

ДИНАМИКА, ПРОЧНОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК 539.3

Ю.М. ПЛЕСКАЧЕВСКИЙ, член-корр. НАН Беларуси, д-р техн. наук, проф.
заведующий кафедрой «Микро- и нанотехника»¹
E-mail: pleskym@mail.ru

Э.И. СТАРОВОЙТОВ, д-р физ.-мат. наук, проф.
заведующий кафедрой «Строительная механика»²
E-mail: edstar0@yandex.by

Д.В. ЛЕОНЕНКО, д-р физ.-мат. наук, доц.
профессор кафедры «Строительная механика»²
E-mail: leoden@tut.by

¹Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Республика Беларусь

²Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 30.06.2019.

ИЗОТЕРМИЧЕСКОЕ ЛОКАЛЬНОЕ НАГРУЖЕНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

Рассмотрено воздействие круговой, кольцевой и погонной равномерно распределенных осесимметричных нагрузок на круговую трехслойную несимметричную по толщине пластину. Аналитический вид нагрузок описан с помощью функции Хевисайда. Материалы несущих слоев пластины приняты упругопластическими, заполнитель — физически нелинейным. Для описания кинематики пакета используются гипотезы ломаной нормали. В тонких несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа. В несжимаемом по толщине относительно толстом заполнителе выполняется гипотеза Тимошенко о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. Учитывается работа заполнителя в тангенциальном направлении. Приведена постановка соответствующей краевой задачи. Уравнения равновесия получены вариационным методом Лагранжа. Сформулированы граничные условия на контуре пластины. Решение краевой задачи сведено к нахождению трех искоемых функций — прогиба, сдвига и радиального перемещения срединной плоскости заполнителя. Для этих функций получена неоднородная система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Ее решение проведено методом упругих решений Ильюшина. Показано, что уже пятое приближение можно принять за искомое решение, т. к. его отличие от предыдущего не превышает 1 %. Итерационные аналитические решения получены в функциях Бесселя. Проведен их параметрический анализ. Численные результаты получены для пластины, слои которой набраны из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т, механические характеристики которых, включая функции нелинейности, были получены ранее. Граничные условия соответствуют шарнирному опиранию контура пластины. Исследовано влияние физической нелинейности материалов слоев на перемещения в пластине. Показано, что увеличение расчетных перемещений при упругопластическом деформировании в пластине составляет до 20 %.

Ключевые слова: трехслойная круговая пластина, круговые и кольцевые нагрузки, упругость, пластичность

Введение. Современные требования оценки прочностных характеристик композитных конструкций, работающих в условиях комплексных внешних воздействий, обуславливают необходимость создания соответствующих расчетных мо-

делей описания их физически линейного и нелинейного деформирования при различного вида нагрузках, в том числе локальных.

Этой проблеме посвящен ряд публикаций. Свободные, вынужденные колебания и дина-

мические напряжения в трехслойных пластинах и оболочках исследовались в статьях [1–8]. Изотермическое квазистатическое деформирование упругих и упругопластических трехслойных элементов конструкций при непрерывных, локальных и переменных нагрузках рассматривалось в работах [9–15]. Термосиловому квазистатическому воздействию на упругие трехслойные стержни и пластины посвящены публикации [16–20]. Более подробный обзор публикаций по механике трехслойных элементов конструкций содержится в статье [21].

Здесь приведена постановка и получены аналитические решения краевых задач о деформировании трехслойной круговой пластины с физически нелинейными материалами слоев осесимметричной равномерно распределенной круговой и кольцевой нагрузками, а также кольцевой погонной нагрузкой. Численная апробация решения проведена в случае металлополимерного пакета пластины.

Постановка задачи. Внешние несущие слои не симметричной по толщине трехслойной круговой пластины предполагаются тонкими, толщиной $h_1 \neq h_2$. Для них принимаются гипотезы Кирхгофа о несжимаемости, прямолинейности и перпендикулярности деформированной нормали к срединной поверхности. Заполнитель считается жестким, достаточно толстым ($h_3 = 2c$). Для него справедлива гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали, которая поворачивается относительно срединной поверхности на некоторый угол $\psi(r)$. Учтена работа заполнителя в тангенциальном направлении. Постановка задачи и ее решение проводится в цилиндрической системе координат r, φ, z . Срединная плоскость заполнителя принимается за координатную, ось z направлена перпендикулярно вверх, к первому слою.

К наружной поверхности первого слоя ($z = c + h_1$) приложена локальная нагрузка интенсивности $q(r)$. В силу симметрии нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют: $u_\varphi^{(k)} = 0$ ($k = 1, 2, 3$ — номер слоя), а прогиб пластины w , относительный сдвиг в заполнителе ψ и радиальное перемещение координатной поверхности u не зависят от координаты φ . В дальнейшем эти функции $w(r), u(r), \psi(r)$ считаем искомыми. Все перемещения и линейные размеры пластины отнесены к ее радиусу r_0 . На контуре предполагается жесткая диафрагма, препятствующая относительному сдвигу слоев ($\psi = 0$ при $r = 1$).

