

УДК 629.3.032.2

С.Н. ПОДДУБКО, канд. техн. наук, доц.  
генеральный директор<sup>1</sup>  
E-mail: p-s-n@tut.by

Н.Н. ИШИН, д-р техн. наук, доц.  
начальник центра<sup>1</sup>  
E-mail: nik\_ishin@mail.ru

А.М. ГОМАН, канд. техн. наук, доц.  
начальник отдела<sup>1</sup>  
E-mail: arcady.mih@tut.by

А.С. СКОРОХОДОВ, канд. техн. наук  
ведущий научный сотрудник<sup>1</sup>  
E-mail: skanst@yandex.ru

<sup>1</sup>Объединенный институт машиностроения НАН Беларуси, г. Минск, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 04.07.2018.

## РАСЧЕТ ВНУТРЕННЕЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ СКОРОСТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ

*Проведен анализ методов расчета внутренней динамической нагрузки скоростных цилиндрических зубчатых передач (косозубых и прямозубых) внешнего зацепления, представленных в стандартах ISO, AGMA, ДСТУ ISO, BS ISO, DIN, ГОСТ 21 354-87, а также метода, разработанного А.И. Петрусевичем. Внутренняя динамическая нагрузка является одним из основных факторов, влияющих на ресурс и уровень вибраций скоростных зубчатых передач. Необходимость анализа существующих методов расчета вызвана потребностью выбора современной методике проектирования скоростных зубчатых передач, удовлетворяющих требованиям их использования в электромеханических силовых установках мобильных машин с высокооборотными тяговыми электродвигателями переменного тока с возбуждением от постоянных магнитов. Приведен пример расчета скоростной косозубой цилиндрической зубчатой передачи редуктора силовой установки электромобиля.*

**Ключевые слова:** электромеханическая силовая установка, скоростная зубчатая передача, внутренняя динамическая нагрузка, коэффициент внутренней динамической нагрузки, окружная скорость, погрешность окружного шага, погрешность профиля зуба, главный резонанс зубчатой передачи

**Введение.** Анализ структурных схем электромеханических и гибридных силовых установок показывает присутствие в них механических частей в виде редукторных систем [1, 2]. Это связано с тем, что диапазон изменения угловых скоростей вала электродвигателей, в котором КПД является достаточно высоким, не позволяет спроектировать транспортное средство с необходимыми тягово-скоростными характеристиками. Кроме того, современные электродвигатели не способны развивать достаточно большой максимальный момент, необходимый для разгона на небольших скоростях вращения, без использования редуктора. При этом лимитирующими критериями выступают также массо-экономические показатели, существенно влияющие на конкурентоспособность выпускаемой мобильной техники.

Как показывает анализ технической литературы, самый очевидный способ увеличить удельную мощность — уменьшить размер двигателя [3].

Однако уменьшение размера двигателя приводит к уменьшению крутящего момента при одной и той же скорости вращения. Следовательно, чтобы получить большую мощность, необходимо повысить обороты двигателя. Сегодня силовые установки гибридных автомобилей и электромобилей оснащены высокооборотными (9000–12 000 мин<sup>-1</sup>) тяговыми электродвигателями переменного тока (асинхронными и синхронными с возбуждением от постоянных магнитов) [1, 3, 4]. Уже появляются двигатели, работающие при 20 000 мин<sup>-1</sup>, идут работы над электромоторами, работающими на скорости 30 000 мин<sup>-1</sup> [3]. Кроме того, при равной мощности низкооборотный высокомоментный двигатель гораздо крупнее, тяжелее и менее эффективен, чем высокооборотный. Именно поэтому высокооборотный низкомоментный двигатель в комплекте с тяговым редуктором будет компактнее, легче и эффективнее [5]. К тому же цена электродвигателя едва ли не прямо пропорциональна его массе [3].

Повышение скорости вращения вала двигателя обуславливает повышенные требования к редуктору: его точности, обеспечению теплообмена, снижению вибрации и т. д. В связи с этим в современных силовых установках мобильных машин получили распространение косозубые цилиндрические колеса, преимущества которых особенно проявляются именно в быстроходных зубчатых передачах [6]. В отличие от прямозубых колес, в них в меньшей степени проявляются колебания, вызванные ударными процессами в зубчатых сопряжениях, и параметрические колебания. Косозубое зацепление не имеет зоны однопарного зацепления. Зубья в косозубых передачах нагружаются постепенно по мере их захода в зацепление. Плавность косозубого зацепления значительно понижает шум и дополнительные внутренние динамические нагрузки.

Основным конструкционным недостатком косозубых зубчатых колес является наличие в зацеплении осевых сил, дополнительно нагружающих опоры валов.

**Постановка задачи.** Первая ступень редукторных систем электромеханических силовых установок является скоростной. Максимальная окружная скорость  $V_{i\max}$  шестерни первой ступени рассчитывается по формуле

$$V_{i\max} = \frac{\pi \cdot d_1 \cdot n_{\max}}{60 \cdot 1000}, \quad (1)$$

где  $d_1$  — диаметр делительной окружности шестерни, мм;  $n_{\max}$  — максимальное число оборотов вала электродвигателя, мин<sup>-1</sup>.

В процессе пересопряжения зубьев зубчатых передач появляются дополнительные внутренние динамические нагрузки в зацеплении. Величина этих нагрузок зависит от деформаций зубьев, погрешностей в шаге и профиле зубьев, окружной скорости и т. д. [7]. Коэффициент внутренней динамической нагрузки определяется по формуле

$$K_V = 1 + \frac{U}{K_A \cdot F_t}, \quad (2)$$

где  $U = u_{\text{вд}} \cdot b_w$  — внутренняя динамическая нагрузка, Н;  $u_{\text{вд}}$  — удельная внутренняя динамическая нагрузка, Н/мм;  $F_t$  — окружная сила на делительном диаметре в торцовом сечении, Н;  $K_A$  — коэффициент, учитывающий внешнюю динамическую нагрузку;  $b_w$  — рабочая ширина зубчатой пары, мм.

Внутренняя динамическая нагрузка существенно влияет на контактную и изгибную выносливость зубчатых передач. Кроме влияния на выносливость, данная нагрузка оказывает определяющее воздействие на шум зубчатых передач, особенно скоростных [8], что также сказывается на их конкурентоспособности. Расчет коэффициента внутренней динамической нагрузки цилиндрических зубчатых колес (прямозубых и косозубых) стандартизован в ряде норматив-

ных документов стран СНГ, Европейского союза, США, ФРГ, Китая и др. [9–12]. В СССР наибольшее распространение получил метод расчета внутренней динамической нагрузки косозубых передач, предложенный А.И. Петрусевичем [13].

