



# МЕХАНИКА ТРИБОФАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 539.3

С.С. ЩЕРБАКОВ, д-р физ.-мат. наук, доц.  
заместитель Председателя<sup>1</sup>  
профессор кафедры теоретической и прикладной механики<sup>2</sup>  
E-mail: sherbakovss@mail.ru

<sup>1</sup>Государственный комитет по науке и технологиям Республики Беларусь, г. Минск, Республика Беларусь

<sup>2</sup>Белорусский государственный университет, г. Минск, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 16.07.2018.

## ОПТИМИЗАЦИЯ ОБЪЕМНОЙ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ ПОЛУПРОСТРАНСТВА, НАГРУЖЕННОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКИ РАСПРЕДЕЛЕННЫМ КОНТАКТНЫМ ДАВЛЕНИЕМ И НЕКОНТАКТНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

*В работе рассмотрено численно-аналитическое моделирование напряженно-деформированного состояния и состояния объемной повреждаемости полупространства при одновременном его нагружении эллиптически распределенной нагрузкой, направленной по нормали к поверхности, и неконтактном растяжении/сжатии вдоль одной из координатных осей, параллельной поверхности. Показана зависимость значений опасных объемов и интегральной повреждаемости от количества граничных элементов на поверхности полупространства и от количества элементарных объемов в трехмерной расчетной сетке. Найдены соотношения максимального контактного давления и неконтактных напряжений, при которых значения опасных объемов минимальны.*

**Ключевые слова:** трибофатика, метод граничных элементов, численно-аналитическое моделирование, напряженно-деформированное состояние, объемная повреждаемость

**Введение.** Переход к интеллектуальным технологиям проектирования, расчета, создания технических систем требует развития существующих и создания новых методов и методик анализа сложного напряженно-деформированного состояния деталей и узлов, работающих в условиях комплексного нагружения силовыми факторами различной природы. Одновременное воздействие нескольких нагрузок, как показано в работах [1–6], может существенным образом не только, как обычно ожидается, уменьшить, но и увеличить долговечность системы. В рамках методологии трибофатики разрабатываются механико-математические модели и численно-аналитические методы расчета и анализа пространственного напряженно-деформированного состояния и объемной повреждаемости подобных систем, подверженных многофакторному силовому воздействию.

**Постановка задачи.** Рассмотрим упругое изотропное полупространство с введенной прямо-

угольной системой координат  $Oxyz$  и  $z > 0$ . При контактном взаимодействии полупространства и тела вращения, ограниченного поверхностью второго порядка, и при отсутствии трения между ними распределение контактного давления  $p(x, y)$  имеет вид

$$p(x, y) = p_0 \sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2}, \quad (1)$$

где  $p_0$  — давление в центре площадки контакта;  $a, b$  — полуоси площадки контакта, которые определяются с учетом величины прижимающей силы и формы ограничивающей поверхности.

Кроме действия нормального давления (1) на поверхность, рассмотрим также растяжение/сжатие полупространства вдоль оси  $Ox$  нормальными напряжениями  $\sigma_{xx}$  (рисунок 1). В силу принципа суперпозиции напряжение в любой точке полупространства можно определить как:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^p + \delta_{ij} \sigma_0, \quad (2)$$

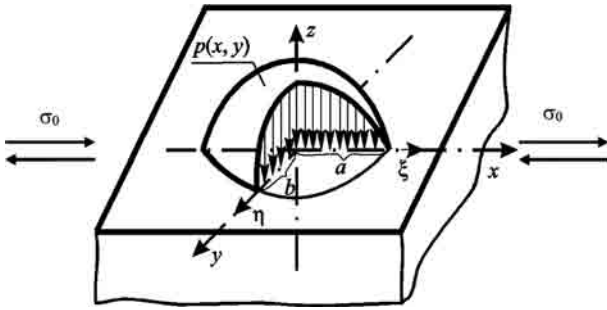


Рисунок 1 — Схема нагружения полупространства  
Figure 1 — Half-space loading scheme

где  $\sigma_{ij}$  — напряжения от действия нагрузки вида (1);

