



МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.371, 539.372, 539.62, 539.319

М.А. ЖУРАВКОВ, д-р физ.-мат. наук, проф.
заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики¹
E-mail: Zhuravkov@bsu.by

М.А. НИКОЛАЙЧИК, магистр физ.-мат. наук
заведующий научно-исследовательской лабораторией прикладной механики¹
E-mail: nikolaitchik.m@gmail.com

П.С. МАЕВСКИЙ
студент кафедры теоретической и прикладной механики¹

¹Белорусский государственный университет, г. Минск, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 10.06.2021

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НАПРАВЛЯЮЩЕГО РОЛИКА С ШАХТНЫМ ПРОВОДНИКОМ

В статье рассмотрена контактная задача силового взаимодействия направляющего ролика с шахтным проводником при движении шахтного подъемного сосуда на примере модельной задачи контактного взаимодействия тора с балкой. Рассмотрено аналитическое решение модельной задачи, разработана конечно-элементная модель исследуемой системы. При решении учитывается упругопластическое поведение материалов контактирующих тел. Рассмотрены различные типы контактов между направляющим роликом и проводником. Определены величины критических нагрузок, приводящих к возникновению пластических деформаций в проводнике при различных типах контакта, а также установлена их связь с величиной коэффициента трения. Сравнительный анализ полученных аналитических и численных результатов демонстрирует высокую степень корреляции.

Ключевые слова: направляющий ролик, шахтный проводник, контактное взаимодействие, конечно-элементный анализ, контакт с трением, упругопластический материал

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2021-3-56-83-89>

Введение. Шахтные подъемные комплексы представляют собой важный элемент жизнедеятельности горнодобывающего предприятия с подземным способом разработки месторождения полезного ископаемого. Подъемные комплексы — сложные инженерно-технические сооружения, эффективность и безопасность работы которых в целом обеспечивается надежной и безаварийной работой отдельных элементов, узлов и систем.

Одной из наиболее ответственных систем подъемного шахтного комплекса является комплекс подъемного сосуда с соответствующим дополнительным оборудованием. Обеспечение

безаварийной и оптимальной работы подъемного сосуда представляет собой сложную и ответственную задачу, требующую решения большого набора задач механики.

Сложность решения данной проблемы (с точки зрения механики деформируемого твердого тела) обусловлена тем, что предмет исследования представляет собой многоэлементную систему (собственно подъемный сосуд, направляющие проводники, металлоконструкции, армировка шахтного ствола, сеть канатов и другие элементы), работающую в многовариантном режиме. Следует отметить, что исследования в данном

направлении выполняются активно и большим кругом исследователей [1–4].

Одним из важных конструктивных элементов подъемного сосуда является контактная группа «ролики подъемного сосуда — шахтные проводники». На рисунке 1 приведен пример одного из возможных конструктивных решений практического исполнения такой контактной группы. «Нормальное» эксплуатационное состояние данной контактной группы является весьма значимым, так как анализ серьезных аварий с подъемным сосудом свидетельствует о том, что причиной аварий во многих случаях является нарушение режимов работы контактной группы «ролики — проводники». Поэтому исследование механического состояния направляющих роликов и шахтных проводников при движении подъемных сосудов является важной проблемой. Решение данной задачи осложняется тем, что конструктивные элементы каждой подъемной установки имеют свои особенности, которые могут изменяться как вследствие долговременной эксплуатации (изменение и деформация профиля проводников, износ роликов и проводников и т. д.), так и в связи с изменением технологических параметров (скорость подъема, вес нагрузки и др.). Очевидно, что в такой ситуации весьма эффективным представляется использование математического и компьютерного моделирования, что позволяет рассмотреть широкий диапазон модельных задач и установить общие качественные закономерности исследуемых процессов. В совокупности с использованием данных натурных измерений (с помощью различных датчиков, специализированной аппаратуры) моделирование позволяет верифицировать теоретические модели и «настроить» их на конкретные условия и получать уже не только качественные, но и количественные результаты.

Актуальной является проблема построения механико-математических моделей, которые могут быть использованы для исследования контактного взаимодействия направляющих роликов подъемного сосуда с проводниками при различных типах движения сосуда [5, 6].

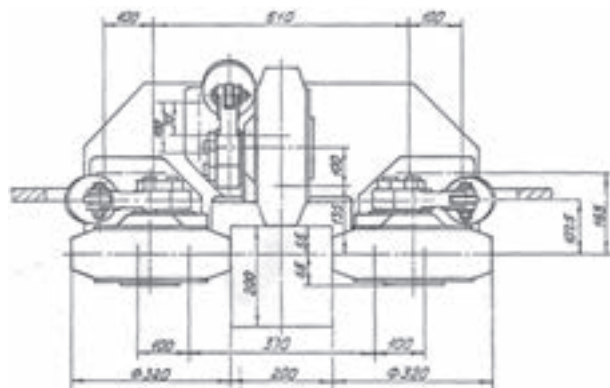


Рисунок 1 — Узел контакта роликов с проводником
Figure 1 — Contact assembly of the rollers with the conductor

В статье приводится решение модельной задачи по исследованию контактного взаимодействия направляющих роликов с проводником при движении скипа — грузового лифта, используемого для подъема на поверхность горной породы, сыпучих и мелкокусковых грузов. Скип используется также для спуска в шахту техники и оборудования. Рассматривается конструкция движения скипа с двумя ограничительными проводниками. По каждому проводнику движется набор из трех роликов, расположенных с разных сторон проводника (см. рисунок 1).

На рисунке 2 представлена расчетная схема рассматриваемой задачи.

Отметим, что здесь представлены исследования о контактном взаимодействии отдельного ролика, движущегося по проводнику в лобовом направлении. Результаты решения задачи о контактном взаимодействии трех роликов будут представлены в следующей статье.

