МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 629.03

Н.А. ДОКУКОВА, канд. физ.-мат. наук
доцент кафедры теоретической и прикладной механики[1]
E-mail: dokukova@mail.ru

М.Г. НОВИК
магистрант[1]
E-mail: mnovik97@gmail.com

[1]Белорусский государственный университет, г. Минск, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 21.08.2019.

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ДИСКРЕТНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Инновационные методы и алгоритмы численных расчетов больших систем дифференциальных уравнений, к которым приводятся задачи динамики многоэлементных машиностроительных конструкций, достаточно просты в использовании, стандартизированы по типам и классам математических моделей, представлены закрытыми модулями в различных пакетах прикладных программ. Подобные готовые средства экономят время моделирования и расчета. В то же время достоверность получаемых результатов оказывается сомнительной, о чем свидетельствует представленная авторами модель расчета динамики кривошипно-шатунного механизма с упругодемпфирующей связью классическими методами и методом NSTIFF пакета MATLAB.

Ключевые слова: *элементы конструкции, дискретное интегрирование, кривошипно-шатунный механизм*

Введение. Алгоритмы численного интегрирования систем с большим количеством дифференциальных и нелинейных алгебраических уравнений, к которым приводятся задачи динамики многозвенных механизмов, все больше привлекают внимание исследователей в современных условиях развития вычислительной техники и новых систем автоматизированного проектирования. В настоящее время большое внимание уделяется исследованиям в области компьютерного моделирования и высокотехнологичных численных расчетов с использованием интерактивных программных продуктов. Разработка новых и специфических алгоритмов, использующих оригинальные математические модели, является актуальной научной проблемой. Заблаговременно подготовленные стандартизированные методики позволяют сэкономить до 30 % времени моделирования и получения необходимых результатов. Однако в погоне за скоростью получения численных расчетов авторы вынуждены пренебрегать некоторыми существенными условиями в постановках задач, которые могут привести к ошибочным результатам, значительно влияющим на работоспособность проектируемой конструкции. Если для некоторых агрегатов такие ограничения не влияют на характеристики движений, то для приборов точной механики они недопустимы.

Исследование методов. Моделирование динамики реальных механических систем сопровождается записью нелинейных дифференциальных уравнений с нелинейными алгебраическими уравнениями связи, в том числе из-за наличия сложных упругих элементов, геометрии связи, фрикционных контактов и пр. При этом эффективность использования формул интегрирования высокого порядка падает. Зарубежными учеными [1—11] разработаны алгоритмы, которые позволяют проводить исследования движений реальных механических систем с наименьшей потерей точности. Создание численного решения чаще всего опирается на простейшие формулы интегрирования первого порядка. Таковыми являются методы: Ньюмарка, преобразования Гильберта—Хуанга и формула обратного преобразования 2-го порядка, реализованные в численные алгоритмы Newmark, NSTIFF, HHT-I3, NSTIFF-SI2, HHT-ADD и HHT-SI2 в пакете прикладных программ MATLAB. Первый из алгоритмов получается как результат прямого метода дискретизации, в котором рассматриваются уравнения движений многоэлементной системы наряду с кинематическими ограничениями. Остальные алгоритмы опираются на формулы интегрирования преобразования Гильберта—Хуанга, формулу обратного преобразования и рассматриваются наряду с уравнениями движений как уравнения кинематической связи для нахождения перемещений и скоростей. В качестве сравнения алгоритмов авторами использованы такие характеристики, как порядок сходимости, сохранение энергии механической системы, погрешность кинематического ограничения скорости и эффективность [1—11]. Предварительные результаты показывают, что относительное время моделирования методикой HHT-I3, затраченное на выполнение уравнений кинематического ограничения как для перемещений, так и для скоростей, сравнимо с методиками Ньюмарка, NSTIFF и приводит к его увеличению примерно на 30 % по сравнению с другими методиками NSTIFF-SI2, HHT-SI2, HHT-ADD.

В настоящей работе на простой динамической модели на рисунке 1 проведены сравнения решений классическими методами и методом NSTIFF пакета MATLAB.

В качестве классических методов и приемов описания динамической и математической моделей кривошипно-шатунного механизма с упругодемпфирующей связью используются уравнение Лагранжа II рода и метод Рунге—Кутта 4-го порядка для численного расчета.