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & ij = xx, \\ 0, & ij \neq xx. \end{cases}$$

**Напряженное состояние.** В работе [2] получены аналитические выражения для определения напряженного состояния в любой точке полупространства при действии на его поверхность равномерно распределенной по прямоугольнику нагрузки, направленной вдоль оси Oz. Также в работе [2] описан алгоритм определения напряженного состояния для произвольно распределенной нагрузки. Данная нагрузка моделировалась в виде кучно-равномерного распределения поверхностных усилий по прямоугольным граничным элементам (ГЭ). Затем для получения значений напряжений в каждой расчетной точке полупространства строилась суперпозиция напряженных состояний от всех указанных ГЭ. Точное решение для нормального напряжения  $\sigma_{zz}$  вдоль оси Oz под центром контакта от давления (1) имеет вид

$$\sigma_{zz} = -p_0 \frac{ab}{\sqrt{a^2 + z^2} \sqrt{b^2 + z^2}}. \quad (3)$$

Гранично-элементное моделирование проводилось на равномерной квадратной сетке для соотношения полуосей  $a/b = 2$  и при разбиении большей полуоси на 10 граничных элементов (ГЭ).

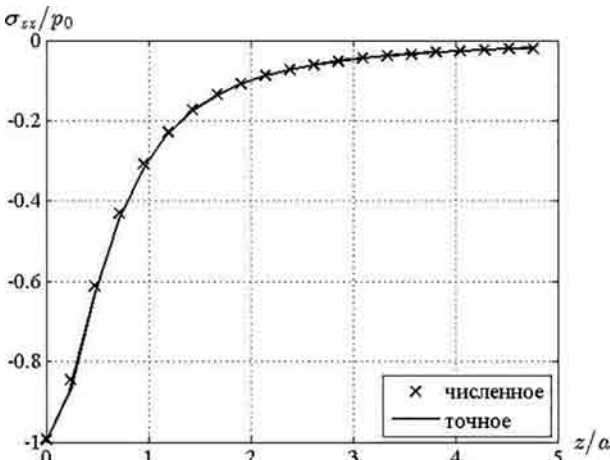


Рисунок 2 — Распределение напряжения  $\sigma_{zz}$  вдоль оси Oz  
Figure 2 — Distribution of  $\sigma_{zz}$  voltage along the Oz axis

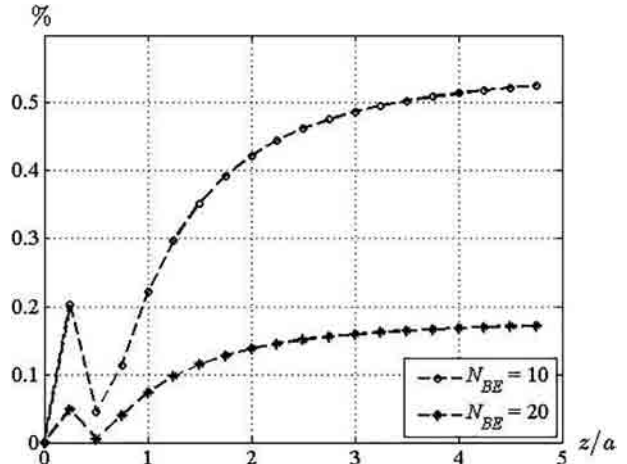


Рисунок 3 — Погрешность вычисления  $\sigma_{zz}$  вдоль оси Oz  
Figure 3 — Calculation error of  $\sigma_{zz}$  along the Oz axis

На рисунке 2 представлено сравнение численно-аналитического решения для  $\sigma_{zz}$  с точным, а на рисунке 3 — относительная погрешность для 10 и 20 ГЭ, определенная по формуле

$$\varepsilon = \left| \frac{\sigma_{zz} - \sigma_{zz}^{num}}{\sigma_{zz}} \right| \cdot 100 \%,$$

где  $\sigma_{zz}$  — точное решение (3);  $\sigma_{zz}^{num}$  — численно-аналитическое решение.