Выражения для радиальных перемещений в слоях $u_r^{(k)}$ через искомые функции получены исходя из гипотезы прямолинейности нормали заполнителя:

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r}, \quad c \leq z \leq c + h_1; \\ u_r^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,r}, \quad -c \leq z \leq c; \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r}, \quad -c - h_2 \leq z \leq -c, \end{aligned} \quad (1)$$

где z — координата рассматриваемого волокна; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Выражения для деформаций через искомые функции получим из соотношений Коши [22] и формул (1). Для связи напряжений и деформаций в слоях пластины используются следующие нелинейные физические уравнения состояния:

$$\begin{aligned} s_\alpha^{(k)} &= 2G_k(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}))\varepsilon_\alpha^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k\varepsilon^{(k)}; \\ s_{r\varphi}^{(3)} &= 2G_3(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(3)}))\varepsilon_{r\varphi}^{(3)} \quad (k=1, 2, 3; \alpha=r, \varphi), \end{aligned} \quad (2)$$

где $s_\alpha^{(k)}, \varepsilon_\alpha^{(k)}$ — девиаторные, $\sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$ — шаровые части тензоров напряжений и деформаций; G_k, K_k — модули сдвига и объемного деформирования; $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)})$ — функции физической нелинейности материалов слоев, которые при $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}$ следует положить равными нулю; $\varepsilon_u^{(k)}$ — интенсивность деформаций; $\varepsilon_y^{(k)}$ — деформационный предел текучести (физической нелинейности); $s_{r\varphi}^{(3)}, \varepsilon_{r\varphi}^{(3)}$ — касательное напряжение и сдвиговая деформация в заполнителе.

С помощью соотношений (2) компоненты тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}, \sigma_{r\varphi}^{(3)}$ выражаются через девиаторную и шаровую части тензора деформаций:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^{(k)} &= 2G_k\varepsilon_\alpha^{(k)}(1 - \omega^{(k)}) + 3K_k\varepsilon^{(k)} \quad (k=1, 2, 3); \\ \sigma_{r\varphi}^{(3)} &= s_{r\varphi}^{(3)} = 2G_3\varepsilon_{r\varphi}^{(3)}(1 - \omega^{(3)}) \quad (\alpha=r, \varphi). \end{aligned}$$

Выделим в них линейные (индекс «e») и нелинейные (индекс «o») составляющие:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^{(k)} &= \sigma_{\alpha e}^{(k)} - \sigma_{\alpha o}^{(k)}, \quad \sigma_{r\varphi}^{(3)} = \sigma_{r\varphi e}^{(3)} - \sigma_{r\varphi o}^{(3)}; \\ \sigma_{\alpha e}^{(k)} &= 2G_k\varepsilon_\alpha^{(k)} + 3K_k(\varepsilon^{(k)} - \alpha_k T); \quad \sigma_{\alpha o}^{(k)} = 2G_k\omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T)\varepsilon_\alpha^{(k)}; \\ \sigma_{r\varphi e}^{(3)} &= 2G_3\varepsilon_{r\varphi}^{(3)}; \quad \sigma_{r\varphi o}^{(3)} = 2G_3\omega_3(\varepsilon_u^{(3)}, T)\varepsilon_{r\varphi}^{(3)} \quad (\alpha=r, \varphi). \end{aligned} \quad (3)$$

Обобщенные внутренние усилия и моменты вводятся формулами:

$$\begin{aligned} T_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz; \\ M_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz; \\ H_\alpha &= M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}); \quad Q = \int_{-c}^c \sigma_{r\varphi}^{(3)} dz. \end{aligned} \quad (4)$$

Система уравнений равновесия аналогичной упругой трехслойной пластины в обобщенных усилиях (4) получена в [18] без использования уравнений связи напряжений и деформаций, поэтому она остается справедливой и в рассматриваемом случае. Подставив в нее обобщенные внутренние усилия (4), разложенные на линейные (индекс «e») и нелинейные (индекс «o») компоненты, получим:

$$\begin{aligned} T_{re,r} + \frac{1}{r}(T_{re} - T_{\varphi e}) &= p_o; \quad H_{re,r} + \frac{1}{r}(H_{re} - H_{\varphi e}) - Q = h_o; \\ M_{re,rr} + \frac{1}{r}(2M_{re,r} - M_{\varphi e,r}) &= -q + q_o, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$T_{\alpha} = T_e - T_{\omega} = \sum_{k=1}^3 T_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 T_{\alpha \omega}^{(k)},$$

$$M_{\alpha} = M_e - M_{\omega} = \sum_{k=1}^3 M_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 M_{\alpha \omega}^{(k)},$$

$$H_e = M_{\alpha e}^{(3)} + c(T_{\alpha e}^{(1)} - T_{\alpha e}^{(2)});$$

$$H_{\omega} = M_{\alpha \omega}^{(3)} + c(T_{\alpha \omega}^{(1)} - T_{\alpha \omega}^{(2)}) \quad (\alpha = r, \varphi).$$

Величины $T_{\alpha e}^{(k)}$, $T_{\alpha \omega}^{(k)}$, $M_{\alpha e}^{(k)}$, $M_{\alpha \omega}^{(k)}$, $H_{\alpha e}^{(k)}$, $H_{\alpha \omega}^{(k)}$, Q_e , Q_{ω} вычисляются по формулам (4), в которых напряжения $\sigma_{\alpha e}^{(k)}$ заменены соответственно на $\sigma_{\alpha e}^{(k)}$, $\sigma_{\alpha \omega}^{(k)}$, $\sigma_{r\alpha e}^{(3)}$, $\sigma_{r\alpha \omega}^{(3)}$ из соотношений (3). Подставив в линейные составляющие обобщенных усилий (индекс «e») напряжения, выраженные через деформации, получим формулы, связывающие их с искомыми функциями: $u(r)$, $\psi(r)$, $w(r)$. Отправив полученное в левую часть системы (5), имеем:

$$L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) = p_{\omega};$$

$$L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) - 2cG_3 \psi = h_{\omega}; \quad (6)$$

$$L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) = -q + q_{\omega},$$

где коэффициенты a_i выражаются через геометрические и упругие характеристики материалов слоев по формулам, приведенным в [22].

Нелинейные добавки в системе (6) сосредоточены справа и включены в слагаемые с нижним индексом « ω »:

$$p_{\omega} = T_{r\omega, r} + \frac{1}{r}(T_{r\omega} - T_{\varphi\omega});$$

$$h_{\omega} = H_{r\omega, r} + \frac{1}{r}(H_{r\omega} - H_{\varphi\omega}) - Q_{\omega}; \quad (7)$$

$$q_{\omega} = M_{r\omega, rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega, r} - M_{\varphi\omega, r}).$$

Краевая задача определения функций $u(r)$, $\psi(r)$, $w(r)$ замыкается присоединением к системе уравнений (6) силовых или кинематических граничных условий.