Кривошипно-шатунный механизм на рисунке 1 состоит из кривошипа OA, шатуна AB, ползуна B и пружины с демпфером. Он имеет одну степень свободы, обобщенной координатой является угол поворота кривошипа $\theta(t)$, скорость которой $d\theta(t)/dt = \dot{\theta}$.

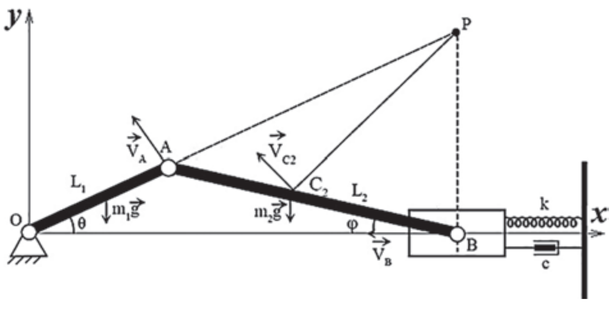

Рисунок 1 — Схема кривошипно-шатунного механизма с упругодемпфирующей связью
Figure 1 — Scheme of a crank gear mechanism with an elastic-damping coupling

Кривошип OA совершает вращательное движение, его кинетическая и потенциальная энергия соответственно равны:

$$T_{OA} = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 I_{OA}; \tag{1}$$

$$\Pi_{OA} = \frac{1}{2} m_1 g \frac{L_1}{2}\sin\theta, \tag{2}$$

где I_{OA} — момент инерции кривошипа относительно точки O, который численно равен:

$$I_{OA} = \frac{1}{3} m_1 L_1^2. \tag{3}$$

Шатун AB совершает плоскопараллельное движение, мгновенный центр скоростей находится в точке P. Его кинетическая и потенциальная энергии вычисляются по формулам:

$$T_{AB} = \frac{1}{2}\omega_{AB}^2 I_{C_2} + \frac{1}{2} m_2 v_{C_2}^2; \tag{4}$$

$$\Pi_{AB} = \frac{1}{2} m_2 g \frac{L_1}{2}\sin\theta, \tag{5}$$

где I_{C_2} — момент инерции кривошипа относительно центра масс звена AB:

$$I_{C_2} = \frac{1}{12} m_2 L_2^2. \tag{6}$$

Для нахождения скорости центра масс шатуна AB — точки C_2 необходимо определить его положение:

$$X_{C_2} = L_1\cos\theta + \frac{L_2}{2}\cos\varphi; \tag{7}$$

$$Y_{C_2} = \frac{L_2}{2}\sin\varphi = \frac{L_1}{2}\sin\theta. \tag{8}$$

Скорость точки C_2 находится дифференцированием по времени ее координат $v_{x_{C_2}} = dX_{C_2}/dt$, $v_{y_{C_2}} = dY_{C_2}/dt$, тогда полная величина равна $v_{C_2} = \sqrt{{v_{x_{C_2}}}^2 + {v_{y_{C_2}}}^2}$.

Ползун B совершает поступательное движение вдоль горизонтальной оси X, при этом $Y_B = 0$, поэтому его потенциальная энергия равна 0, при этом кинетическая энергия такова:

$$T_B = \frac{1}{2} m_3 v_B^2, \tag{9}$$

где $v_B = dX_B/dt$ — скорость точки B; X_B — ее смещение, которое определяется из геометрии механизма:

$$X_B = L_1\cos\theta + L_2\sqrt{1 - \left(L_1\sin\theta/L_2\right)^2}. \tag{10}$$

Потенциальная энергия пружины $\Pi = \frac{k{X_B}^2}{2}$.

Найдем работу неконсервативной силы демпфирования, пропорциональной скорости движения ползуна $F_{\text{демп.}} = c\dot{X}_B$:

$$\delta A(F_{\text{демп.}}) = c\dot{X}_B \frac{dX_B}{d\theta}\delta\theta. \tag{11}$$

Выражение угла φ в формулах (7), (8) заменяется на обобщенную координату $\theta(t)$ благодаря теореме синусов $L_1/\sin\varphi = L_2/\sin\theta$.