В Республике Беларусь действующим стандартом по расчету цилиндрических зубчатых передач является ГОСТ 21354-87 [14]. Он устанавливает основные расчетные зависимости для определения контактной прочности активных поверхностей зубьев и прочности зубьев при изгибе зубчатых передач общемашиностроительного профиля, работающих при окружных скоростях  $V_i \leq 25$  м/с.

Однако нормативные документы стран СНГ, позволяющие рассчитывать и проектировать скоростные ( $V_i \geq 25$  м/с) цилиндрические зубчатые передачи, известны только на уровне отраслевых рекомендаций ([15] — до 30 м/с, [16] — до 70 м/с). В то же время некоторые страны идут по пути перевода и адаптации зарубежных стандартов, в частности стандарта ISO (Украина — ДСТУ ISO 6336; Великобритания — BS ISO 6336, Китай — GB/T 3480-1997, ФРГ — DIN 3990-1:1987 и т. п.), что дает им основу для расчета высокоскоростных зубчатых передач.

Для скоростных зубчатых передач принимаются также дополнительно отдельные стандарты, например ДСТУ ISO 9084:2006 «Расчет нагрузочной способности цилиндрических прямозубых и косозубых зубчатых передач. Применение для скоростных зубчатых передач и зубчатых передач с подобными требованиями». Данный нормативный документ является тождественным переводом соответствующего стандарта ISO 9084:2000 и содержит формулы, предназначенные для установления унифицированного метода расчета сопротивления питтингу и изгибу скоростных зубчатых передач и зубчатых передач с подобными требованиями с прямыми или косыми зубьями.

Следует также отметить некоторую разницу в причинах возникновения внутренних динамических нагрузок в прямозубых и косозубых зубчатых передачах. Так, в прямозубых зубчатых передачах при точности изготовления зубчатых колес, принятой в общем машиностроении, определяющими являются погрешности основного шага, вызывающие удары на входе и выходе зубьев из зацепления. При повышении точности (например, в авиационных прямозубых редукторах) влияют на динамическую нагрузку также параметрические колебания, вызванные изменением суммарной жесткости зацепления при пересопряжении зубьев. В то же время в зацеплении косозубых зубчатых колес, особенно при высокой степени точности изготовления, динамический эффект от погрешности шага зацепления очень мал и к тому же легко устраняется с помощью притирки зубчатых пар [8]. Реализация за счет эффекта косозубости высокого коэффициента пере-

крытия приводит к снижению параметрических колебаний. Зато в косозубых зубчатых передачах, особенно скоростных, крайне нежелательны ошибки окружного шага, ошибки профиля и накопленные ошибки шага зубчатых колес [8,13], вызывающие «кинематические» колебания в зубчатом зацеплении. Их инерционное воздействие на возникновение внутренних динамических нагрузок коренным образом отличается от действия погрешности шага зацепления. В определенных случаях они приводят к высоким динамическим нагрузкам на зубья (достигающим полезных), а также могут приводить к работе зубчатой передачи с размыканием.

Влияние ошибки окружного шага, ошибки профиля и накопленной ошибки зубчатых колес на механизм возникновения внутренних динамических нагрузок в скоростных косозубых зубчатых передачах подробно описано еще в середине XX века А.И. Петрусевичем [8, 13]. Однако в расчеты, предлагаемые ГОСТ 21354-87, указанные погрешности зубчатых колес в явном виде не входят. Это, в свою очередь, не только влияет на расчет прочности и ресурса зубчатых передач, но и отрицательно сказывается на корректности назначения норм точности при их проектировании.

В связи с вышеизложенным, целью данной работы является анализ существующих в настоящее время нормативных документов для разработки рекомендаций по оценке внутренней динамической нагрузки в скоростных зубчатых передачах, в значительной степени определяющей их ресурс, уровень вибраций и шума.

**Принципы расчета внутренней динамической нагрузки.** Практически во всех нормативных документах [10–12, 14] расчет внутренней динамической нагрузки начинается с расчета главной резонансной частоты вращения ведущего зубчатого колеса (шестерни) зубчатой пары  $n_{E1}$  (мин<sup>-1</sup>).

Главная резонансная частота определяется [11] по формуле

$$n_{E1} = \frac{30\,000}{\pi \cdot z_1} \sqrt{\frac{c_\gamma}{m_{red}}}, \quad (3)$$

где  $c_\gamma$  — средняя удельная торцовая жесткость зубьев пары зубчатых колес, Н/(мм·мкм);  $z_1$  — число зубьев шестерни;  $m_{red}$  — удельная приведенная масса зубчатых колес, кг/мм.

Реальное значение резонансной частоты  $n_{E1}$  может быть выше или ниже рассчитанного по формуле (3) из-за неучета жесткости валов, подшипников, корпуса редуктора, процессов демпфирования и т. д.

В зависимости от величины  $N$ , равной отношению частоты вращения шестерни  $n_1$  к главной резонансной частоте  $n_{E1}$  и называемой резонансным отношением

$$N = \frac{n_1}{n_{E1}}, \quad (4)$$

различаются 4 зоны работы зубчатой передачи (рисунок 1 [11]):

- 1-я зона — закритическая,  $N \geq 1,5$ ;
- 2-я зона — промежуточная,  $1,15 \leq N \leq 1,5$ ;
- 3-я зона — резонансная,  $N_s \leq N \leq 1,15$ ;
- 4-я зона — дорезонансная,  $N \leq N_s$ .

Нижняя граница  $N_s$  резонансной зоны 3 определяется соотношениями:

а) при значении удельной окружной силы ( $F_t \times K_A/b_w$ )  $\geq 100$  Н/мм

$$N_s = 0,85;$$

б) при значении ( $F_t \cdot K_A/b_w$ )  $< 100$  Н/мм

$$N_s = 0,5 + 0,35 \sqrt{\frac{F_t \cdot K_A}{100b_w}},$$

где окружная сила на делительном диаметре находится из выражения

$$F_t = \frac{2000T}{d_1}, \quad (5)$$

где  $d_1$  — делительный диаметр шестерни, мм;  $T$  — вращающий момент, Нм.

В рассматриваемых нормативных документах расчет коэффициента внутренней динамической нагрузки  $K_v$  производится для каждой из зон.

Очевидным является факт, что инерционно-жесткостные параметры зубчатых передач и рабочие режимы зубчатых механизмов должны быть выбраны таким образом, чтобы зубчатые передачи работали в дорезонансной зоне (4-я зона), в которой коэффициенты внутренней динамической нагрузки минимальны. Этим самым достигаются условия снижения виброактивности зубчатых передач и повышения их прочности.