Общее решение задачи. Полученная система дифференциальных уравнений (6) является нелинейной, поэтому для ее решения необходимо применять численные или приближенные методы. Здесь использован метод упругих решений, сходимость которого доказана в широких пределах. В итерационном виде эта система будет иметь вид:

$$L_2(a_1 u^{(n)} + a_2 \psi^{(n)} - a_3 w_{,r}^{(n)}) = p_{\omega}^{(n-1)};$$

$$L_2(a_2 u^{(n)} + a_4 \psi^{(n)} - a_5 w_{,r}^{(n)}) - 2cG_3 \psi^{(n)} = h_{\omega}^{(n-1)}; \quad (8)$$

$$L_3(a_3 u^{(n)} + a_5 \psi^{(n)} - a_6 w_{,r}^{(n)}) = -q + q_{\omega}^{(n-1)},$$

где n — номер приближения, величины $p_{\omega}^{(n-1)}$, $h_{\omega}^{(n-1)}$, $q_{\omega}^{(n-1)}$ называют «дополнительными» внешними нагрузками и на первом шаге полагают равными нулю, а в дальнейшем вычисляют по результатам предыдущего приближения. При этом используют формулы типа (7), в которых во все слагаемые необходимо добавить индекс « $n-1$ » сверху, а входящие в них нелинейные добавки вычислять по формулам:

$$T_{\alpha \omega}^{(n-1)} \equiv \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha \omega}^{(k, n-1)} dz = \sum_{k=1}^3 \int 2G_k \omega_k(\epsilon_{\alpha}^{(k, n-1)}, T_k) \vartheta_{\alpha}^{(k, n-1)} dz;$$

$$M_{\alpha \omega}^{(n-1)} \equiv \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha \omega}^{(k, n-1)} z dz = \sum_{k=1}^3 \int 2G_k \omega_k(\epsilon_{\alpha}^{(k, n-1)}, T_k) \vartheta_{\alpha}^{(k, n-1)} z dz; \quad (9)$$

$$H_{\alpha \omega}^{(n-1)} = M_{\alpha \omega}^{(3, n-1)} + c(T_{\alpha \omega}^{(1, n-1)} - T_{\alpha \omega}^{(2, n-1)});$$

$$Q_{\omega}^{(n-1)} = \int_{-c}^c 2G_k \omega_k(\epsilon_{\alpha}^{(k, n-1)}, T_k) \vartheta_{r\alpha}^{(k, n-1)} dz \quad (\alpha = r, \varphi).$$

В результате на каждом шаге приближения имеем линейную задачу теории упругости для подобной пластины с известными дополнительными «внешними» нагрузками, которые вычисляются по формулам (9).

Процедура нахождения решения линейной системы (8) известна [8]. По аналогии получаем следующее рекуррентное решение задачи для физически нелинейной пластины:

$$\psi^{(n)} = C_2^{(n)} I_1(\beta r) + C_3 K_1(\beta r) + \psi_r^{(n)};$$

$$u^{(n)} = \frac{a_3}{a_1 a_6 - a_3^2} \left[L_3^{-1}(q - q_{\omega}^{(n-1)}) - \frac{a_6}{a_3} L_2^{-1}(p_{\omega}^{(n-1)}) + \left(a_5 - \frac{a_2 a_6}{a_3} \right) \psi^{(n)} + C_7^{(n)} r + \frac{C_8}{r} \right];$$

$$w^{(n)} = \frac{1}{b_3} \left[b_2 \left(\frac{C_2^{(n)}}{\beta} I_0(\beta r) + \int \psi_r^{(n)} dr \right) - \int \left(\frac{a_3}{a_1} L_2^{-1}(p_{\omega}^{(n-1)}) - L_3^{-1}(q - q_{\omega}^{(n-1)}) \right) dr + \frac{1}{4} C_1 r^2 (\ln r - 1) + \frac{C_5^{(n)} r^2}{4} + C_6 \ln r + C_4^{(n)} \right], \quad (10)$$

где $I_1(\beta r)$ — модифицированная функция Бесселя первого порядка; $K_1(\beta r)$ — функция Макдональда; интегралы берутся в пределах от 0 до r ; L_2^{-1} , L_3^{-1} — интегральные операторы, обратные дифференциальным операторам (6):

$$L_2^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r} \int r \int f dr dr;$$

$$L_3^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int r f dr dr dr;$$

$$\psi_r^{(n)}(r) = -K_1(\beta r) \int I_1(\beta r) f^{(n)} r dr + I_1(\beta r) \int K_1(\beta r) f^{(n)} r dr;$$

$$f^{(n)}(r) = \frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[h_{\omega}^{(n-1)} - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} p_{\omega}^{(n-1)} + \frac{b_2}{b_3 r} \int (q - q_{\omega}^{(n-1)}) r dr \right]; \quad \beta^2 = \frac{2c b_3 G_3}{b_1 b_3 - b_2^2};$$

$$b_1 = \frac{a_1 a_4 - a_2^2}{a_1}; \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1}; \quad b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_3^2}{a_1}.$$

Константы интегрирования определяются из граничных условий и ограниченности решения в начале координат.