После составления уравнения движения кривошипно-шатунного механизма по формуле Лагранжа II рода получим нелинейное дифференциальное уравнение 2-го порядка, которое сложно выписать и невозможно решить в общем виде из-за его сильной нелинейности, оригинал его представлен на рисунке 2, в неявном виде:

$$\ddot{\theta}(t)\cdot\left(1+C_1(\theta,\omega)\right)+\theta(t)\cdot C_2(\theta,\omega)+C_3(\theta,\omega)=0. \quad (12)$$

Для нахождения решения воспользуемся численным методом Рунге–Кутта 4-го порядка. Этот метод дает достаточно высокий порядок сходимости, его легко реализовать в пакетах прикладных программ, например, Wolfram Mathematica.

В этом случае система будет состоять из двух обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка и задачи Коши, где $\dot{\theta},\theta,f,k_i\in R^n$, а h, $n\in R^1$:

$$\begin{cases}\dot{\theta}(t)=\omega(t),\\ \dot{\omega}(t)=-\dfrac{\theta(t)\cdot C_2(\theta,\omega)+C_3(\theta,\omega)}{1+C_1(\theta,\omega)}=f(t,\theta,\omega),\\ \theta(0)=\theta_0,\\ \omega(0)=\omega_0.\end{cases} \quad (13)$$

Тогда приближенное значение в последующих точках вычисляется по итерационным рекуррентным формулам:

$$\begin{cases}m_1=h\omega_n,\\ k_1=hf(t_n,\theta_n,\omega_n),\\ m_2=h\left(\omega_n+0{,}5k_1\right),\\ k_2=hf(t_n+0{,}5h,\theta_n+0{,}5m_1,\omega_n+0{,}5k_1),\\ m_3=h\left(\omega_n+0{,}5k_2\right),\\ k_3=hf(t_n+0{,}5h,\theta_n+0{,}5m_2,\omega_n+0{,}5k_2),\\ m_4=h\left(\omega_n+k_3\right),\\ k_4=hf(t_n+h,\theta_n+m_3,\omega_n+k_3),\\ \theta_{n+1}=\dfrac{1}{6}(m_1+2m_2+2m_3+m_4),\\ \omega_{n+1}=\dfrac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4),\end{cases} \quad (14)$$

где h — шаг сетки по параметру времени t; $n+1$ — количество точек сетки, $n=0, 1, 2, \ldots$.

Выберем следующие физические коэффициенты: $g=9{,}81$ н/м²; $L_1=0{,}2$ м; $L_2=0{,}5$ м; $m_1=1$ кг; $m_2=3$ кг; $m_3=2$ кг; $k=10\,000{,}0$ н/м; $c=5{,}0$ н·с/м; $\theta(0)=1{,}5\pi$ рад; $\omega(0)=0{,}75\pi$ рад/с.

Численные расчеты приводят к результатам в виде графиков на рисунках 3–6 и 11.

Для поставленной задачи с теми же начальными условиями и величинами физических параметров использован новый численный метод NSTIFF из пакета прикладных программ MATLAB, результаты решения приведены ниже на рисунках 7–10.

Метод Рунге–Кутта позволяет найти величину рассеивания энергии на рисунке 11 за один или несколько периодов колебаний представленной фрикционной системы, чего в современных численных методах NSTIFF и других выполнить невозможно из-за неявного способа описания динамической модели и стандартизированных принципов, заранее заложенных разработчиком.

По графикам зависимостей углов поворота кривошипа от времени на рисунках 3 и 7 можно заметить, что механизм не делает полный оборот, а совершает колебательные движения вокруг некоторого положения равновесия $\theta=0{,}75\pi$.

Рассмотренные методики решения многоэлементных механических систем с упругими пружинами и фрикционными взаимодействиями, предложенные в иностранной литературе, существенно упрощают строгую постановку общей математической модели динамической задачи. Поскольку подавляющее большинство крупных реальных моделей содержат упругие элементы, трение и контакты, приводящие к разрывным функциям, они позволяют интегрировать уравнения более низких порядков, упрощая этим способом нахождение численного решения. Это обстоятельство влечет за собой ряд недостатков:

1. Частоты колебаний угла поворота $\theta(t)$ отличаются в 1,4 раза между собой на графиках рисунков 3 и 7 (на рисунке 7 она меньше, чем на рисунке 3).