Как видно из рисунка 3, относительная погрешность численного моделирования стремится к 0 на поверхности полупространства. С увеличением отношения  $z/a$  погрешность возрастает, но выходит на некоторое асимптотическое значение. Кроме того, из рисунка 3 следует, что при увеличении количества ГЭ вдвое, погрешность моделирования уменьшается почти в 3 раза.

Интенсивность распределения напряжений вдоль оси Oz, определенная по формуле

$$\sigma_{int} = 1/\sqrt{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \quad (4)$$

для двух сеток ГЭ, представлена на рисунке 4.

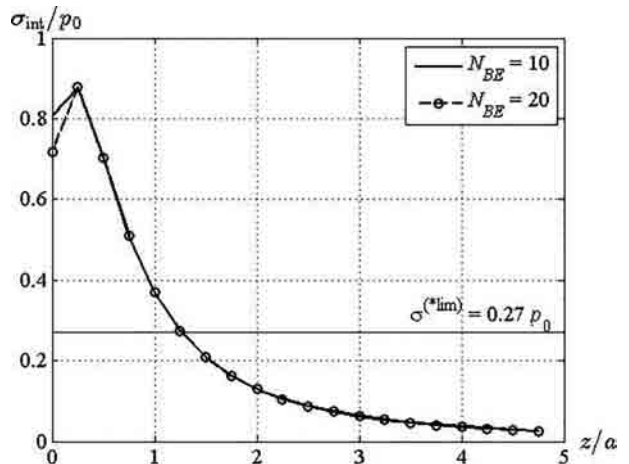


Рисунок 4 — Интенсивность напряжений  
Figure 4 — Stress intensity

**Объемная повреждаемость.** Общая модель объемной повреждаемости среды (деформируемого твердого тела) и выражения для определения соответствующих количественных характеристик представлены в работе [2]. В соответствии с данной моделью повреждаемость деформируемого тела (полупространства) определяется опасным объемом — множеством точек (элементарных объемов) тела, в которых действующие напряжения превышают предельные.

В настоящей работе повреждаемость полупространства в области приложения распределенной нагрузки определялась по интенсивности напряжений, определенных по формуле (4). Выражения для вычисления опасного объема ( $V_{\text{int}}$ ) и интегральной повреждаемости ( $\Psi_{\text{int}}$ ) имеют вид [2, 7–11]

$$V_{\text{int}} = \int_{\sigma_{\text{int}} \geq \sigma^{(*\text{lim})}} dV; \quad \Psi_{\text{int}} = \int_{\sigma_{\text{int}} \geq \sigma^{(*\text{lim})}} \frac{\sigma_{\text{int}}}{\sigma^{(*\text{lim})}} dV, \quad (5)$$

где  $\sigma^{(*\text{lim})}$  — предельные напряжения.

При определении повреждаемости материала, испытываемого на контактную усталость, в работе [3] предельные нормальные и касательные напряжения, соответствующие пределу усталости, составляли 0,3 и 0,03 от максимального значения контактного давления  $p_0$  соответственно, т. е.

$$\sigma_n^{(*\text{lim})} = 0,3 p_0; \quad \sigma_\tau^{(*\text{lim})} = 0,03 p_0.$$

Подставляя данные значения в формулу (4), получим  $\sigma_{\text{int}}^{(*\text{lim})} = 0,27 p_0$ . Соответствующий уровень предельных напряжений показан на рисунке 4 сплошной горизонтальной линией.

Интегралы (5) вычислить аналитически весьма затруднительно, поэтому использовалась следующая численная процедура.

1. В полупространстве выделялась область  $\bar{D}$ , содержащая в себе опасный объем  $D(V_{\text{int}})$ , т. е.  $D(V_{\text{int}}) \subset \bar{D}$ ;

2. По области  $\bar{D}$  строилась расчетная сетка с шагами  $h_x, h_y, h_z$  по осям  $Ox, Oy$  и  $Oz$  соответственно.

3. Вычислялась интенсивность напряжений в каждом узле  $A(x_i, y_j, z_k)$  сетки.