Локальная нагрузка, равномерно распределенная по кругу [0, b]. Пусть на рассматриваемую трехслойную пластину действует локальная поверхностная нагрузка, равномерно распределенная по кругу относительного радиуса $r \leq b$. Используя функцию Хевисайда, ее можно записать в виде

$$q(r) = q_0 H_0(b-r). \quad (11)$$

Функция $f^{(n)}(r)$, входящая в (10), при нагрузке (11) принимает вид

$$f^{(n)}(r) = \frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[h_0^{(n-1)} - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} p_0^{(n-1)} \right] + \frac{\gamma_1}{r} \left(\frac{q_0 (r^2 - b^2)}{2} H_0(b-r) - \int q_0^{(n-1)} r dr - C_1^{(n)} \right),$$

$$\gamma_1 = \frac{b_2}{(b_1 b_3 - b_2^2)}.$$

Интегральный оператор от нагрузки (11) будет равен:

$$\int L_3^{-1}(q) dr = q_0 \left(\frac{r^4 - 5b^4}{64} + \frac{b^2 r^2}{16} - \left(\frac{b^4}{16} + \frac{b^2 r^2}{8} \right) \ln \left(\frac{r}{b} \right) \right) H_0(b-r). \quad (12)$$

Искомые перемещения в пластине при нагрузке (11) определяются формулами (10), в которых:

$$\begin{aligned} \psi_r^{(n)}(r) &= \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} H_0(b-r) \times \\ &\times \left[\frac{b^2}{r} - r + 2b(K_1(\beta b)I_1(\beta r) - I_1(\beta b)K_1(\beta r)) \right] + \\ &+ \frac{C_1^{(n)} \gamma_1}{\beta^2 r} - K_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int I_1(\beta r) h_0^{(n-1)} r dr - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int I_1(\beta r) p_0^{(n-1)} r dr \right] - \right. \\ &\quad \left. - \gamma_1 \int I_1(\beta r) \left(\int q_0^{(n-1)} r dr \right) dr \right] + I_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\int K_1(\beta r) h_0^{(n-1)} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int K_1(\beta r) p_0^{(n-1)} r dr \right] - \right. \\ &\quad \left. - \gamma_1 \int K_1(\beta r) \left(\int q_0^{(n-1)} r dr \right) dr \right]; \\ \int \psi dr &= \frac{C_2^{(n)} I_0(\beta r)}{\beta} - \frac{C_3^{(n)} K_0(\beta r)}{\beta} + \frac{C_1^{(n)} \gamma_1}{\beta^2} \ln(r) + \\ &+ \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} H_0(b-r) \times \left[\frac{b^2 - r^2}{2} + b^2 \ln \left(\frac{r}{b} \right) \right] + \\ &+ \frac{2b}{\beta} (K_1(\beta b)I_0(\beta r) + I_1(\beta b)K_0(\beta r)) - \frac{2}{\beta^2} \left[- \int \left(K_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int I_1(\beta r) h_0^{(n-1)} r dr - \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int I_1(\beta r) p_0^{(n-1)} r dr \right] - \right. \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} &\left. - \gamma_1 \int I_1(\beta r) \left(\int q_0^{(n-1)} r dr \right) dr \right] + \\ &+ I_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int K_1(\beta r) h_0^{(n-1)} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \int K_1(\beta r) p_0^{(n-1)} r dr \right] - \gamma_1 \int K_1(\beta r) \left(\int q_0^{(n-1)} r dr \right) dr \right] dr. \end{aligned}$$

В случае шарнирного опирания контура пластины из граничных условий $\psi^{(n)} = w^{(n)} = u^{(n)} = 0$, $M = M_r^{(n-1)}$ при $r = 1$ и условий ограниченности решения в центре следуют рекуррентные формулы для констант интегрирования:

$$\begin{aligned} C_1^{(n)} &= -\frac{q_0 b^2}{2}; \quad C_6^{(n)} = \frac{q_0 b^4}{16b_3}; \quad C_8^{(n)} = 0; \\ C_3^{(n)} &= \frac{\gamma_1 q_0}{\beta^2} b I_1(\beta b) + \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left(\int I_1(\beta r) h_0^{(n-1)} r dr - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int I_1(\beta r) p_0^{(n-1)} r dr \right) - \right. \\ &\quad \left. - \gamma_1 \int I_1(\beta r) \left(\int q_0^{(n-1)} r dr \right) dr \right]_{r=0}; \\ C_2^{(n)} &= -\frac{1}{I_1(\beta)} \left(C_3^{(n)} K_1(\beta) + \frac{C_1^{(n)} \gamma_1}{\beta^2} \right) - \frac{1}{I_1(\beta)} \times \\ &\times \left(-K_1(\beta) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int I_1(\beta r) h_0^{(n-1)} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \times \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \int I_1(\beta r) p_0^{(n-1)} r dr \right] - \gamma_1 \int I_1(\beta r) \left(\int q_0^{(n-1)} r dr \right) dr \right]_{r=1} + \\ &+ I_1(\beta) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int K_1(\beta r) h_0^{(n-1)} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \int K_1(\beta r) p_0^{(n-1)} r dr \right] - \gamma_1 \int K_1(\beta r) \left(\int q_0^{(n-1)} r dr \right) dr \right]_{r=1} \Big); \\ C_4^{(n)} &= -\frac{C_1^{(n)}}{4b_3} - \frac{C_5^{(n)}}{4b_3} - \frac{b_2}{b_3} \int \psi^{(n)} dr \Big|_{r=1} - \frac{a_3}{b_3 a_1} \int L_2^{-1}(p_0^{(n-1)}) dr \Big|_{r=1} + \\ &\quad + \frac{1}{b_3} \int L_3^{-1}(q_0^{(n-1)}) dr \Big|_{r=1}; \\ C_5^{(n)} &= 2 \frac{a_7 a_1 + a_3^2}{a_1 (a_6 + a_7)} L_3^{-1}(q_0^{(n-1)}) \Big|_{r=1} - \\ &\quad - \frac{2a_3}{a_1} L_2^{-1}(p_0^{(n-1)}) \Big|_{r=1} + \frac{b_3}{a_6 + a_7} 2(L_3^{-1}(q_0^{(n-1)}))_r \Big|_{r=1} - \\ &\quad - \frac{2b_3}{a_6 + a_7} M_r^{(n-1)} + \left(b_3 - a_7 - \frac{a_3^2}{a_1} \right) \frac{b_3}{a_6 + a_7} \times \\ &\quad \times \left(\frac{C_1^{(n)}}{2b_3} + 2C_6^{(n)} \right); \\ C_7^{(n)} &= -2 \frac{a_6}{b_3 a_1} L_2^{-1}(p_0^{(n-1)}) \Big|_{r=1} + 2 \frac{a_3}{b_3 a_1} L_3^{-1}(q_0^{(n-1)}) \Big|_{r=1} - \\ &\quad - \frac{a_3}{2b_3 a_1} C_1^{(n)} - 2 \frac{a_3}{a_1} C_6^{(n)} - \frac{a_3}{a_1 b_3} C_5^{(n)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Численные результаты получены для пластины, слои которой набраны из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т, их механические харак-

