} [\tilde{K}\tilde{K}]; \\ [\tilde{P}'] &= [\tilde{P}] - [\tilde{K}\tilde{K}]^T [\tilde{K}]^{-1} [\tilde{P}^T]. \end{aligned}$$

Подводя итоги представленной математической модели линейной плоско-пространственной задачи МКЭ для тонкостенных оболочек, интересно обратить внимание на то обстоятельство, что формализм плоско-пространственной задачи МКЭ для тонких пластин [1], выраженный в совокупности локальных систем координат $o_i \tau_i b_i$, $i = 1, \dots, n$, оказывается вполне определенным в плоскостях $o_i \tau_i b_i$, $i = 1, \dots, n$. Иначе говоря, предложенная расчетная методика пологих оболочек может быть сформулирована в плоских локальных системах отсчета $o_i \tau_i b_i$, $i = 1, \dots, n$, стало быть, модифицированный формализм плоско-пространственной задачи МКЭ с учетом особенностей (2)–(4) можно квалифицировать как модель с «растворяющейся нормалью», а плоско-пространственную задачу МКЭ для пологих тонкостенных оболочек можно в целом трактовать как *псевдоплоскую задачу МКЭ*.

Отметим в заключение, что линейную и нелинейную плоско-пространственную задачи МКЭ для определения малых упругих прогибов тонкостенных оболочек можно также называть *плоско-пространственными задачами МКЭ для расчета малых упругих прогибов пологих и непологих тонкостенных оболочек* [13].

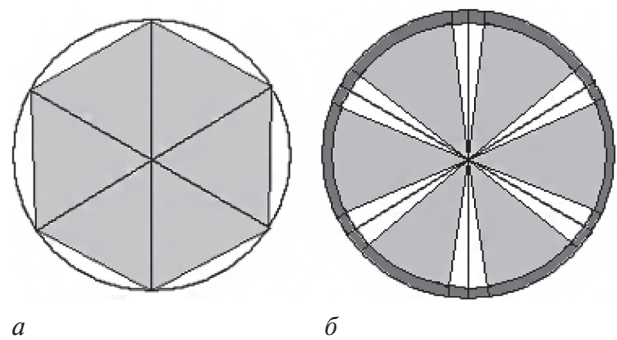


Рисунок 4 — Специфика разбиения плоской и сферической областей

Приложение элементов фрактальной геометрии к МКЭ. Известно, что всякая модель тем эффективней, чем больше она тяготеет к простоте и к подобию входящих в ее состав элементов. Отсюда возникла и успешно стала развиваться новая отрасль геометрии — *фрактальная геометрия* [14], принципиальным атрибутом которой является свойство *самоподобия* фигур, а именно, подобие фигуры ее структурным единицам; притом это подобие предполагается как точным, так и квазиточным [14].

Пусть объектом дискретизации выступает сферическая оболочка, которая, как известно, не является развешиваемой на плоскость поверхностью. Правильный шестиугольник в точности разбивается на шесть правильных треугольников, являющихся случаем правильного *треугольника Серпинского* [14], т. е. *фракталом* (рисунок 4 а). В случае же сферической поверхности для развешивания оболочки на плоскость неизбежно требуется ее рассечение, как, например, это показано на рисунке 4 б; в таком случае каждый из лепестков не будет уже, строго говоря, правильным или неправильным треугольниками Серпинского (рисунок 5 а, б), а окажется *квазифракталом*, или *неправильным квазитреугольником Серпинского*, который при условиях пологости оболочки и симметрии нагрузки относительно ее оси вращения может отождествляться с неправильным треугольником Серпинского (см. рисунок 5 в). В самом деле, как известно [15], при незначительном изменении угла подъема сферическая оболочка может ассимилироваться с конической оболочкой, а последняя при развешивании обеспечивает строгую прямолиней-