4. Определялось количество точек  $n$  (количество одинаковых по размерам элементарных объемов), в которых действующая интенсивность напряжений превышает предельное значение  $\sigma_{\text{int}}^{(*\text{lim})}$ .

5. Величина опасного объема  $V_{\text{int}}$  определялась по формуле

$$V_{\text{int}} = n \cdot dV,$$

где  $dV$  — элементарный опасный объем;

6. Интегральная повреждаемость  $\Psi_{\text{int}}$  определялась по формуле

$$\Psi_{\text{int}} = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{k=1}^{n_z} \psi(x_i, y_j, z_k) dV,$$

где  $n_x, n_y, n_z$  — количество узлов расчетной сетки по осям  $Ox, Oy$  и  $Oz$  соответственно;  $\psi(A)$  — функ-

ция локальной повреждаемости среды в точке  $A(x, y, z)$ , определяемая как

$$\psi(A) = \begin{cases} \sigma_{\text{int}}(A)/\sigma^{(*\text{lim})}, & \sigma_{\text{int}}(A) \geq \sigma^{(*\text{lim})}, \\ 0, & \sigma_{\text{int}}(A) < \sigma^{(*\text{lim})}. \end{cases}$$

Отметим, что в рассматриваемом случае элементарным опасным объемом  $dV$  является объем одной ячейки построенной трехмерной сетки.

Рассмотрим теперь вопрос о сеточной сходимости численной процедуры вычисления повреждаемости в зависимости от плотности гранично-элементарной сетки и плотности расчетной сетки элементарных объемов для полупространства.

Вычислительный эксперимент был проведен для соотношения полуосей площадки контакта  $a/b = 2$  и регулярных ГЭ сеток при разбиении большой полуоси  $a$  на  $N_{BE}$ , равное 10, 20 и 30 элементам. Расчетные сетки для полупространства в области нагружения распределенной нагрузкой строились для  $h_x = h_y = h_z = h$ . Область  $\bar{D}$  была взята как

$$\bar{D} = \{(x, y, z): -2a \leq x \leq 2a, -2b \leq y \leq 2b, 0 \leq z \leq 1,5a\}.$$

Для проведения сравнительного анализа обе количественные характеристики повреждаемости были отнесены к величине контактной нагрузки

$$P = \frac{2}{3} \pi p_0 ab.$$

На рисунках 5 и 6 представлены графики изменения величин  $V_{\text{int}}/P$  и  $\Psi_{\text{int}}/P$  соответственно в зависимости от количества расчетных узлов  $n_x$  в полупространстве вдоль оси  $Ox$ , т. е. от плотности сетки расчетной сетки элементарных объемов, для трех значений  $N_{BE}$ .

Как видно из графиков 5 и 6, при увеличении как количества граничных элементов, так и узлов расчетной сетки элементарных объемов в полупространстве изменение значений величин  $V_{\text{int}}/P$  и  $\Psi_{\text{int}}/P$  находится в пределах 1,3%