теристики, включая функции нелинейности, приведены в [18]. Граничные условия соответствуют шарнирному опиранию контура пластины. Геометрические параметры пластины отнесены к ее радиусу r_0 , относительные толщины слоев: $h_1 = 0,02$; $h_2 = 0,06$; $h_3 = 0,4$. Расчет проводился по формулам (10)–(14) при нагрузке $q_0 = 12$ МПа. Полученные результаты подтвердили сходимость метода упругих решений. За искомое решение принято 5-е приближение, максимальное отличие которого от 4-го составляет около 0,5 %.

Рисунок 1 иллюстрирует зависимость максимального прогиба рассматриваемой пластины от радиуса b пятна нагрузки: 1 — упругие; 2 — физически нелинейные при различных температурах. С увеличением пятна нагрузки прогиб растет нелинейно, достигая максимума при нагрузке, действующей по всей поверхности внешнего слоя.

Локальная нагрузка, равномерно распределенная по кольцу $[a, b]$. Рассмотрим случай локальной нагрузки, равномерно распределенной по кольцу относительного радиуса $a \leq r \leq b$ (см. рисунок 1). Тогда ее можно записать так:

$$q(r) = q_0 (H_0(b-r) - H_0(a-r)). \quad (15)$$

Искомое решение получено в виде разности двух решений (10), соответствующих составляющим нагрузкам (15).

На рисунке 2 показано изменение прогиба пластины в зависимости от положения кольцевого пятна нагрузки постоянной ширины $b - a = 0,25$ при продвижении его к контуру: 1 — упругие; 2 — физически нелинейные. При $a = 0$ нагрузка распределена по кругу радиуса b , при $a = 0,75$ кольцо нагрузки примыкает к контуру пластины. Максимум прогиба наблюдается при кольцевой нагрузке с внутренним радиусом $a = 0,25$.

Погонная поперечная сила. Пусть на рассматриваемую трехслойную пластину действует погонная поперечная сила $Q(r)$ постоянной интенсивности Q_0 , приложенная вдоль окружности радиуса $r = a$. Итерационное решение построено по решению для пластины при нагрузке (15), в случае устрем-

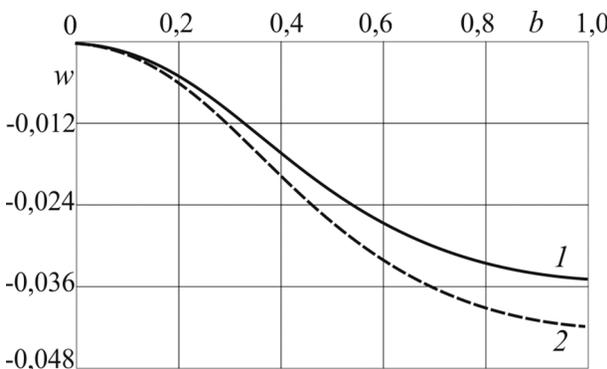


Рисунок 1 — Зависимость максимального прогиба от радиуса b пятна нагрузки
Figure 1 — Dependence of maximum deflection on the radius b of load spot

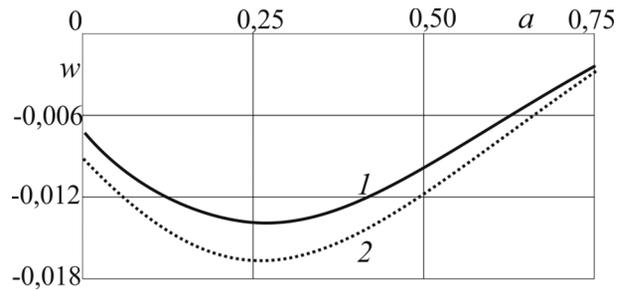


Рисунок 2 — Прогиб пластины в зависимости от положения кольцевой нагрузки
Figure 2 — Deflection of the plate depending on the position of the ring load

ления толщины кольца нагрузки к нулю и сохранении ее модуля:

$$\begin{aligned} \psi^{(n)} &= C_2^{(n)} I_1(\beta r) + C_3^{(n)} K_1(\beta r) + \psi_r^{(n)}; \\ u^{(n)} &= \frac{a_3}{a_1} w^{(n)} r - \frac{a_2}{a_1} \psi^{(n)} + \frac{1}{a_1} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) + \frac{C_7^{(n)} r}{2} + \frac{C_8^{(n)}}{r}; \\ w^{(n)} &= \frac{b_2}{b_3} \int \psi^{(n)} dr + \frac{a_3}{b_3 a_1} \int L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) dr + \\ &+ \frac{1}{b_3} \int L_3^{-1}(Q) dr - \frac{1}{b_3} \int L_3^{-1}(q_\omega^{(n-1)}) dr - \\ &- \frac{C_1^{(n)}}{4b_3} r^2 (\ln r - 1) + \frac{C_5^{(n)} r^2}{4b_3} + C_6^{(n)} \ln r + C_4^{(n)}, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_r^{(n)} &= \frac{\gamma_1 Q_0 a}{\beta} H_0(a-r) \times \\ &\times \left(\frac{1}{\beta r} - K_1(\beta r) I_0(\beta a) - I_1(\beta r) K_0(\beta a) \right) + \\ &+ \frac{C_1^{(n)} \gamma_1}{\beta^2 r} - K_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \times \right. \\ &\times \left[\int I_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int I_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)} r dr \right] - \\ &- \gamma_1 \int I_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)} r dr \right) dr \left. \right] + I_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \times \right. \\ &\times \left[\int K_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int K_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)} r dr \right] - \\ &- \gamma_1 \int K_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)} r dr \right) dr \left. \right]; \\ \int L_3^{-1}(Q) dr &= \frac{Q_0 a}{4} \times \\ &\times \left(r^2 - a^2 - a^2 \ln \left(\frac{r}{a} \right) - r^2 \ln \left(\frac{r}{a} \right) \right) H_0(a-r). \end{aligned}$$

Численные результаты получены в рамках введенных ранее предположений при интенсивности погонной нагрузки $Q_0 = 4$ МН/м.

На рисунке 3 a, b показано изменение сдвига в заполнителе и прогиба рассматриваемой пластины вдоль ее радиуса. Кривые построены в соответствии с формулами (16) при радиусе силовой окружности $a = 0,75$: 1 — упругие; 2 — физически

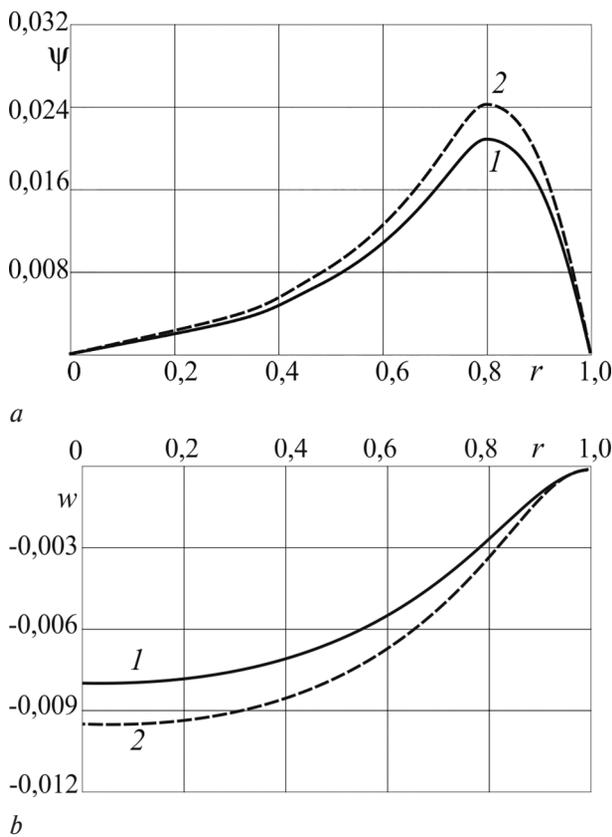


Рисунок 3 — Изменение сдвига в заполнителе и прогиба рассматриваемой пластины вдоль ее радиуса: 1 — упругие; 2 — физически нелинейные перемещения
 Figure 3 — Change of shear in the filler and deflection of the considered plate along its radius: 1 — elastic; 2 — physically nonlinear displacements

нелинейные перемещения. Здесь учет физической нелинейности материалов слоев увеличивает расчетные прогибы на 17 %.

Заключение. Предложенная постановка краевой задачи и полученное общее решение уравнений равновесия упругих трехслойных круговых пластин позволяют исследовать их напряженно-деформированное состояние в температурном поле как при непрерывных, так и при локальных нагрузках. Численные расчеты показали существенное влияние физической нелинейности материалов слоев на перемещения в пластине при рассмотренных видах нагрузки.

Работа выполнена в рамках ГПНИ «Механика, металлургия, диагностика в машиностроении» (задание № 1.40).