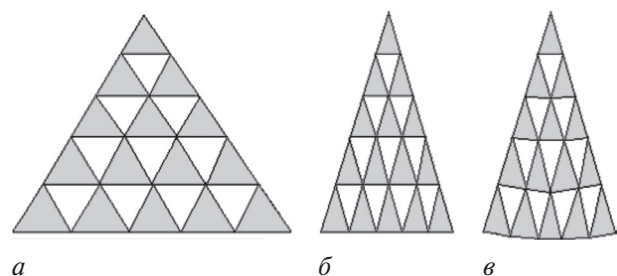


Рисунок 5 — Правильный, неправильный и квазитреугольник Серпинского

ность боковых сторон квазитреугольника. В то же время лепестки рассеченной конической оболочки в точности разворачиваются в круг, радиус которого равен длине образующей (см. рисунок 4 б). Таким образом, становится очевидно, что для полноценного исследования указанного типа тонких пологих оболочек под действием симметричной относительно оси вращения нагрузки достаточно рассмотреть развертку не всего лепестка рассеченной и развернутой на плоскость пологой оболочки, изображенной на рисунке 4 б, а его существенной и предельно элементарной подобласти, ограниченной пределами неправильного треугольника Серпинского (см. рисунок 5 б).

Проводя сравнительную оценку трех рассмотренных выше случаев возможной дискретизации двумерной сплошной среды, замечаем, что в первых двух случаях (см. рисунок 5 а, б) достаточно иметь один-единственный шаблон рассечения структурной единицы на себе подобные для алгоритмизации всего процесса разбиения, независимо от его плотности. В третьем же случае (см. рисунок 5 в) полное самоподобие рассекаемых и рассеченных элементов не сохраняется, что требует создания некоторого конечного числа шаблонов, которое, как это видно из рисунка 5 в, в точности равно числу рассматриваемых ярусов дискретной области построенного квазифрактала.

Нетрудно догадаться, что фрактальный макет разбиения правильного треугольника может выступать универсальным шаблоном в процессе дискретизации не только тонких пологих оболочек под действием симметричной относительно их оси вращения нагрузки, но и при исследовании произвольных тонких пологих оболочек вращения. В самом деле, достаточно в основном макете изменить линейный размер одной из сторон, чтобы образовался неправильный треугольник Серпинского (см. рисунок 5 б), которыми моделируются осевые элементы квазитреугольника Серпинского на рисунке 5 в. Если в полученном макете неправильного треугольника Серпинского осуществить надлежащее изменение углов, то в результате получится вся необходимая гамма шаблонов для точного описания квазифрактала. Вместе с этим ясно, что применение элементов фрактальной геометрии целесообразно для простых геометрических форм срединных поверхностей оболочек, т. е. для оболочек вращения, таких как коническая оболочка, сферическая оболочка, цилиндрическая оболочка и т. д. В общем же случае попытка приложения указанного подхода может быть сопряжена с большими затратами машинного времени.

Пример расчета фрагмента пологой конической оболочки. В качестве примера численной реализации плоско-пространственной задачи МКЭ проведено исследование фрагмента тонкой пологой ко-

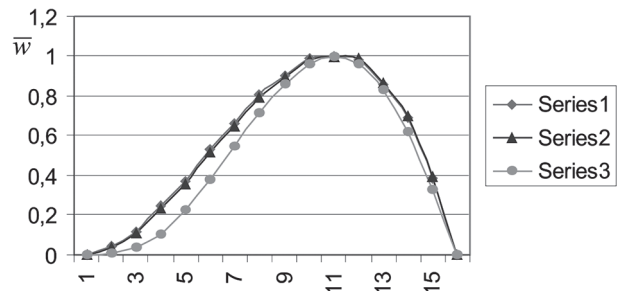


Рисунок 6 — Графики функций приведенных прогибов для фрагментов пластинки (1), (3) и оболочки (2)

нической оболочки, находящейся под действием равномерно распределенного давления.