$$\frac{\mathrm{m2}\cos^3(\theta(t))\sin(\theta(t))\theta'(t)^2\,\mathrm{L1}^4}{12\,\mathrm{L2}^2\left(1-\frac{\mathrm{L1}^2\sin^2(\theta(t))}{\mathrm{L2}^2}\right)^2}-\frac{\mathrm{m2}\cos(\theta(t))\sin(\theta(t))\theta'(t)^2\,\mathrm{L1}^2}{12\left(1-\frac{\mathrm{L1}^2\sin^2(\theta(t))}{\mathrm{L2}^2}\right)}+\frac{1}{3}\mathrm{m1}\,\theta''(t)\,\mathrm{L1}^2+\frac{\mathrm{m2}\cos^2(\theta(t))\theta''(t)\,\mathrm{L1}^2}{12\left(1-\frac{\mathrm{L1}^2\sin^2(\theta(t))}{\mathrm{L2}^2}\right)}+\frac{1}{2}g\,\mathrm{m1}\cos(\theta(t))\,\mathrm{L1}+\frac{1}{2}g\,\mathrm{m2}\cos(\theta(t))\,\mathrm{L1}+$$

$$k\left(-\frac{\cos(\theta(t))\sin(\theta(t))\,\mathrm{L1}^2}{\mathrm{L2}\sqrt{1-\frac{\mathrm{L1}^2\sin^2(\theta(t))}{\mathrm{L2}^2}}}-\sin(\theta(t))\,\mathrm{L1}\right)\left(\sqrt{1-\frac{\mathrm{L1}^2\sin^2(\theta(t))}{\mathrm{L2}^2}}\,\mathrm{L2}+\mathrm{L1}\cos(\theta(t))-0.05\right)+c\left(-\frac{\cos(\theta(t))\sin(\theta(t))\theta'(t)\,\mathrm{L1}^2}{\mathrm{L2}\sqrt{1-\frac{\mathrm{L1}^2\sin^2(\theta(t))}{\mathrm{L2}^2}}}-\sin(\theta(t))\theta'(t)\,\mathrm{L1}\right)\left(-\frac{\cos^2(\theta(t))\sin^2(\theta(t))\theta'(t)\,\mathrm{L1}^4}{\mathrm{L2}^3\left(1-\frac{\mathrm{L1}^2\sin^2(\theta(t))}{\mathrm{L2}^2}\right)^{3/2}}-\frac{\cos^2(\theta(t))\theta'(t)\,\mathrm{L1}^2}{\mathrm{L2}\sqrt{1-\frac{\mathrm{L1}^2\sin^2(\theta(t))}{\mathrm{L2}^2}}}+\frac{\sin^2(\theta(t))\theta'(t)\,\mathrm{L1}^2}{\mathrm{L2}\sqrt{1-\frac{\mathrm{L1}^2\sin^2(\theta(t))}{\mathrm{L2}^2}}}-\cos(\theta(t))\theta'(t)\,\mathrm{L1}\right)-$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{m2}\left(2\left(-\frac{\cos(\theta(t))\sin(\theta(t))\theta'(t)\,\mathrm{L1}^2}{2\,\mathrm{L2}\sqrt{1-\frac{\mathrm{L1}^2\sin^2(\theta(t))}{\mathrm{L2}^2}}}-\sin(\theta(t))\theta'(t)\,\mathrm{L1}\right)\left(-\frac{\cos^2(\theta(t))\sin^2(\theta(t))\theta'(t)\,\mathrm{L1}^4}{2\,\mathrm{L2}^3\left(1-\frac{\mathrm{L1}^2\sin^2(\theta(t))}{\mathrm{L2}^2}\right)^{3/2}}-\frac{\cos^2(\theta(t))\theta'(t)\,\mathrm{L1}^2}{2\,\mathrm{L2}\sqrt{1-\frac{\mathrm{L1}^2\sin^2(\theta(t))}{\mathrm{L2}^2}}}+\frac{\sin^2(\theta(t))\theta'(t)\,\mathrm{L1}^2}{2\,\mathrm{L2}\sqrt{1-\frac{\mathrm{L1}^2\sin^2(\theta(t))}{\mathrm{L2}^2}}}-\cos(\theta(t))\theta'(t)\,\mathrm{L1}\right)-\frac{1}{2}\mathrm{L1}^2\cos(\theta(t))\sin(\theta(t))\theta'(t)^2\right)+$$