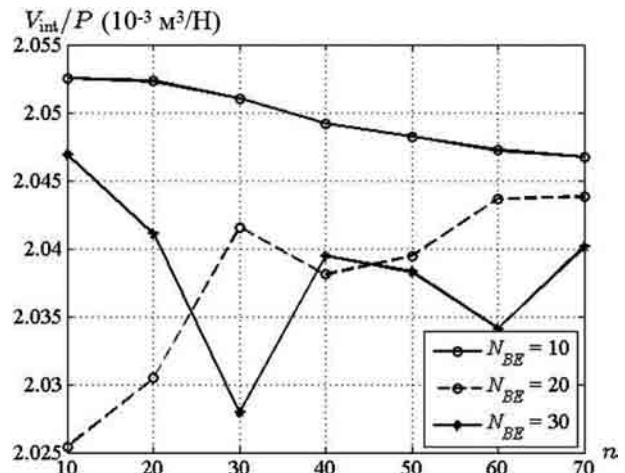


Рисунок 5 — Опасный объем  
Figure 5 — Dangerous volume

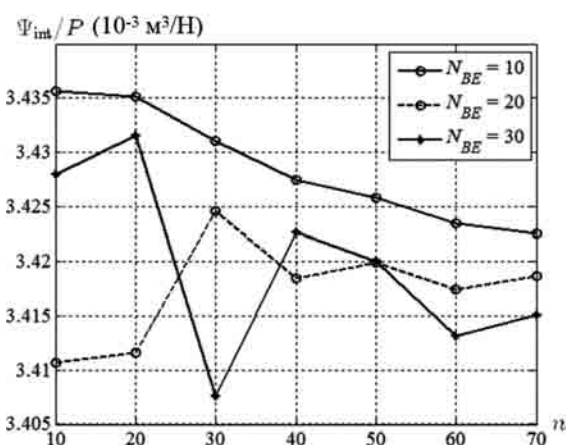


Рисунок 6 — Интегральная повреждаемость  
Figure 6 — Integrated damage

для опасного объема и 0,8% для интегральной повреждаемости по отношению к своим наименьшим значениям. Причем, при увеличении количества расчетных узлов для элементарных объемов в полупространстве вариация значений для разного количества ГЭ уменьшается и при  $n = 70$  составляет 0,34% для опасного объема и 0,37% для интегральной повреждаемости. Данный факт обусловлен тем, что при увеличении количества узлов расчетной сетки, увеличивается количество элементарных объемов, что, в свою очередь, приводит к более точной аппроксимации геометрической фигуры, задаваемой неравенством  $\sigma_{int}(A) \geq \sigma^{(lim)}$ . Указанные результаты свидетельствуют о сеточной сходимости вычислительного процесса как по гранично-элементной сетке, так и по расчетной сетке элементарных объемов для полупространства.

Любая трибофатическая система характеризуется тем, что она подвергается многофакторному воздействию силовых факторов. В данной работе проведено исследование контактного нагружения полупространства и его одновременного растяжения/сжатия напряжением  $\sigma_0$ , действующим вдоль оси  $Ox$ . Компоненты тензора напряжений находятся по формуле (2). На рисунках 7 и 8 представлены картины изменения величин опасного объема и интегральной повреждаемости по интенсивности напряжений в окрестности зоны контактного давления при изменении отношения  $\sigma_0/p_0$  (неконтактного нагружения) от  $-0,27$  до  $0,27$ .

Как видно из рисунков 7 и 8, изменение показателей повреждаемости имеет квазипараболический характер. Наименьшие значения опасного объема и интегральной повреждаемости достигаются при соотношении  $\sigma_0/p_0 = 0,08$  и  $\sigma_0/p_0 = 0,09$  соответственно. На основании данного факта может быть сделан вывод, что добавлением к телу, находящемуся в напряженном состоянии под действием контактных усилий, дополнительного поля небольших растягивающих напряжений можно снизить его повреждаемость.

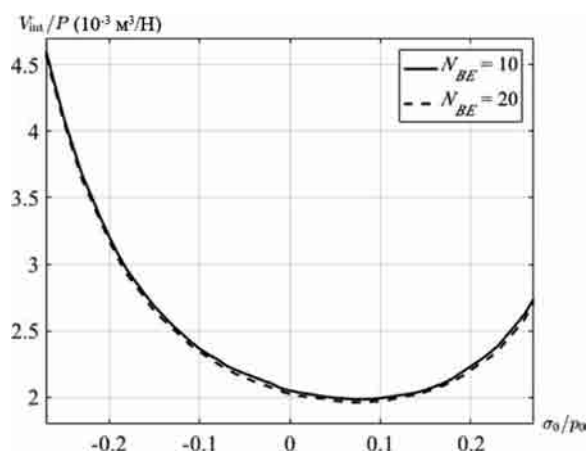


Рисунок 7 — Изменение величины опасного объема  
Figure 7 — Dangerous volume change