На рисунке 6 представлен график *функции приведенных прогибов*, образованных в виде отношения $\bar{w} = w / w_{\max}$ [3], где w — функция натуральных прогибов треугольного фрагмента тонкостенной пологой конической оболочки вдоль его медианы, где N обозначает количество равноотстоящих на ней точек. Под *треугольным фрагментом конической оболочки* подразумевается часть конической поверхности, которая после ее разворачивания на плоскость обращается в треугольник. Толщина оболочки $\delta = 1$ мм, высота купола $h = 5$ мм, а диаметр сечения $D = 60$ мм. Материал пологой конической оболочки — сталь с соответствующим модулем сдвига $G = 7,7 \cdot 10^{10}$ Н/м². Величина действующего на фрагмент равномерного давления $P = 10$ Па. График функции приведенных прогибов рассматриваемой оболочки (см. кривую 2 на рисунке 6) при одинаковых условиях нагружения совмещен с графиком аналогичной зависимости для треугольного фрагмента тонкой круглой пластинки (см. рисунок 6, кривую 1), срединная поверхность которой совпадает с основанием купола исследуемой конической оболочки. Фрагментом тонкой пластинки выступает правильный, а фрагментом пологой конической оболочки — неправильный треугольник Серпинского с числами узловых точек $P = 136$ и конечных элементов $E = 225$. Граничные условия в обоих случаях предполагают фиксированность в смысле опирания контуров фрагментов и неограниченность касательных в точках этих контуров. Величины наибольших прогибов, как и следовало ожидать, обнаруживаются в точках пересечения медиан треугольников.

Сформированные таким образом функции приведенных прогибов обладают по отношению к функциям абсолютных прогибов тем важным преимуществом, что при условии справедливости теории Кирхгофа представляют собой своего рода *инвариантные формы*, не зависящие от физико-механических свойств пластинки, ее характерных геометрических размеров и интенсивности равномерно распределенной нагрузки. В публикации [3] в силу существенного расхождения приведенных функций прогибов, построенных для прямоугольных пластин на основе МКЭ [1]

и метода Навье [15], приводилось обоснование высокой эффективности применения плоско-пространственной задачи МКЭ по сравнению с методами, использующими гипотезу Кирхгофа. Здесь необходимо отметить гораздо более значительные расхождения приведенных функций прогибов, построенных для свободно опертой по краям равносторонней треугольной пластинки, с одной стороны, на основе МКЭ (см. кривую 1 на рисунке 6) и, с другой стороны, — в силу аналитического решения, данного в 1933 году С. Войновским-Кригером в теории Кирхгофа [15] (см. кривую 3 на рисунке 6). Поскольку при сравнении разных расчетных методик не было совпадения функций приведенных прогибов, то их тогда следует квалифицировать как *псевдоинвариантные формы* прогибов. Тем не менее степень близости функций приведенных прогибов является неявной характеристикой близости функций абсолютных прогибов, поскольку, как показывает численный анализ, при расхождении приведенных прогибов абсолютные прогибы расходятся в большей степени. Следовательно, приведенные функции прогибов выступают объективными показателями совпадения и расхождения генерированных численных результатов. Как нетрудно заметить из рисунка 6, наибольшие отклонения приведенных функций прогибов наблюдаются вблизи углов исследуемых треугольных фрагментов пластины или оболочки и характеризуются ошибкой порядка 800 %. Полезно также отметить максимальное значение абсолютного прогиба, рассчитанное по формуле Войновского-Кригера: $w_{\max} = 0,0028$ мм.

Закключение. В предлагаемой статье представлено теоретическое обоснование применимости плоско-пространственной задачи МКЭ к расчету прогибов тонких жестких оболочек. Сформулированы линейная и нелинейная разновидности плоско-пространственной задачи МКЭ для определения малых упругих прогибов пологих и непологих тонкостенных оболочек. По ходу вышеуказанного доказательства отождествлена новая инвариантная величина МКЭ — симметричный тензор жесткости при изгибе. В целях оптимизации процедуры дискретизации двумерной сплошной среды МКЭ привлечены также элементы фрактальной геометрии в связи с моделированием тонкостенных пологих оболочек вращения простой формы. В конце приводится пример вычисления функции прогибов фрагмента тонкой полой конической оболочки под действием равномерно распределенной нагрузки.