Ниже рассматриваются различные методы расчета коэффициента внутренней динамической нагрузки в дорезонансной зоне.

**ГОСТ 21354-87 [14].** В этом стандарте нижняя граница резонансной зоны принимается равной  $N_s = 0,85$  и при этом не учитывается влияние на ее значение удельной окружной силы  $F_t \cdot K_A/b_w$ .

Условия работы зубчатой передачи в дорезонансной зоне определяются неравенствами:

- для прямозубых передач

$$\frac{V_t \cdot z_1}{1000} < 1; \quad (6)$$

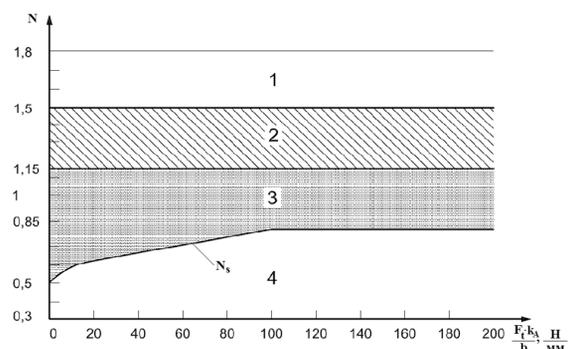


Рисунок 1 — Зоны работы зубчатой передачи [11]

- для косозубых передач

$$\frac{V_t \cdot z_1}{1000} < 1,4, \quad (7)$$

где  $z_1$  — число зубьев шестерни.

В дорезонансной зоне определяются два коэффициента внутренней динамической нагрузки  $K_{Hv}$  и  $K_{Fv}$  при расчете на контактную и изгибную прочность соответственно. Расчет коэффициентов производится по формуле

$$K_{Hv, Fv} = 1 + \frac{w_{Hv, Fv} \cdot b_w}{F_t \cdot K_A}, \quad (8)$$

где  $w_{Hv}$ ,  $F_v$  — удельные внутренние динамические нагрузки при расчете на контактную ( $H$ ) и изгибную прочность ( $F$ ), Н/мм.

Удельные внутренние динамические нагрузки находятся из выражения

$$w_{Hv, Fv} = \delta_{H, F} \cdot g_0 \cdot V_t \cdot \sqrt{\frac{a_w}{i}}, \quad (9)$$

где  $\delta_{H, F}$  — коэффициенты, учитывающие влияние вида зубчатой передачи (прямозубая или косозубая) и модификации профиля головок зубьев;  $g_0$  — коэффициент, учитывающий разности шагов зацепления зубьев шестерни и колеса;  $a_w$  — межосевое расстояние, мм;  $i$  — передаточное число. Величины коэффициентов зависят от степени точности зубчатой передачи. В ГОСТ 21354-87 рассматриваются зубчатые передачи 5–10 степеней точности.

**Стандарт ISO 6336-1:2006 (E) [11].** Особенности расчета коэффициента заключаются в следующем:

1. Коэффициент внутренней динамической нагрузки  $K_v$  принимается одинаковым при расчете зубчатых передач на контактную и изгибную прочность.

2. Предлагаются три метода расчета коэффициента  $K_v$ :

- *метод А.* Расчет коэффициента рекомендуется производить на основе математической модели динамических процессов в исследуемой системе с последующей экспериментальной проверкой;

- *метод В.* Метод основан на предположении, что каждая зубчатая пара рассматривается как одноступенчатая зубчатая передача. Причем влияние других зубчатых передач не учитывается;

- *метод С.* Основан на методе В при дополнительных упрощающих предположениях. При этом не исследуются резонансные процессы.

3. В отличие от ГОСТ 21354-87, при расчете коэффициента  $K_v$  методом В границы резонансных зон зависят не только от резонансного отношения  $N$ , но и от величины удельной окружной силы ( $F_t \cdot K_A / b_w$ ) (см. рисунок 1).

4. Отмечается, что, кроме главного резонанса  $n_{E1}$ , возможны дробные резонансы  $N = n_1 / n_{E1} = 1/2; 1/3$ . Риск проявления этих резонансов не-

значителен для точных косозубых или прямозубых передач, если последние имеют профильную модификацию. Это подтверждается исследованиями авторов резонансных явлений в зубчатых передачах [17].

В методе В коэффициент  $K_v$  в дорезонансной зоне рассчитывается по следующим выражениям:

$$K_v = N \cdot K + 1; \quad (10)$$

$$K = C_{v1} \cdot B_p + C_{v2} \cdot B_f + C_{v3} \cdot B_K, \quad (11)$$

где  $C_{v1} = 0,32$  — коэффициент, учитывающий отклонение шага;  $C_{v2}$  — коэффициент, учитывающий погрешность профиля зуба, рассчитываемый по формуле

$$C_{v2} = \frac{0,57}{\varepsilon_\gamma - 0,3}; \quad (12)$$

$C_{v3}$  — коэффициент, учитывающий влияние циклического изменения жесткости зацепления, вычисляется из выражения

$$C_{v3} = \frac{0,096}{\varepsilon_\gamma - 1,56}; \quad (13)$$

$B_p$  — коэффициент, учитывающий погрешность шага зацепления, приработку и нагруженность передачи:

$$B_p = \frac{c' \cdot f_{pbeff}}{K_A (F_t / b_w)}; \quad (14)$$

$B_f$  — коэффициент, учитывающий погрешность профиля, приработку и нагруженность передачи:

$$B_f = \frac{c' \cdot f_{feff}}{K_A (F_t / b_w)}; \quad (15)$$

$B_K$  — коэффициент, учитывающий плавность входа головки зуба в зацепление:

$$B_K = \left| 1 - \frac{c' \cdot C_\alpha}{K_A (F_t / b_w)} \right|; \quad (16)$$

$C_\alpha$  — коэффициент, учитывающий величину модификации профиля (профиль головки и ножки зуба):

$$C_\alpha = 1,5 + \frac{\left( \frac{\sigma_{Hlim}}{97} - 18,45 \right)^2}{18}; \quad (17)$$

$c'$  — максимальная удельная жесткость зубьев, Н/(мм·мкм);  $\varepsilon_\gamma$  — суммарный коэффициент перекрытия;  $f_{pbeff}$  — эффективная погрешность шага зацепления с учетом приработки, мкм:

$$f_{pbeff} = f_{pb} - y_\alpha; \quad (18)$$

$f_{feff}$  — эффективная погрешность профиля с учетом приработки, мкм:

$$f_{feff} = f_f - y_\alpha; \quad (19)$$

$y_\alpha$  — уменьшение погрешности вследствие приработки, мкм;  $\sigma_{Hlim}$  — предел контактной выносливости поверхности зуба, Н/мм<sup>2</sup>.