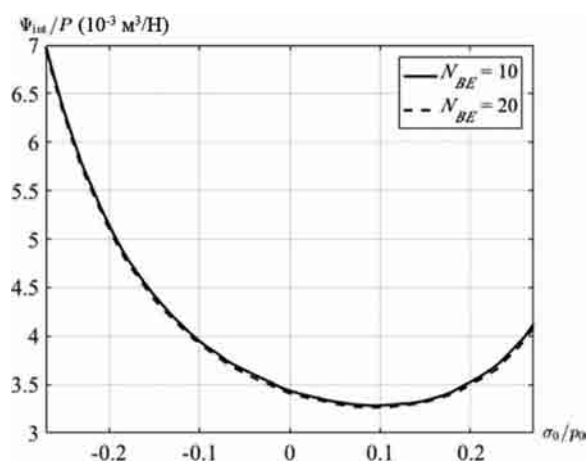


Рисунок 8 — Изменение величины интегральной повреждаемости  
Figure 8 — Integrated damage change

**Заключение.** Проведено численно-аналитическое гранично-элементное моделирование напряженно-деформированного состояния полупространства при одновременном его нагружении эллиптически распределенной нагрузкой, направленной по нормали к поверхности, и неконтактном растяжении/сжатии вдоль координатной оси, параллельной поверхности.

С помощью модели (5) показана сеточная сходимость процесса вычислений опасного объема  $V_{int}$  и интегральной повреждаемости  $\Psi_{int}$  как по гранично-элементной сетке, так и по расчетной сетке элементарных объемов для полупространства.

При изменении отношения максимального контактного давления и неконтактных напряжений  $\sigma_0/p_0$  от  $-0,27$  до  $0,27$  изменение  $V_{int}$  и  $\Psi_{int}$  имеет квазипараболический характер. При этом наименьшие значения опасного объема и интегральной повреждаемости достигаются при соотношении  $\sigma_0/p_0 = 0,08$  и  $\sigma_0/p_0 = 0,09$  соответственно. Таким образом, дополнительное поле небольших неконтактных растягивающих напряжений в окрестности контактного взаимодействия позволяет снизить ее повреждаемость.

## Список литературы

1. Sosnovskiy, L.A. *Mechanothermodynamics* / L.A. Sosnovskiy, S.S. Sherbakov. — Springer, 2016. — 155 p.
2. Щербаков, С.С. Механика трибофатических систем / С.С. Щербаков, Л.А. Сосновский. — Минск: БГУ, 2011. — 407 с.
3. Сосновский, Л.А. Механика износоусталостного повреждения / Л.А. Сосновский. — Гомель: БелГУТ, 2007. — 434 с.
4. Methods and main results of Tribo-Fatigue tests / L.A. Sosnovskiy [et al.] // *International Journal of Fatigue*. — 2014. — Vol. 66. — Pp. 207–219.
5. Sosnovskiy, L.A. Vibro-impact in rolling contact / L.A. Sosnovskiy, S.S. Sherbakov // *Journal of Sound and Vibration*. — 2007. — Vol. 308, Is. 3–5. — Pp. 489–503.
6. Sherbakov, S.S. Interaction of Several Bodies as Applied to Solving Tribo-Fatigue Problems / S.S. Sherbakov, M.A. Zhuravkov // *Acta Mechanica*, —2013. — Vol. 224, No. 3. — Pp. 1541–1553.
7. Zhuravkov, M.A. Modeling of volumetric damage of multi-element clamp-knife-base tribo-fatigue system / M.A. Zhuravkov, S.S. Sherbakov, A.V. Krupoderov // *Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM)*. — 2017. — Pp. 60–69.
8. Щербаков, С.С. Моделирование повреждаемости методом конечных элементов при одновременном действии контактных и неконтактных нагрузок // С.С. Щербаков / *Инженерно-физический журнал*. — 2012. — Т. 85, № 4. — С. 437–441.
9. Щербаков, С.С. Состояние объемной поврежденности трибофатической системы / С.С. Щербаков // *Проблемы прочности*. — 2013. — № 2. — С. 70–79.
10. Sosnovskiy, L.A. Mechanothermodynamical system and its behavior / L.A. Sosnovskiy, S.S. Sherbakov // *Continuum Mech. Thermodyn.* — 2012. — Vol. 24, Is. 3. — Pp. 239–256.
11. Sosnovskiy, L.A. Mechanothermodynamic Entropy and Analysis of Damage State of Complex Systems/ L.A. Sosnovskiy, S.S. Sherbakov // *Entropy*. — 2016. — Vol. 18 (7), 268. — Pp. 1–34.