$$\mathrm{m3}\left(-\frac{\cos(\theta(t))\sin(\theta(t))\,\mathrm{L1}^2}{\mathrm{L2}\sqrt{1-\frac{\mathrm{L1}^2\sin^2(\theta(t))}{\mathrm{L2}^2}}}-\sin(\theta(t))\,\mathrm{L1}\right)\left(-\frac{\cos^2(\theta(t))\sin^2(\theta(t))\theta'(t)^2\,\mathrm{L1}^4}{\mathrm{L2}^3\left(1-\frac{\mathrm{L1}^2\sin^2(\theta(t))}{\mathrm{L2}^2}\right)^{3/2}}-\frac{\cos^2(\theta(t))\theta'(t)^2\,\mathrm{L1}^2}{\mathrm{L2}\sqrt{1-\frac{\mathrm{L1}^2\sin^2(\theta(t))}{\mathrm{L2}^2}}}+\frac{\sin^2(\theta(t))\theta'(t)^2\,\mathrm{L1}^2}{\mathrm{L2}\sqrt{1-\frac{\mathrm{L1}^2\sin^2(\theta(t))}{\mathrm{L2}^2}}}-\frac{\cos(\theta(t))\sin(\theta(t))\theta''(t)\,\mathrm{L1}^2}{\mathrm{L2}\sqrt{1-\frac{\mathrm{L1}^2\sin^2(\theta(t))}{\mathrm{L2}^2}}}-\cos(\theta(t))\theta'(t)^2\,\mathrm{L1}-\sin(\theta(t))\theta''(t)\,\mathrm{L1}\right)+$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{m2}\left(\frac{1}{2}\mathrm{L1}^2\theta''(t)\cos^2(\theta(t))-\mathrm{L1}^2\sin(\theta(t))\theta'(t)^2\cos(\theta(t))+2\left(-\frac{\cos(\theta(t))\sin(\theta(t))\theta'(t)\,\mathrm{L1}^2}{2\,\mathrm{L2}\sqrt{1-\frac{\mathrm{L1}^2\sin^2(\theta(t))}{\mathrm{L2}^2}}}-\sin(\theta(t))\theta'(t)\,\mathrm{L1}\right)\left(-\frac{\cos^2(\theta(t))\sin^2(\theta(t))\theta'(t)\,\mathrm{L1}^4}{2\,\mathrm{L2}^3\left(1-\frac{\mathrm{L1}^2\sin^2(\theta(t))}{\mathrm{L2}^2}\right)^{3/2}}-\frac{\cos^2(\theta(t))\theta'(t)\,\mathrm{L1}^2}{2\,\mathrm{L2}\sqrt{1-\frac{\mathrm{L1}^2\sin^2(\theta(t))}{\mathrm{L2}^2}}}+\frac{\sin^2(\theta(t))\theta'(t)\,\mathrm{L1}^2}{2\,\mathrm{L2}\sqrt{1-\frac{\mathrm{L1}^2\sin^2(\theta(t))}{\mathrm{L2}^2}}}-\cos(\theta(t))\theta'(t)\,\mathrm{L1}\right)+\right.$$

$$\left.2\left(-\frac{\cos(\theta(t))\sin(\theta(t))\,\mathrm{L1}^2}{2\,\mathrm{L2}\sqrt{1-\frac{\mathrm{L1}^2\sin^2(\theta(t))}{\mathrm{L2}^2}}}-\sin(\theta(t))\,\mathrm{L1}\right)\left(-\frac{\cos^2(\theta(t))\sin^2(\theta(t))\theta'(t)^2\,\mathrm{L1}^4}{2\,\mathrm{L2}^3\left(1-\frac{\mathrm{L1}^2\sin^2(\theta(t))}{\mathrm{L2}^2}\right)^{3/2}}-\frac{\cos^2(\theta(t))\theta'(t)^2\,\mathrm{L1}^2}{2\,\mathrm{L2}\sqrt{1-\frac{\mathrm{L1}^2\sin^2(\theta(t))}{\mathrm{L2}^2}}}+\frac{\sin^2(\theta(t))\theta'(t)^2\,\mathrm{L1}^2}{2\,\mathrm{L2}\sqrt{1-\frac{\mathrm{L1}^2\sin^2(\theta(t))}{\mathrm{L2}^2}}}-\frac{\cos(\theta(t))\sin(\theta(t))\theta''(t)\,\mathrm{L1}^2}{2\,\mathrm{L2}\sqrt{1-\frac{\mathrm{L1}^2\sin^2(\theta(t))}{\mathrm{L2}^2}}}-\cos(\theta(t))\theta'(t)^2\,\mathrm{L1}-\sin(\theta(t))\theta''(t)\,\mathrm{L1}\right)\right)$$