Величина внутренней динамической нагрузки  $U$  определяется из выражения [7]:

$$U = (K_V - 1)K_A \cdot F_t \quad (20)$$

**Стандарт ANSI/AGMA 2101 – D 04 [9].** В этом стандарте предлагается приближенный метод определения коэффициента  $K_V$ . На рисунке 2 представлены кривые изменения коэффициента  $K_V$  от окружной скорости  $V_t$  на делительном диаметре шестерни и параметра  $A_v$ . Коэффициент внутренней динамической нагрузки определяется из выражения

$$K_V = \left[ \frac{C}{C + \sqrt{200 \cdot V_t}} \right]^{-B} \quad (21)$$

где  $C = 50 + 56(1,0 - B)$ .

Для  $6 \leq A_v \leq 12$  показатель степени  $B = 0,25(A_v - 5,0)^{0,667}$ .

Данный метод ранее был включен в стандарт ISO 6336-1:1996 как метод E (соответственно коэффициент  $K_{v,E}$ ) для тех, кто предпочитает методу AGMA, и сохранился до настоящего времени в некоторых переводных стандартах, основанных на ISO редакции 1996 г. (например Украины — ДСТУ ISO 6336-1:2005, Китая — GB/T 3480-1997).

Параметр  $A_v$  при расчетах по этой методике косвенно зависит от степени точности зубчатых передач, устанавливаемой стандартом ISO-1328-1[18], а также от числа зубьев, нормального модуля и погрешности окружного шага.

Изображенные на рисунке 2 кривые основаны на опытных данных и не учитывают резонансные явления в зубчатых передачах.

**Метод А.И. Петрусевича [13].** В соответствии с этим методом внутренние динамические нагрузки в скоростных косозубых колесах вызываются погрешностями окружного шага (в расположении зубьев по делительной окружности зубчатого колеса) или в профиле зуба. Величина удельной динамической нагрузки определяется по формуле

$$u_{уд} = \frac{26 \cdot \Delta}{\frac{150d}{d_{ш} \cdot V_t^2} + \sqrt{\left(\frac{150d}{d_{ш} \cdot V_t^2}\right)^2 + 1} + \sqrt{\frac{225 \cdot 10^4}{z_{ш}^2 \cdot V_t^2} + 1}} \quad (22)$$

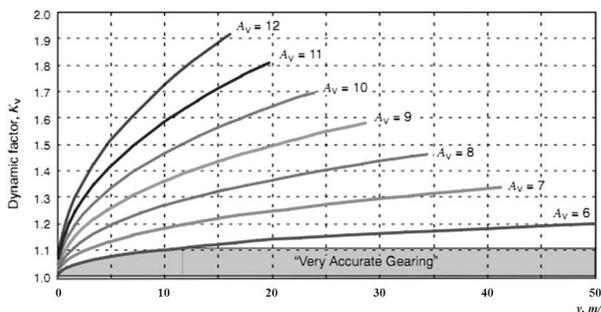


Рисунок 2 — Коэффициент внутренней динамической нагрузки  $K_V$  (AGMA 2101)

где  $\Delta$  — погрешность окружного шага или профиля зуба, мкм;  $d$  — диаметр шестерни или колеса, см;  $z_{ш}$  — число зубьев шестерни.

При значении окружной скорости  $V_t \geq 15$  м/с в формулу (22) вместо  $\Delta$  следует подставить  $(\Delta - 5)$ , а при  $\Delta < 10$  мкм — подставить  $\Delta/2$ . Также следует подставлять диаметр  $d$  того из зубчатых колес рассчитываемой зубчатой пары, на котором погрешность  $\Delta$  ( $\Delta_{ш}$  при  $d = d_{ш}$  или  $\Delta_k$  при  $d = d_k$ ) вызывает большую динамическую нагрузку.

Кроме того, в скоростных косозубых зубчатых передачах необходимо учитывать дополнительную внутреннюю динамическую нагрузку, возникающую в зубчатом зацеплении при наиболее неблагоприятном характере накопления погрешностей в окружном шаге шестерни или колеса.

Удельная внутренняя динамическая нагрузка в этом случае рассчитывается по формуле

$$u_{уд1} \approx 1,2\Delta_{\Sigma} \cdot c_1 \quad (23)$$

где  $\Delta_{\Sigma}$  — местная накопленная погрешность в окружном шаге шестерни или колеса на дуге, соответствующей числу зубьев  $z_{\Sigma}$ , мкм;  $c_1$  — удельная жесткость соединения между шестерней и ближайшей с ней массивной деталью, кГ/(см·мкм).

Величина  $z_{\Sigma}$  определяется по формуле

$$z_{\Sigma} = \frac{\pi \cdot V_t}{2t_s} \sqrt{\frac{m_1}{c_1}} \quad (24)$$

где  $m_1$  — удельная эффективная масса зубчатых колес и связанных с ними деталей, кГ·с<sup>2</sup>/см<sup>2</sup>;  $t_s$  — торцовый шаг, см.

Принимается, что  $u_{уд1} = 0$  при  $z_{\Sigma} < 2$ ; при  $z_{\Sigma} > z/2$  следует брать  $z_{\Sigma} = 1/2$ .

Таким образом, в соответствии с методом А.И. Петрусевича удельная внутренняя динамическая нагрузка в косозубых скоростных зубчатых передачах определяется суммой двух нагрузок:

$$u_{удс} = u_{уд} + u_{уд1} \quad (25)$$

Основным недостатком метода А.И. Петрусевича является отсутствие исследований резонансных процессов зубчатых передач, не позволяющих установить величину максимального значения окружной скорости вращения шестерни в дорезонансной зоне.

**Пример расчета внутренней динамической нагрузки скоростной косозубой передачи редуктора электромобиля.** Расчет производится при максимальной частоте вращения синхронного электродвигателя 9800 мин<sup>-1</sup>, выбранной таким образом, чтобы уложиться в диапазон скоростей, допускающих расчет по ГОСТ 21354-87. Исходные параметры косозубой передачи приведены в таблице 1, сравнительный анализ параметров точности по разным стандартам — в таблице 2.