Список литературы

- Lugovoi, P.Z. Nonstationary Deformation of Longitudinally and Transversely Reinforced Cylindrical Shells on an Elastic Foundation / P.Z. Lugovoi, Yu.A. Meish // *Int. Appl. Mech.* — 2016. — Vol. 52, No. 1. — Pp. 62–72.
- The oblique impact response of composite sandwich plates / I. Ivañez [et al.] // *Composite Structures.* — 2015. — No. 133. — Pp. 1127–1136.
- Starovoitov, E.I. Vibration of circular sandwich plates under resonance loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // *International Applied Mechanics.* — 2003. — Vol. 39, No. 12. — Pp. 1458–1463.
- Плескачевский, Ю.М. Динамика круговых металлополимерных пластин на упругом основании. Часть I. Свободные колебания / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // *Механика машин, механизмов и материалов.* — 2008. — № 4(5). — С. 48–51.
- Плескачевский, Ю.М. Динамика круговых металлополимерных пластин на упругом основании. Часть II. Вынужденные колебания / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // *Механика машин, механизмов и материалов.* — 2009. — № 1(6). — С. 48–51.
- Колебания круговой металлополимерной пластины, связанной с упругим основанием, при тепловом ударе / Ю.М. Плескачевский [и др.] // *Механика машин, механизмов и материалов.* — 2009. — № 4(9). — С. 50–54.
- Starovoitov, E.I. Resonant effects of local loads on circular sandwich plates on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // *International Applied Mechanics.* — 2010. — Vol. 46, No. 1. — Pp. 86–93.
- Старовойтов, Э.И. Колебания трехслойных цилиндрических оболочек в упругой среде Винклера при резонансе / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Ю.М. Плескачевский // *Механика машин, механизмов и материалов.* — 2013. — № 4(25). — С. 70–73.
- Gorshkov, A.G. Cyclic loading of elastic-plastic bodies in neutron flux / A.G. Gorshkov, E.I. Starovoitov, A.V. Yarovaya // *Mechanics of Solids.* — 2001. — Vol. 36, No. 1. — Pp. 64–70.
- Comparison of Bending Properties for Cellular Core Sandwich Panels / L. Yang [et al.] // *Mater. Sci. Appl.* — 2013. — Vol. 4, No. 8. — Pp. 471–477.
- Lee, C.R. System parameters evaluation of flexibly supported laminated composite sandwich plates / C.R. Lee, S.J. Sun, T.Y. Kam // *AIAA J.* — 2007. — Vol. 45, No. 9. — Pp. 2312–2322.
- Zenkour, A.M. Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates under the Effect of Mechanical and Thermal Loads / A.M. Zenkour, N.A. Alghamdi // *Mech. Adv. Mater. Struct.* — 2010. — Vol. 17, No. 6. — Pp. 419–432.
- Старовойтов, Э.И. Деформирование упругого трехслойного стержня локальными нагрузками / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко // *Проблемы машиностроения и автоматизации.* — 2001. — № 4. — С. 37–40.
- Журавков, М.А. Нелинейное деформирование упруго-пластического трехслойного стержня локальной нагрузкой / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // *Механика машин, механизмов и материалов.* — 2016. — 3(36). — С. 71–79.
- Старовойтов, Э.И. Нелинейное деформирование трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем / Э.И. Старовойтов, Ю.В. Захарчук // *Механика машин, механизмов и материалов.* — 2019. — № 3(48). — С. 26–33.
- Starovoitov, E.I. Thermal-force deformation of a physically nonlinear three-layer stepped rod / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, D.V. Tarlakovskii // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics.* — 2016. — Vol. 89, No. 6. — Pp. 1582–1590.
- Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойного стержня в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // *Механика машин, механизмов и материалов.* — 2013. — № 1(22). — С. 31–35.
- Старовойтов, Э.И. Термоупругое деформирование трехслойной круглой пластины поверхностными нагрузками различных форм / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // *Механика машин, механизмов и материалов.* — 2018. — № 1(42). — С. 81–88.
- Starovoitov, E.I. Thermoelastic bending of sandwich ring plate on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // *International Applied Mechanics.* — 2008. — Vol. 44, No. 9. — Pp. 1032–1040.
- Старовойтов, Э.И. Деформирование трехслойной круговой цилиндрической оболочки в температурном поле / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, Д.В. Тарлаковский // *Проблемы машиностроения и автоматизации.* — 2016. — № 1. — С. 91–97.
- Старовойтов, Э.И. Развитие теории расчета слоистых конструкций / Э.И. Старовойтов, Е.П. Доровская // *Механика машин, механизмов и материалов.* — 2007. — № 1(1). — С. 48–52.
- Starovoitov, E.I. Foundations of the theory of elasticity, plasticity and viscoelasticity / E.I. Starovoitov, F.B. Nagiyev //

- Apple Academic Press, Toronto, New Jersey, Canada, USA, 2012. — 346 p.
23. Starovoitov, E.I. Description of the thermomechanical properties of some structural materials / E.I. Starovoitov // Strength of materials. — 1988. — Vol. 20, No. 4. — Pp. 426–431.
24. Старовойтов, Э.И. Сопротивление материалов / Э.И. Старовойтов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 384 с.

PLESKACHEVSKY Yuriy M., Corresponding Member of the NAS of Belarus, D. Sc. in Eng., Prof.

Head of the Department “Micro and Nanotechnology”¹
E-mail: pleskym@mail.ru

STAROVOITOV Eduard I., D. Sc. in Phys. and Math., Prof.

Head of the Department “Structural Mechanics”²
E-mail: edstar0@yandex.by

LEONENKO Denis V., D. Sc. in Phys. and Math., Assoc. Prof.

Professor of the Department “Structural Mechanics”²
E-mail: leoden@tut.by

¹Belarusian National Technical University, Minsk, Republic of Belarus

²Belarusian State University of Transport, Gomel, Republic of Belarus

Received 30 June 2019.

ISOTHERMAL LOCAL LOADING OF AN ELASTOPLASTIC THREE-LAYER PLATE

The effect of circular, annular and linear uniformly distributed axisymmetric loads on a round three-layer plate with asymmetric thickness is considered. The analytical type of loads is described using the Heaviside function. The materials of the bearing layers of the plate are elastoplastic, the filler is physically nonlinear. For the asymmetric in thickness three-layer plate we have accepted the kinematic hypothesis of a broken normal. In the thin external layers the Kirchhoff's hypotheses are accepted. The filler is no compressible through thickness. It's normal subject to the hypothesis Timoshenko. The work of arising shear stresses is taken into account. The formulation of a boundary value problem is given. The equilibrium equations are obtained by the Lagrange variational method. Boundary conditions on the plate contour are formulated. The solution to the boundary problem is reduced to finding the three required functions: deflection, shear and radial displacements of the middle plane of the filler. For these functions, an inhomogeneous system of ordinary nonlinear differential equations is obtained. Its solution was carried out by the Ilyushin elastic solution method. It is shown that the fifth approximation can be taken as the desired solution, since its difference from the previous one does not exceed 1 %. Iterative analytical solutions are obtained in Bessel functions. Their parametric analysis is carried out. Numerical results are obtained for a plate which layers are recruited from D16T–fluoroplast-4–D16T materials which mechanical characteristics, including nonlinearity functions, were obtained earlier. The boundary conditions correspond to the hinge support of the plate contour. The influence of the physical nonlinearity of the layer materials on the displacements in the plate is investigated. It is shown that the increase in calculated displacements during elastoplastic deformation in the plate is up to 20 %.