Рисунок 2 — Уравнение Лагранжа в пакете Wolfram Mathematica изменения основной координаты θ(*t*), описывающей движение кривошипно-шатунного механизма с упругодемпфирующей связью

Figure 2 — Lagrange equation in the Wolfram Mathematica package of changing the basic coordinate θ(*t*) describing the movement of a crank gear mechanism with an elastic-damping coupling

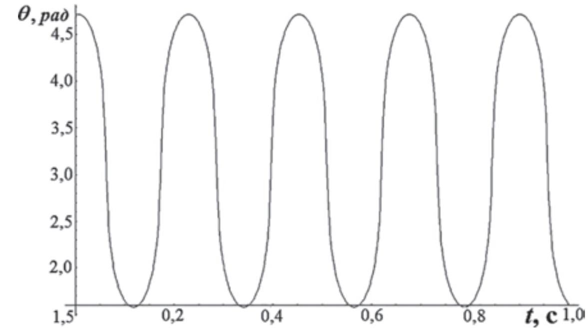

Рисунок 3 — Зависимость угла поворота θ(*t*) от времени
Figure 3 — Dependence of the turning angle θ(*t*) on time

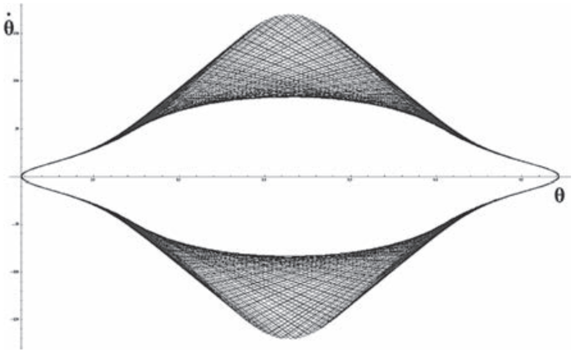

Рисунок 4 — Фазовый портрет $\dot{\theta}(\theta)$ угла поворота
Figure 4 — Phase portrait $\dot{\theta}(\theta)$ of the turning angle

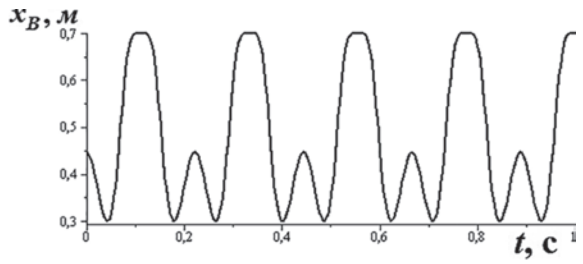

Рисунок 5 — Зависимость перемещения $X_B(t)$ шатуна от времени
Figure 5 — Dependence of the displacement $X_B(t)$ of the crank rod on time

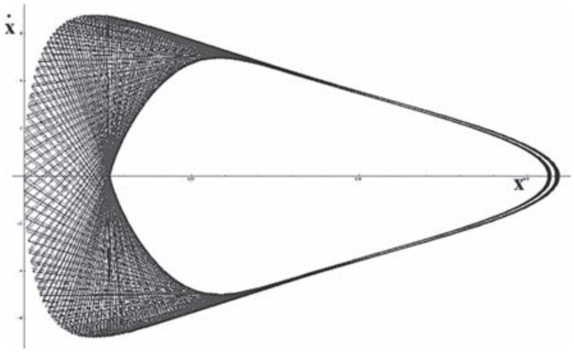

Рисунок 6 — Фазовый портрет $\dot{X}_B(X_B)$ шатуна *B*
Figure 6 — Phase portrait $\dot{X}_B(X_B)$ of the crank rod *B*

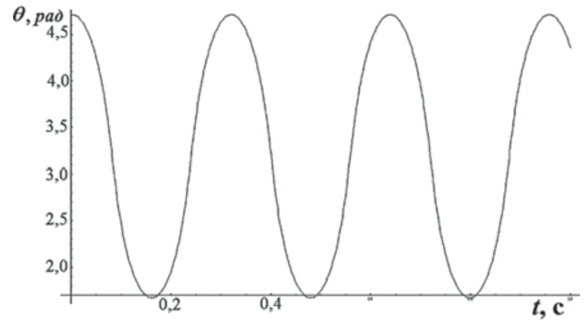

Рисунок 7 — Зависимость угла поворота θ(*t*) от времени, полученная методом NSTIFF пакета прикладных программ MATLAB
Figure 7 — Dependence of the turning angle θ(*t*) on time, obtained by the NSTIFF method of the MATLAB application package