Расчет по ГОСТ 21354-87. Окружная скорость шестерни находится по формуле (1):

$$V_t = \frac{\pi \cdot 46,26 \cdot 9800}{60 \cdot 000} = 23,74 \text{ м/с.}$$

Таблица 1 – Исходные параметры

Наименование параметра		Обозначение	Значение
Число зубьев	шестерни	$z_1$	22
	колеса	$z_2$	67
Нормальный модуль, мм		$m_n$	2
Ширина венца, мм	шестерни	$b_1$	26
	колеса	$b_2$	24
Рабочая ширина венца зубчатой передачи, мм		$b_w$	24
Коэффициент смещения	шестерни	$x_1$	0,480
	колеса	$x_2$	0,265
Угол наклона, градусов		$\beta$	18
Вращающий момент, Н·м		$T$	100
Частота вращения шестерни, мин <sup>-1</sup>		$n_1$	9800
Коэффициент, учитывающий внешнюю динамическую нагрузку		$K_A$	1
Степень точности по ГОСТ 1643-81 [19]		—	6
Межосевое расстояние, мм		$a_w$	95
Передаточное число		$i$	3,045
Суммарный коэффициент перекрытия		$\varepsilon_\gamma$	2,587
Делительный диаметр, мм	шестерни	$d_1$	46,26
	колеса	$d_2$	140,90
Диаметр вершин, мм	шестерни	$da_1$	52,04
	колеса	$da_2$	145,82
Диаметр впадин, мм	шестерни	$df_1$	43,18
	колеса	$df_2$	136,96
Основной диаметр, мм	шестерни	$db_1$	43,21
	колеса	$db_2$	131,59
Твердость поверхности зуба	шестерни	HRC	60
	колеса	HRC	60

Из условия (7)  $V_i \cdot z_1 / 1000 = 0,522 < 1,4$  следует, что рассматриваемая косозубая зубчатая передача работает в дорезонансной зоне. Поэтому расчет внутренней динамической нагрузки и коэффициента  $K_V$  производится по формулам (8), (9). Для 6-й степени точности  $g_0 = 3,8$ . Значения коэффициентов для косозубой передачи  $\delta_H = 0,04$ ,  $\delta_F = 0,06$ .

Окружная сила находится из выражения (5):

$$F_t = \frac{2000 \cdot 100}{46,26} = 4323 \text{ Н.}$$

Удельные внутренние динамические нагрузки при расчете на контактную и изгибную прочность находятся по формулам (9):

$$w_{Hv} = 0,04 \cdot 3,8 \cdot 23,74 \cdot \sqrt{\frac{95}{3,045}} = 20,16 \text{ Н/мм;}$$

$$w_{Fv} = 0,06 \cdot 3,8 \cdot 23,74 \cdot \sqrt{\frac{95}{3,045}} = 30,23 \text{ Н/мм.}$$

Соответственно внутренние динамические нагрузки будут равны:

Таблица 2 – Параметры точности\*

Погрешность	Обозначение	$z_1 / z_2$	ГОСТ 1643	ISO 1328		AGMA 2015	
			6 ст.т.	6 ст.т.	7 ст.т.	A6	A7
Основного шага	$f_{pb}$ , МКМ	$z_1$	9,5	—	—	—	—
		$z_2$	10	—	—	—	—
Окружного шага	$f_{ps}$ , МКМ	$z_1$	10	7,5	11	8,42	11,90
		$z_2$	11	8,5	12	8,81	12,46
Профиля	$f_{fs}$ , МКМ	$z_1$	8	6,5	9	7,41	10,48
		$z_2$	9	7,5	11	8,59	12,15

\*Уменьшение погрешности вследствие приработки  $y_\alpha = 1$  МКМ.

$$U_H = w_{Hv} \cdot b_w = 20,16 \cdot 24 = 483,8 \text{ Н};$$

$$U_F = w_{fv} \cdot b_w = 30,23 \cdot 24 = 725,5 \text{ Н}.$$

Коэффициенты внутренней динамической нагрузки  $K_{Hv}$  и  $K_{Fv}$  рассчитываются по формуле (8):

$$K_{Hv} = 1 + \frac{483,8}{4323 \cdot 1} = 1,112;$$

$$K_{Fv} = 1 + \frac{725,5}{4323 \cdot 1} = 1,168.$$

**Расчет по ISO 6336-1: 2006 (Е). Метод В.** Расчет приведенной массы зубчатой передачи  $m_{red}$  производится по формуле [11, (30)]:

$$m_{red} = \frac{\rho \cdot \pi \left( \frac{d_{m1}}{d_{b1}} \right)^2 \frac{d_{m1}^2 \cdot i^2}{1+i^2}}{8} = \frac{7,83 \cdot 10^{-6} \pi}{8} \times \left( \frac{47,61}{43,21} \right) \frac{47,61^2 \cdot 3,045^2}{1+3,045^2} = 7,641 \cdot 10^{-3} \text{ кг/мм}, \quad (26)$$

где  $\rho = 7,83 \cdot 10^{-6} \text{ кг/мм}^3$  — удельная плотность стали;  $d_{m1} = (d_{a1} + d_{f1})/2 = 47,61 \text{ мм}$  — средний диаметр шестерни.

При расчете  $m_{red}$  по формуле (26) принимается, что зубчатые колеса представляют собой жесткие диски диаметром  $d_{m1,2}$  и шириной  $b_{1,2}$ .

Средняя удельная торцовая жесткость зубьев пары зубчатых колес рассчитывается по выражению [11, (91)]:

$$c_v = c'(0,75\varepsilon_\alpha + 0,25) = 19,33 \text{ Н/(мм} \cdot \text{мкм)}, \quad (27)$$

где  $c' = 14,81 \text{ Н/(мм} \cdot \text{мкм)}$  — максимальная удельная жесткость зубьев [11, (80)].

Величина значения главного резонанса определяется из (3):

$$n_{E1} = \frac{30\,000}{\pi \cdot 22} \sqrt{\frac{19,33}{7,641 \cdot 10^{-3}}} = 21\,832 \text{ мин}^{-1}.$$

Резонансное отношение равно:

$$N = \frac{9800}{21\,832} = 0,449 < 0,5.$$

В соответствии с рисунком 1 зубчатая передача работает в дорезонансной зоне.

Расчет по формулам (12)–(17) дает следующие значения коэффициентов:

$C_{V2} = 0,249$ ;  $C_{V3} = 0,093$ ;  $C_\alpha = 2,491$ ;  $B_p = 0,740$ ;  $B_f = 0,658$ ;  $C_{V1} = 0,32$ ;  $B_k = 1$  для зубчатых колес со степенью точности 6–12 по ISO 1328-1.