Проведенный сравнительный анализ выявил более чем значительные расхождения (местами порядка 800 %) функций приведенных прогибов,

рассчитанных по МКЭ и по теории Кирхгофа. Отсюда вытекает блистательное подтверждение установленной ранее высокой эффективности применения плоско-пространственной задачи МКЭ при решении широкого класса инженерно-технических задач поперечного изгиба пластин и оболочек. Предложенная модификация МКЭ должна, безусловно, найти успешное применение как в строительстве сооружений, так и в отраслях промышленности стратегического назначения, таких как ракетостроение, самолетостроение и кораблестроение в качестве надежного средства для расчета фюзеляжей, крыльев, корпусов, днищ, лопастей турбин и т. д.

Автор выражает признательность рецензенту за помощь в подготовке статьи к публикации.

Список литературы

1. Геворкян, Г.А. Плоско-пространственная задача метода конечных элементов / Г.А. Геворкян // Механика машин, механизмов и материалов. — 2014. — № 1(26). — С. 49–52.
2. Геворкян, Г.А. Трактовка геометрического смысла конечных разностей и производной функции на основе использования аппарата МКЭ / Г.А. Геворкян // Механика машин, механизмов и материалов. — 2016. — № 2(35). — С. 95–98.
3. Геворкян, Г.А. Расчет упругих прогибов тонких жестких пластин на основе МКЭ без учета гипотезы Кирхгофа / Г.А. Геворкян // Механика машин, механизмов и материалов. — 2017. — № 1(38). — С. 39–44.
4. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике. — М., 1975.
5. Bathe, K.J. Numerical methods in finite element analysis / K.J. Bathe, E.L. Wilson. — Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976.
6. Reddy, J.N. An introduction to the finite element method / J.N. Reddy. — 3rd ed. — McGraw-Hill, 2006.
7. Daryl L. Logan A first course in the finite element method / L. Logan Daryl. — 5th ed. — Nelson Engineering, 2011.
8. Conley, R. Overcoming element quality dependence of finite elements with adaptive extended stencil FEM / R. Conley, T.J. Delaney, X. Jiao // Int. J. for Num. Meth. In Eng. — 2016. — Vol. 108, No. 9. — Pp. 1054–1085.
9. Natarajan, S. Virtual and smoothed finite elements: A connection and its application to polygonal/polyhedral finite element methods / S. Natarajan, S. Bordas and E.T. Ooi // Int. J. for Num. Meth. In Eng. — 2015. — Vol. 104, No. 13. — Pp. 1173–1199.
10. Alvares Dias, L. The construction of plate finite elements using wavelet basis functions / L. Alvares Dias, V. Vampa, M.T. Martin // Revista investigacion operacional. — 2009. — Vol. 30, No. 3. — Pp. 193–204.
11. Морозов, Н.Ф. Обобщенная модель Тимошенко–Рейсснера для многослойной пластины / Н.Ф. Морозов, П.Е. Товстик, Т.П. Товстик // Изв. РАН, Механика твердого тела. — 2016. — № 5. — С. 22–35.
12. Зверьяев, Е.М. Непротиворечивая теория тонких упругих оболочек / Е.М. Зверьяев // Прикладная математика и механика. — 2016. — № 5. — С. 580–596.
13. Геворкян, Г.А. Тривиальный метод конечных элементов / Г.А. Геворкян. — Саарбрюкен: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016.
14. Mandelbrot, B. The fractal geometry of nature / B. Mandelbrot. — New York: W.H. Freeman & Co, 1982. — 498 p.
15. Тимошенко, С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. — М: Наука, 1966.

GEVORGYAN Hrant Ararat, Ph. D. in Eng.