SHERBAKOV Sergei S., D. Sc. in Phys. and Math., Assoc. Prof.

Vice-Chairman<sup>1</sup>

Professor of the Department of Theoretical and Applied Mechanics<sup>2</sup>

E-mail: sherbakovss@mail.ru

<sup>1</sup>State Committee on Science and Technology of the Republic of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

<sup>2</sup>Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

Received 16 July 2018.

## OPTIMIZATION OF VOLUME DAMAGEABILITY OF THE HALF-SPACE LOADED BY ELLIPTICALLY DISTRIBUTED CONTACT PRESSURE AND NON-CONTACT STRESSES

*The paper considers numerical and analytical modeling of the stress-strain state and the state of volume damageability of a half-space under its simultaneous loading by elliptically distributed load directed along the normal to the surface axis and non-contact extension/compression along one of the coordinate axes parallel to the surface. The dependence of the values of dangerous volumes and integral damageability on the number of boundary elements on the surface of a half-space and on the number of elementary volumes in the three-dimensional computational domain is shown. The ratios of maximum contact pressure and non-contact stresses are obtained at which the values of dangerous volumes are minimal.*

**Keywords:** tribo-fatigue, boundary element method, numerical and analytical modeling, stress-strain state, volume damageability

### References

1. Sosnovskiy L.A., Sherbakov S.S. *Mechanothermodynamics*. Springer, 2016. 155 p.
2. Sherbakov S.S., Sosnovskiy L.A. *Mekhanika tribofaticheskikh sistem* [Mechanics of tribo-fatigue systems]. Minsk, BSU Publ., 2011. 407 p.
3. Sosnovskiy L.A. *Mekhanika iznosoustalostnogo povrezhdeniya* [Mechanics of wear-fatigue damage]. Gomel, BelSUT Publ., 2007. 434 p.
4. Sosnovskiy L.A., Bogdanovich A.V., Yelovoy O.M., Tyurin S.A., Komissarov V.V., Sherbakov S.S. Methods and main results of Tribo-Fatigue tests. *International Journal of Fatigue*, 2014, vol. 66, pp. 207–219.
5. Sosnovskiy L.A., Sherbakov S.S. Vibro-impact in rolling contact. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, vol. 308, issues 3–5, pp. 489–503.
6. Sherbakov S.S., Zhuravkov M.A. Interaction of Several Bodies as Applied to Solving Tribo-Fatigue Problems. *Acta Mechanica*, 2013, vol. 224, no. 3, pp. 1541–1553.
7. Zhuravkov M.A., Sherbakov S.S., Krupoderov A.V. Modeling of volumetric damage of multielement clamp-knife-base tribo-fatigue system. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2017, pp. 60–69.
8. Sherbakov S.S. Modelirovanie povrezhdaemosti metodom konechnykh elementov pri odnovremennom deystvii kontaknykh i nekontaknykh nagruzok [Simulation of damage with the help of the finite element method under the simultaneous action of contact and non-contact loads]. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal* [Engineering and technical journal], 2012, vol. 85, no. 4, pp. 437–441.
9. Sherbakov S.S. Sostoyanie obemnoy povrezhdenosti tribofaticheskoy sistemy [State of volumetric damage of tribo-fatigue system]. *Problemy prochnosti* [Problems of strength], 2013, no. 2, pp. 70–79.
10. Sosnovskiy L.A., Sherbakov S.S. Mechanothermodynamical system and its behavior. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 2012, vol. 24, issue 3, pp. 239–256.
11. Sosnovskiy L.A., Sherbakov S.S. Mechanothermodynamic Entropy and Analysis of Damage State of Complex Systems. *Entropy*, 2016, vol. 18(7), 268, pp. 1–34.