Величина коэффициента  $K$  по (11):

$$K = 0,32 \cdot 0,740 + 0,249 \cdot 0,659 + 0,093 \cdot 1 = 0,494.$$

В соответствии с (10) величина коэффициента внутренней динамической нагрузки по методу В равна:

$$K_V = 0,449 \cdot 0,494 + 1 = 1,208.$$

Величина внутренней динамической нагрузки определяется из выражения (20):

$$U = (1,208 - 1) \cdot 1 \cdot 4323 = 899,2 \text{ Н}.$$

**Расчет по ДСТУ ISO 6336-1:2006 [10]. Приближенный метод определения коэффициента  $K_V$  (Метод  $K_{V-E}$ ).** Метод основан на расчете параметра  $C$ , большего из значений для шестерни / колеса, и определяемого по формуле [10]:

$$C = -0,5048 \ln(z_{1,2}) - 1,144 \ln(m_n) + 2,852 \ln(f_{pt1,2}) + 3,32, \quad (28)$$

где  $m_n$  — нормальный модуль, мм;  $f_{pt}$  — погрешность окружного шага, мкм.

В данном случае параметр имеет наибольшее значение для шестерни:

$$C = -0,5048 \ln(22) - 1,144 \ln(2) + 2,852 \ln(10) + 3,32 = 7,534.$$

Величины  $B$  и  $A$  соответственно равны [10]:

$$B = 0,25(7,534 - 5,0)0,667 = 0,465, \\ A = 50 + 56(1,0 - 0,465) = 79,96.$$

Коэффициент внутренней динамической нагрузки определяется из выражения [10]:

$$K_V = \left[ \frac{79,96}{79,96 + \sqrt{200 \cdot 23,74}} \right]^{0,465} = 1,335.$$

Величина внутренней динамической нагрузки определяется из выражения (20):

$$U = (1,335 - 1) \cdot 1 \cdot 4323 = 1449, \text{ Н}.$$

**Расчет по методу А.И. Петрусевича [13].** Величина удельной динамической нагрузки определяется по формуле (25). Погрешность окружного шага шестерни  $\Delta = f_{pt} = 10 \text{ мкм}$  [19]. В соответствии с рекомендациями [13] в формулу (22) вместо  $\Delta$  подставляется величина  $(\Delta - 5) = 5 \text{ мкм}$ , вместо  $d$  — диаметр шестерни  $d_{ш}$ . Величина удельной динамической нагрузки равна:

$$u_{вд} = \frac{26 \cdot 5}{\frac{150}{23,74^2 + \sqrt{\left(\frac{150}{23,74^2}\right)^2 + 1}} + \sqrt{\frac{225 \cdot 10^4}{22^2 \cdot 23,74^2} + 1}} = 29,4 \text{ Н/мм}.$$

Дополнительная внутренняя динамическая нагрузка, возникающая в зубчатом зацеплении при наиболее неблагоприятном характере накопления погрешностей в окружном шаге шестерни или колеса, рассчитывается по формуле (23). Рассматривается малоупругое соединение шестерни с ближайшей с ней массивной деталью (ротором электродвигателя). Для такого случая  $c_1 \approx 2 \text{ кг/(см} \cdot \text{мкм)}$ . Удельная масса зубчатой передачи равна  $m_1 = m_{red} = 7,643 \cdot 10^{-3} \text{ кг/мм} = 7,79 \cdot 10^{-5} \text{ кгсек}^2/\text{см}^2$ . Торцовый шаг равен:

$$t_s = \frac{\pi \cdot m_n}{\cos \beta} = 0,661 \text{ см}.$$

Величина  $z_\Sigma$ , определяемая по формуле (24), равна:

$$z_\Sigma = \frac{\pi \cdot 23,74}{2 \cdot 0,661} \sqrt{\frac{7,79 \cdot 10^{-5}}{2}} = 0,352.$$

Так как  $z_s < 2$ , то принимается, что  $u_{уд1} = 0$ .

Таким образом, в соответствии с методом А.И. Петрусевича удельная внутренняя динамическая нагрузка в косозубых скоростных зубчатых передачах, определяемая суммой двух нагрузок, будет равна:

$$u_{удс} = u_{уд} + u_{уд1} = 29,4 \text{ Н/мм.}$$

Внутренняя динамическая нагрузка по методу А.И. Петрусевича:

$$U = 29,4 \cdot 24 = 705,6 \text{ Н.}$$

Коэффициент внутренней динамической нагрузки:

$$K_{Hv} = 1 + \frac{705,6}{4323 \cdot 1} = 1,163.$$

**Сравнение полученных результатов.** Рассчитанные по рассмотренным выше методам величины внутренней динамической нагрузки  $U$  и коэффициенты  $K_v$  представлены в таблице 3. Также в данной таблице приведены результаты аналогичного расчета для частоты вращения шестерни  $n_1 = 18\,560 \text{ мин}^{-1}$ , соответствующей верхней границе докритической зоны ( $N = 0,85$ ). Этот расчет сделан для оценки погрешности, имеющей место при расчете внутренней динамической нагрузки по ГОСТ, при окружной скорости  $v_t = 44,9 \text{ м/с}$ , значительно превышающей допустимую данным стандартом ( $v_t = 25 \text{ м/с}$ ).

Анализ результатов расчетов значений внутренних динамических нагрузок и коэффициентов, учитывающих эту нагрузку, показывает, что для стандарта ГОСТ 21354-87 и метода А.И. Петрусевича в зоне окружных скоростей до 25 м/с эти величины практически совпадают, и величины по ISO 6336-1: 2006 к ним очень близки. Только приближенный метод  $K_{v-E}$  (ДСТУ ISO 6336, методика AGMA) дает по сравнению с указанными выше методами завышенные значения: по внутренней динамической нагрузке в среднем на 86 %, по коэффициенту  $K_v$  на 13 %. Однако при окружной скорости, соответствующей верхней границе докритической зоны, уже методики ISO и AGMA дают идентичные результаты, а расчет динамической нагрузки по ГОСТ 21354-87 дает заниженные по сравнению с ISO 6336 на 24 % (по

коэффициенту динамичности — почти 8 %). Величины, рассчитанные по методике А.И. Петрусевича, дают еще большее расхождение со стандартом ISO.

Полученные данные говорят о том, что заниженные результаты расчета коэффициента динамичности по ГОСТ 21354-87 могут в итоге привести к необоснованно завышенным оценкам расчетного ресурса зубчатой передачи. А это, в свою очередь, отрицательно скажется на репутации производителя и конкурентоспособности отечественной техники.