Researcher

E-mail: hrgevorkian@mail.ru

Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of the Republic of Armenia, Yerevan, Republic of Armenia

Received 27 December 2017.

CALCULATION OF ELASTIC DEFLECTIONS OF THIN STIFF SHELLS BASED ON THE FINITE ELEMENT METHOD OUT OF THE KIRCHHOFF'S THEORY

The computational method of determining thin stiff shells deflections formulated on the basis of the plane-spatial problem of the FEM without using Kirchhoff's hypothesis is developed; in virtue of the geometric properties of the finite element stiffness matrix, a tensor of flexion stiffness is introduced. A linear and a nonlinear modification of the plane-spatial problem of the FEM for calculation of small elastic deflections of thin shells are formulated. An example of calculation of fragment of sloping conical shell is given in accordance with the common principles of two-dimensional domain discretization and some elements of fractal geometry.

Keywords: finite element method, antiplane shear, plane-spatial problem, Kirchhoff's hypothesis, flexion stiffness, tensor of flexion stiffness, fractal geometry, fragment of shell

References

1. Gevorgyan H. Plosko-prostranstvennaya zadacha metoda konechnykh elementov [A plane-spatial problem in the finite element method]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials], 2014, no. 1(26), pp. 49–52.
2. Gevorgyan H. Traktovka geometricheskogo smysla konechnykh raznostey i proizvodnoy funktsii na osnove ispolzovaniya apparata MKE [An interpretation of the geometric meaning of the finite difference and the function derivative through the use of the finite element method tools]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials], 2016, no. 2(35), pp. 95–98.
3. Gevorgyan H. Raschet uprugikh progibov tonkikh zhestkikh plastin na osnove MKE bez ucheta gipotezy Kirkgofa [Calculation of elastic deflections of thin stiff plates based on the finite element method out of the Kirchhoff's theory]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials], 2017, no. 1(38), pp. 39–44.
4. Zienkiewicz O. *Metod konechnykh elementov v tekhnike* [The Finite Element Method in Engineering Science]. Moscow, Mir Publ., 1975. 543 p.
5. Bathe K.J., Wilson E.L. *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1976. 528 p.
6. Reddy J.N. *An Introduction to the Finite Element Method*. New York, McGraw-Hill, 2006. 761 p.
7. Daryl L. Logan. *A First Course in the Finite Element Method*. Florence, USA, Nelson Engineering, 2011. 752 p.
8. Conley R., Delaney T.J., Jiao X. Overcoming element quality dependence of finite elements with adaptive extended stencil FEM. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2016, vol. 108, no. 9, pp. 1054–1085.
9. Natarajan S., Bordas S., Ooi E.T. Virtual and smoothed finite elements: A connection and its application to polygonal/polyhedral finite element methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2015, vol. 104, no. 13, pp. 1173–1199.
10. Alvares Dias L., Vampa V., Martin M.T. The construction of plate finite elements using wavelet basis functions. *Revista investigacion operacional*, 2009, vol. 30, no. 3, pp. 193–204.
11. Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P. Obobshchennaya model Timoshenko–Reysnera dlya mnogosloynnoy plastiny [Generalized model of Timoshenko–Reissner for multiplayer plate]. *Izvestiya RAN, Mekhanika tverdogo tela* [News of RAS, Mechanics of solids], 2016, no. 5, pp. 22–35.
12. Zveryaev E.M. Neprotivorechivaya teoriya tonkikh uprugikh obolochek [Noncontradictory theory of thin elastic shells]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied mathematics and mechanics], 2016, no. 5, pp. 580–596.
13. Gevorgyan H. *Trivialnyy metod konechnykh elementov* [Trivial finite element method]. Saarbrücken, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. 208 p.
14. Mandelbrot B. *The fractal geometry of nature*. New York, W.H. Freeman & Co, 1982. 498 p.
15. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. *Plastinki i obolochki* [Theory of plates and shells]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 636 p.