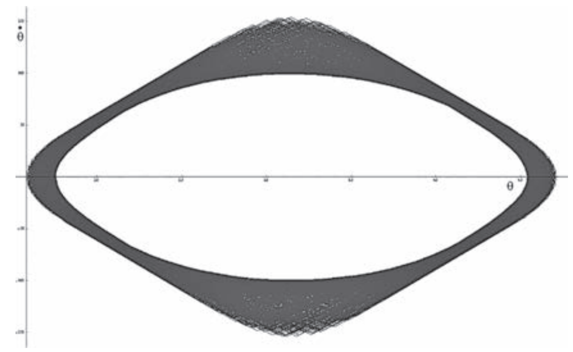

Рисунок 8 — Фазовый портрет $\dot{\theta}(\theta)$ угла поворота, полученный методом NSTIFF пакета прикладных программ MATLAB
Figure 8 — Phase portrait $\dot{\theta}(\theta)$ of the turning angle obtained by the NSTIFF method of the MATLAB application package

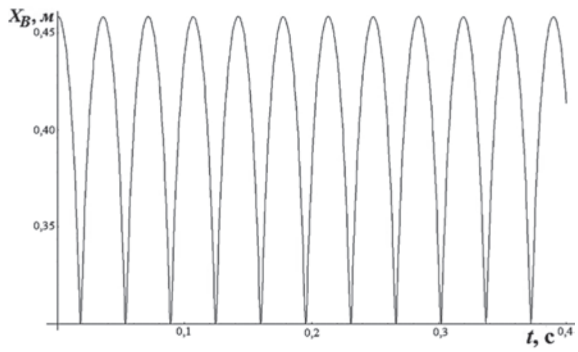

Рисунок 9 — Зависимость перемещения $X_B(t)$ шатуна от времени в NSTIFF
Figure 9 — Dependence of the displacement $X_B(t)$ of the crank rod on time in NSTIFF

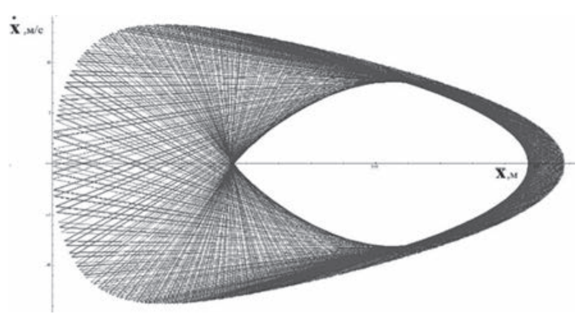

Рисунок 10 — Фазовый портрет $\dot{X}_B(X_B)$ шатуна *B* в NSTIFF
Figure 10 — Phase portrait $\dot{X}_B(X_B)$ of the crank rod *B* in NSTIFF

2. Частоты колебаний ползуна $X_B(t)$ отличаются в 2,3 раза между собой на графиках рисунков 5 и 9 (на рисунке 9 она больше, чем на рисунке 5).

3. Расчет методом Рунге–Кутта обеспечивает правильную физическую интерпретацию и соответствие колебаниям кривошипа и шатуна. Их частоты сохраняют пропорцию, равную 2. Это же соотношение, полученное методом NSTIFF пакета прикладных программ MATLAB, составляет дробную величину 6,46.

4. Фазовые портреты $\dot{\theta}(\theta)$ угловых скоростей колебаний кривошипа от угла поворота имеют от-

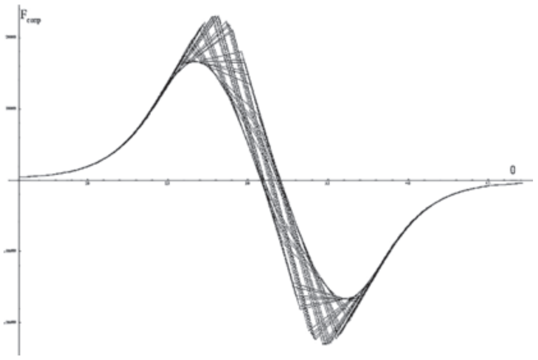

Рисунок 11 — Рассеивание энергии в динамической системе
Figure 11 — Energy dissipation in a dynamic system

личительные особенности на рисунках 4 и 8 при внешней схожести их характеров. На первом из них, графике 4, видны явные вогнуто-выпуклые участки кривой линии по сравнению с гладкой кривой графика 8.