**Заключение.** 1. Развитие электромеханических силовых установок современных мобильных машин идет по пути увеличения скорости электродвигателей, снижения веса, повышения точности изготовления редукторов. При этом резко усиливающиеся с повышением скорости динамические процессы в прямозубых и косозубых зубчатых зацеплениях различной степени точности имеют значительные различия.

2. Теория динамических нагрузок в зубчатых парах, начало которой было положено около 100 лет назад в работах Э. Бакингема и других ученых первой половины XX столетия, значительно продвинулась вперед. Основными линиями развития нормативных документов в этой области на сегодняшний день можно считать стандарты ISO в Европе, AGMA в Америке и ГОСТ на постсоветском пространстве.

3. Дальнейшее повышение частоты вращения валов электродвигателей и, соответственно, рабочих окружных скоростей зубчатых передач, приводит к невозможности использования для расчетов зубчатых передач единственного действующего сегодня в Республике Беларусь нормативного документа — ГОСТ 21354-87.

К недостаткам метода расчета по ГОСТ 21354-87 следует отнести:

- ограниченность рассматриваемого интервала скоростей вращения шестерни (до 25 м/с);
- отсутствие учета влияния удельной окружной силы  $F_t \cdot K_A / b_w$  при определении значений  $N_s$  нижней границы резонансной зоны;
- предназначенность стандарта только для цилиндрических зубчатых передач общемашинострои-

Таблица 3 — Расчетные по различным методам значения величин внутренней динамической нагрузки  $U$  и коэффициента  $K_v$

Метод	Внутренняя динамическая нагрузка $U$ , Н		Коэффициент $K_v$	
	$v_t = 23,74 \text{ м/с}$	$v_t = 44,9 \text{ м/с}$	$v_t = 23,74 \text{ м/с}$	$v_t = 44,9 \text{ м/с}$
ГОСТ 21354-87 (расчет на изгиб)	725,5	1371,0	1,168	1,320
ISO 6336-1:2006. Метод В	899,2	1815,0	1,208	1,420
ДСТУ ISO 6336. Метод $K_{v-E}$ (аналог AGMA)	1449,0	1896,0	1,335	1,440
Метод А.И. Петрусевича	705,6	1058,0	1,163	1,240

тельного применения, изготовленных в пределах 5–10 степеней точности.

4. Стандарт ISO 6336-1:2006 (E) свободен от указанных выше недостатков и до разработки соответствующего отечественного стандарта может быть рекомендован к использованию при расчете скоростных цилиндрических зубчатых передач (прямозубых и косозубых) редукторов электромеханических силовых установок мобильных машин.

#### Список литературы

1. Мигаль, В.Д. Техническая диагностика автомобилей: справочное пособие в 6 т. / В.Д. Мигаль. — Харьков: Майдан, 2012. — Т. 6: Диагностическое обеспечение технической и экологической безопасности. — 538 с.
2. Альгин, В.Б. Расчет мобильной техники: кинематика, динамика, ресурс / В.Б. Альгин. — Минск: Беларус. навука, 2014. — 271 с.
3. Brauer, S. High Speed Electric Vehicle Transmission: Investigation how noise vibration harshness are affected at high speeds in an electric vehicle transmission [Electronic resource] / S. Brauer. — Mode of access: <http://www.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2%3A1131147&dsid=-7054>.
4. Златин, П.А. Электромобили и гибридные автомобили / П.А. Златин, В.А. Кеменов, И.П. Ксенович. — М.: Агроконсалт, 2004. — 416 с.
5. Шумов, Ю.Н. Энергосберегающие электрические машины для привода электромобилей и гибридных автомобилей (Обзор зарубежных разработок). / Ю.Н. Шумов, А.С. Сафонов // Электричество. — 2016. — № 1. — С. 55–65.
6. Belingardi, G. Dynamic additional loads influencing the fatigue life of gears in an electric vehicle transmission / G. Belingardi, V. Cuffaro, F. Curà // Frattura ed Integrità Strutturale. — 2014. — № 30. — Pp. 469–477.
7. Иванов, М.Н. Детали машин / М.Н. Иванов. — М.: Высш. шк., 2002. — 408 с.
8. Петрусевич, А.И. Обработка зубчатых колес и редукторов / А.И. Петрусевич, М.З. Сабуров. — М.: Машгиз, 1946. — 324 с.
9. ANSI/AGMA 2101 – D 04: Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth. — Mode of access: <https://wp.kntu.ac.ir/asp/AGMA%202001-D04.pdf>.
10. Розрахунок навантажувальної здатності циліндричних прямозубих і косозубих передач. Ч. 1. Основні принципи, вступна частина і загальні коефіцієнти впливу: ДСТУ ISO 6336-1:2005 (ISO 6336-1:1996, IDT).
11. Calculation of load capacity of spur and helical gears. P. 1: Basic principles, introduction and general influence factors: ISO 6336-1:2006 [E].
12. Teil 1. Tragfähigkeitsberechnung von Stirnrädern: DIN 3990-1987. — Berlin: Beuth Verlag GmbH, 1987. — 120 s.
13. Детали машин. Расчет и конструирование: справочник / под ред. Н.С. Очеркана. — М.: Машиностроение, 1969. — Т. 3. — С. 471.
14. Передачи зубчатые цилиндрические эвольвентные внешнего зацепления. Расчет на прочность: ГОСТ 21354-87. — М.: Изд-во стандартов, 1988. — 128 с.
15. Расчет на прочность цилиндрической зубчатой передачи на ЭВМ: метод. указания / сост.: Е.П. Жильников, А.Н. Тихонов. — Самара: Самарский гос. аэрокосмический ун-т им. С.П. Королева, 1996. — 24 с.
16. Расчет зубчатых передач на прочность: рук-во Р.007-2004 // Российский речной регистр. — М.: Рос. речной регистр, 2004. — 90 с.
17. Ишин, Н.Н. Резонансные режимы работы зубчатых передач. Ч. I: Аналитический расчет зубчатых передач / Н.Н. Ишин, А.М. Гоман, А.С. Скороходов // Механика машин, механизмов и материалов. — 2010. — № 3. — С. 33–39.
18. Cylindrical gears – ISO system of accuracy. P. 1: Definitions and allowable values of deviations relevant to corresponding flanks of gear teeth: ISO-1328-1:1995.
19. Основные нормы взаимозаменяемости. Передачи зубчатые цилиндрические. Допуски: ГОСТ 1643-81. — М.: Изд-во стандартов, 1981. — 46 с.

PODDUBKO Sergey N., Ph. D. in Eng., Assoc. Prof.