Keywords: three-layer circular plate, circular and ring loads, elasticity, plasticity

References

- Lugovoi P.Z., Meish Yu.A. Nonstationary Deformation of Longitudinally and Transversely Reinforced Cylindrical Shells on an Elastic Foundation. *International Applied Mechanics*, 2016, vol. 52, no. 1, pp. 62–72.
- Ivañez I., Moure M.M., Garcia-Castillo S.K., Sanchez-Saez S. The oblique impact response of composite sandwich plates. *Composite Structures*, 2015, no. 133, pp. 1127–1136.
- Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Yarovaya A.V. Vibration of circular sandwich plates under resonance loads. *International Applied Mechanics*, 2003, vol. 39, no. 12, pp. 1458–1463.
- Pleskachevsky Yu.M., Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Dinamika krugovykh metallopolimernykh plastin na uprugom osnovanii. Chast I. Svobodnye kolebaniya [Dynamics of circular metal-polymer plates on an elastic base. Part 1. Free oscillations]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2008, no. 4(5), pp. 48–51.
- Pleskachevsky Yu.M., Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Dinamika krugovykh metallopolimernykh plastin na uprugom osnovanii. Chast II. Vynuzhdennye kolebaniya [Dynamics of circular metal-polymer plates on an elastic base. Part 1. Forced oscillations]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2009, no. 1(6), pp. 48–51.
- Pleskachevsky Yu.M., Kubenko V.D., Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Kolebaniya krugovoy metallopolimernoy plastiny, svyazannoy s uprugim osnovaniem, pri teplovom

- udare [Vibrations of a circular metal-polymer plate connected to an elastic base under thermal shock]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2009, no. 4(9), pp. 50–54.
7. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Resonant effects of local loads on circular sandwich plates on an elastic foundation. *International Applied Mechanics*, 2010, vol. 46, no. 1, pp. 86–93.
 8. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Pleskatshevsky Yu.M. Kolebaniya trekhsloynnykh tsilindricheskikh obolochek v uprugoy srede Vinklera pri rezonanse [Vibrations of the three-layered cylindrical shells in the elastic Winkler's medium at resonance]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2013, no. 4(25), pp. 70–73.
 9. Gorshkov A.G., Starovoitov E.I., Yarovaya A.V. Cyclic loading of elastic-plastic bodies in neutron flux. *Mechanics of Solids*, 2001, vol. 36, no. 1, pp. 64–70.
 10. Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D. Comparison of Bending Properties for Cellular Core Sandwich Panels. *Materials Sciences and Applications*, 2013, vol. 4, no. 8, pp. 471–477.
 11. Lee C.R., Sun S.J., Kam T.Y. System parameters evaluation of flexibly supported laminated composite sandwich plates. *AIAA Journal*, 2007, vol. 45, no. 9, pp. 2312–2322.
 12. Zenkour A.M., Alghamdi N.A. Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates under the Effect of Mechanical and Thermal Loads. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2010, vol. 17, no. 6, pp. 419–432.
 13. Starovoitov E.I., Yarovaya A.V., Leonenko D.V. Deformirovanie uprugogo trekhsloynnogo sterzhnya lokalnymi nagruzkami [Deformation of elastic three-layer rod by local loads]. *Problemy mashinostroeniya i avtomatizatsii* [Engineering and automation problems], 2001, no. 4, pp. 37–40.
 14. Zhuravkov M.A., Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Nelineynoe deformirovanie uprugoplasticheskogo trekhsloynnogo sterzhnya lokalnoy nagruzkoy [The second deformation of the three-layer elastoplastic rod by local load]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2016, no. 3(36), pp. 71–79.
 15. Starovoitov E.I., Zakharchuk Yu.V. Nelineynoe deformirovanie trekhsloynnoy plastiny so szhimaemym zapolnitelem [Nonlinear deformation of circular sandwich plates with compressible filler]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2019, no. 3(48), pp. 26–33.
 16. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Tarlakovskii D.V. Thermal-force deformation of a physically nonlinear three-layer stepped rod. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2016, vol. 89, no. 6, pp. 1582–1590.
 17. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Deformirovanie trekhsloynnogo sterzhnya v temperaturnom pole [Deformation of three-layer beam in a temperature field]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2013, no. 1(22), pp. 31–35.
 18. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Termouprugoe deformirovanie trekhsloynnoy krugloy plastiny poverkhnostnymi nagruzkami razlichnykh form [Thermoelastic deformation of three-layer circular plate by a surface loads of various forms]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2018, no. 1(42), pp. 81–88.
 19. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Thermoelastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation. *International Applied Mechanics*, 2008, vol. 44, no. 9, pp. 1032–1040.
 20. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Tarlakovskiy D.V. Deformirovanie trekhsloynnoy krugovoy tsilindricheskoy obolochki v temperaturnom pole [Deformation of three-layer circular cylindrical shell in the thermal field]. *Problemy mashinostroeniya i avtomatizatsii* [Engineering and automation problems], 2016, no. 1, pp. 91–97.
 21. Starovoitov E.I., Dorovskaya E.P. Razvitie teorii rascheta sloistykh konstruksiy [Development of the theory of calculation of layered structures]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [Mechanics of machines, mechanisms and materials], 2007, no. 1(1), pp. 48–52.
 22. Starovoitov E.I., Nagiyev F.B. *Foundations of the theory of elasticity, plasticity and viscoelasticity*. Toronto, New Jersey, Apple Academic Press, 2012. 346 p.
 23. Starovoitov E.I. Description of the thermomechanical properties of some structural materials. *Strength of materials*, 1988, vol. 20, no. 4, pp. 426–431.
 24. Starovoitov E.I. *Soprotivlenie materialov* [Strength of materials]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2008. 384 p.