5. На фазовом портрете шатуна *B* на рисунке 6 видны две крайние правые точки, соответствующие крайним положениям кривошипа, чего не наблюдается на рисунке 10.

6. Невозможно отобразить иные кинематические и динамические характеристики отдельных узлов и точек из их многообразия, охватывающего весь механизм в целом.

Время расчета в пакете прикладных программ Wolfram Mathematica — 5,9864 с. Это практически в 2 раза больше, чем в пакете прикладных программ MATLAB численным методом NSTIFF — 2,7489 с.

Выводы. Несмотря на то, что новые современные методы расчета [1—11] просты в реализации для сложных динамических систем с неявными формулами, содержащими производные высших порядков искомых обобщенных переменных, по сравнению с традиционными численно-аналитическими методами Лагранжа и Рунге—Кутта, однако их алгоритмы, по мнению самих же авторов, имеют проблемы с достаточно большими коэффициентами демпфирования и для больших размеров шагов интегрирования.

Список литературы

1. Negrut, D. A discussion of low-order numerical integration formulas for rigid and flexible multibody dynamics / D. Negrut, O. Jay. Laurent, N. Khude // Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. — 2009. — Vol. 4, Iss. 2: 021008-11. — 11 p.
2. Shabana, A.A. Dynamics of Multibody Systems / A.A. Shabana. — 3rd ed. — Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
3. Brenan, K.E. Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations / K.E. Brenan, S.L. Campbell, L.R. Petzold. — New York: North-Holland, 1989.
4. Lubich, C. Automatic integration of the Euler—Lagrange equations with constraints / C. Lubich, E. Hairer // J. Comput. Appl. Math. — 1989. — No. 12. — Pp. 77—90.
5. Hairer, E. Solving ordinary differential equations II. Stiff and differential-algebraic problems / E. Hairer, G. Wanner. — Berlin: Springer, 1991.
6. Potra, F. On the Numerical Solution of Euler—Lagrange Equations / F. Potra, W.C. Rheinboldt // Mech. Struct. Mach. — 1991. — No. 19(1). — Pp. 1—18.
7. Rheinboldt, W.C. Differential-algebraic systems as differential equations on manifolds / W.C. Rheinboldt // Math. Comput. — 1984. — No. 43. — Pp. 473—482.
8. Wehage, R.A. Generalized coordinate partitioning for dimension reduction in analysis of constrained dynamic systems / R.A. Wehage, E.J. Haug // ASME J. Mech. Des. — 1982. — No. 104. — Pp. 247—255.
9. Liang, C.D. A Differentiable null space method for constrained dynamic analysis / C.D. Liang, G.M. Lance // ASME J. Mech., Transm., Autom. — 1987. — No. 109(3). — Pp. 405—411.
10. Yen, J. Constrained equations of motion in multibody dynamics as ODE's on manifolds / J. Yen // SIAM Soc. Ind. Appl. Math. J. Numer. Anal. — 1993. — No. 30(2). — Pp. 553—558.
11. Lunk, C. Solving constrained mechanical systems by the family of Newmark and methods / C. Lunk, B. Simeon // Z. Angew. Math. Mech. — 2006. — No. 86(10). — Pp. 772—784.

DOKUKOVA Nataliya A., Ph. D. in Phys. and Math.
Associate Professor of the Department of Theoretical and Applied Mechanics[1]
E-mail: dokukova@mail.ru

NOVIK Mariya G.
Undergraduate Student[1]
E-mail: mnovik97@gmail.com

[1]Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

Received 21 August 2019.

RESEARCH OF METHODS OF DISCRETE INTEGRATION OF DYNAMICS OF MECHANICAL ENGINEERING DESIGNS

Innovative methods and algorithms of numerical calculations of big systems of the differential equations, to which problems of dynamics of multibody element mechanical engineering designs are given, are rather simple in use, standardized by types and classes of mathematical models, presented by the closed modules in different packages of application programs. Similar ready means save time of modeling and calculation. At the same time the reliability of the received results turns out to be approximate confirmed by the authors' calculation model for calculating the dynamics of the crank gear mechanism with elastic-damping coupling by classical methods and the NSTIFF method of MATLAB package.

Keywords: *design elements, discrete integration, crank gear mechanism*