Director General<sup>1</sup>

E-mail: p-s-n@tut.by

ISHIN Nikolay N., D. Sc. in Eng., Assoc. Prof.

Chief of R&D Center “Mining machinery”<sup>1</sup>

E-mail: nik\_ishin@mail.ru

GOMAN Arkadiy M., Ph. D. in Eng., Assoc. Prof.

Head of the Department of Dynamic Analysis and Vibration-based Diagnostics of Machines<sup>1</sup>

E-mail: arcady.mih@tut.by

SKOROKHODOV Andrey S., Ph. D. in Eng.

Leading Researcher of the Department of Dynamic Analysis and Vibration-based Diagnostics of Machines<sup>1</sup>

E-mail: skanst@yandex.ru

<sup>1</sup>Joint Institute of Mechanical Engineering of the NAS of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

Received 04 July 2018.

## CALCULATION OF INTERNAL DYNAMIC LOAD OF HIGH-SPEED CYLINDRICAL GEARS

*The article presents an analysis of methods of calculating the internal dynamic load of high-speed cylindrical gears (spur and helical ones) of external gearing, presented in the ISO, AGMA, DSTU ISO, BS ISO, DIN, GOST 21354-87, and a method developed by A.I. Petrushevich. Internal dynamic load is one of the main factors affecting the lifetime and vibration level of high-speed gears. The need to analyze the existing methods of calculation is caused by*

*the need to choose a modern method of designing high-speed gears that meet the requirements of their usage in electromechanical power units of mobile machines with high-speed AC traction motors with permanent magnet excitation. The example of calculation of high-speed helical-toothed cylindrical gear of the reducer of the power unit of the electric vehicle is given.*

**Keywords:** *electromechanical power unit, high-speed gearing, internal dynamic load, coefficient of internal dynamic load, circumferential speed, tangential pitch error, tooth profile error, gearing main resonance*

## References

- Migal V.D. *Tekhnicheskaya diagnostika avtomobiley: spravochnoe posobie v 6 tomakh. Tom 6. Diagnosticheskoe obespechenie tekhnicheskoy i ekologicheskoy bezopasnosti* [Technical diagnostics of automobiles: reference book in 6 volumes. Volume 6. Diagnostic support of technical and environmental safety]. Harkov, Maydan Publ., 2012. 538 p.
- Algin V.B. *Raschet mobilnoy tekhniki: kinematika, dinamika, resurs* [Calculation of mobile equipment: kinematics, dynamics, lifetime]. Minsk, Belaruskaya navuka Publ., 2014. 271 p.
- Brauer S. *High Speed Electric Vehicle Transmission: Investigation how noise vibration harshness are affected at high speeds in an electric vehicle transmission*. Master Thesis. Karlstad, 2017. 84 p.
- Zlatin P.A., Kemenov V.A., Ksenevich I.P. *Elektromobili i gibridnye avtomobili* [Electric and hybrid cars]. Moscow, Agrokonsalt Publ., 2004. 416 p.
- Shumov Yu.N., Safonov A.S. *Energosberegayushchie elektricheskie mashiny dlya privoda elektromobiley i gibridnykh avtomobiley (Obzor zarubezhnykh razrabotok)* [Energy-saving electric machines for a drive of electric vehicles and hybrid vehicles (Review of foreign developments)]. *Elektrichestvo* [Electricity], 2016, no. 1, pp. 55–65.
- Belingardi G., Cuffaro V., Curà F. *Dynamic additional loads influencing the fatigue life of gears in an electric vehicle transmission*. *Frattura ed Integrità Strut-turale*, 2014, no. 30, pp. 469–477.
- Ivanov M.N. *Detali mashin* [Machines components]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2002. 408 p.
- Petrusevich A.I., Saburov M.Z. *Obrabotka zubchatykh kolez i reduktorov* [Processing of gears and reducers]. Moscow, Mashgiz Publ., 1946. 324 p.
- American National Standard ANSI/AGMA 2101–D04. *Fundamental Rating Factors and Calculation Methods for Involute Spur and Helical Gear Teeth*. Alexandria, VA, American Gear Manufacturers Association Publ., 2004. 66 p.
- ISO 6336-1:1996. *Calculation of load capacity of spur and helical gears – Part 1: Basic principles, introduction and general influence factors*. Geneva, International Organization for Standardization Publ., 1996. 93 p.
- ISO 6336-1:2006 [E]. *Calculation of load capacity of spur and helical gears – Part 1: Basic principles, introduction and general influence factors*. Geneva, International Organization for Standardization Publ., 2006. 109 p.
- DIN 3990-1987. *Teil 1. Tragfähigkeitsberechnung von Stirnrädern*. Berlin, Beuth Verlag GmbH Publ., 1987. 120 p.
- Detali mashin. Raschet i konstruirovaniye. Spravochnik. T. 3* [Machines components. Calculation and design. Reference book. Volume 3]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1969. 471 p.
- State Standard 21354–87. *Peredachi zubchatye tsilindricheskie evolventnyye vneshnego zatsepleniya. Raschet na prochnost* [The cylindrical evolute gears of external gearing. Strength calculation]. Moscow, Standartov Publ., 1988. 128 p.
- Zhilnikov E.P., Tikhonov A.N. *Raschet na prochnost tsilindricheskoy zubchatoy peredachi na EVM: Metodicheskie ukazaniya* [The strength calculation of cylindrical gears on ECM: guidelines]. Samara, Samarskiy gosudarstvennyy aerokosmicheskiy universitet imeni S.P. Koroleva Publ., 1996. 24 p.
- Instruction R.007–2004. *Raschet zubchatykh peredach na prochnost* [Strength calculation of gears]. Moscow, Russian River Register Publ., 2004. 90 p.
- Ishin N.N., Goman A.M., Skorokhodov A.S. *Rezonansnye rezhimy raboty zubchatykh peredach. Chast I: Analiticheskiy raschet zubchatykh peredach* [Resonance conditions of gearings. Part I: Analytical calculation of resonance frequencies]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2010, no. 3, pp. 33–39.
- ISO 1328-1:1995. *Cylindrical gears – ISO system of accuracy. Part 1: Definitions and allowable values of deviations relevant to corresponding flanks of gear teeth*. Washington, ANSI Publ., 1995. 32 p.
- State Standard 1643–81. *Osnovnyye normy vzaimozamenyaemosti. Peredachi zubchatye tsilindricheskie. Dopuski* [Basic requirements of interchangeability. Cylindrical gears. Tolerances]. Moscow, Standartov Publ., 1981. 46 p.