Постановка модельной задачи. Задача о контактном взаимодействии ролика и проводника решается на основе конечно-элементного анализа.

В ходе выполнения исследований рассмотрены следующие задачи:

1. Исследование влияния контактных условий на напряженно-деформированное состояние в зоне контакта прорезиненного стального ролика со стальным проводником при рассмотрении «стационарного» режима движения ролика по проводнику. Под стационарным режимом движения понимается участок равномерного прямолинейного движения ролика по проводнику.

2. Определение площади пятна контакта и величины максимального нормального напряжения в зоне контакта с учетом геометрии и физико-механических свойств контактирующих тел.

3. Сравнение результатов, полученных на основе конечно-элементного анализа, с результатами, полученными аналитически.

При построении конечно-элементной модели использовались следующие *геометрические параметры* тел:

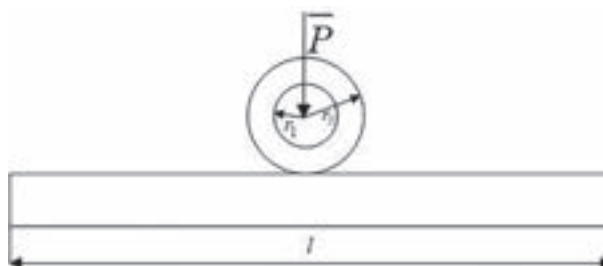


Рисунок 2 — Расчетная схема контактного взаимодействия:
 l — длина элемента проводника; r_1 , r_2 — внутренний и внешний радиусы ролика; P — величина нагрузки, моделирующей воздействие скипа на ролик

Figure 2 — Design scheme of the contact interaction:
 l — conductor element length; r_1 , r_2 — inner and outer roller radii; P — load rate simulating the skip impact on the roller

- ролик: внешний диаметр — 320 мм; внутренний диаметр — 200 мм; ширина ролика — 100 мм;
 - сечение проводника: длина направляющей — 6000 мм; сторона внешнего квадрата — 200 мм; сторона внутреннего квадрата — 164 мм; толщина стенок — 18 мм.

При построении конечно-элементной модели был выбран линейный порядок элементов. В рассматриваемом случае это представляется оправданным, так как решение задачи на контактное взаимодействие подразумевает многократные циклы вычислений, что требует много вычислительных ресурсов. Для настройки сетки был использован метод MultiZone mesh, обеспечивающий разбиение геометрии на отображаемые (структурированные) и свободные (неструктурированные) области [7]. Алгоритм автоматически генерирует чистую шестигранную сетку там, где это возможно, а затем заполняет более трудные области неструктурированной сеткой.

Граничные условия соответствуют ситуации закрепления проводника на концах направляющей, ролик расположен по центру балки. На ролик действует распределенная нагрузка в радиальном направлении на цилиндрической грани с величиной, пропорциональной косинусу угла грани.

Физико-механические свойства тел: материал проводника — сталь. Ролик представляет собой прорезиненную снаружи сталь, поэтому были выбраны усредненные значения констант. Эффективный модуль Юнга рассчитывался по формуле:

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2},$$

где $E_1 = 2e + 5$ — модуль Юнга стали, МПа; $E_2 = 180$ МПа — модуль Юнга резины.

Коэффициент Пуассона для резины составляет 0,49, для стали — 0,3.

В качестве закона поведения материалов в области контакта рассматривались уравнения билинейной изотропной теории упругости [8], что позволяет учитывать упругопластические эффекты. В билинейной теории участок упругости описывается модулем Юнга и коэффициентом Пуассона, а участок пластичности описывается пределом текучести и углом наклона поверхности текучести (рисунок 3). Численные характеристики данных величин в области контакта рассматриваемых тел выбраны следующие: предел текучести — 250 МПа, угол наклона поверхности текучести — 0.

Как уже упоминалось ранее, рассматривается стационарный режим контактного взаимодействия «ролик с проводником». Поэтому принимаем, что в области контакта на ролик действует нагрузка постоянной интенсивности.

Отметим, что реальную величину нагрузки можно определить, обработав данные, полученные с использованием специальной аппаратуры, установленной на подъемном сосуде, и решив

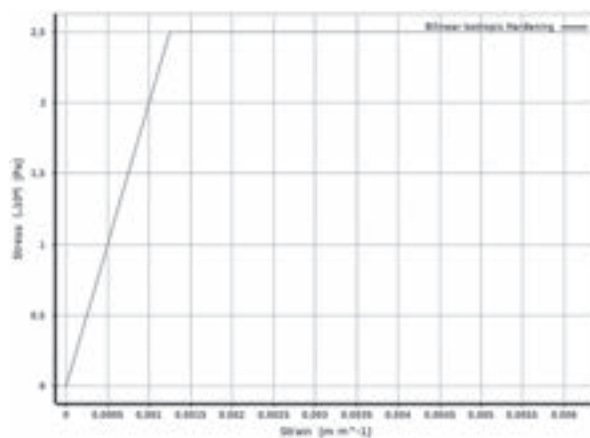


Рисунок 3 — График зависимости «напряжения–деформации» в билинейной теории
 Figure 3 — Graph of the “stress–strain” dependence in bilinear theory

соответствующую задачу механики [9, 10]. Подчеркнем, что выполненные исследования на данном этапе имеют целью выбор модели, которая описывает корректно процессы взаимодействия роликов с проводником. В настоящее время выполняются исследования, целью которых является обработка данных лабораторных и натурных экспериментов по определению характерных критических величин.

С точки зрения модельной задачи механики деформируемого твердого тела рассматривается контактная задача для тора и полупространства в аналитической и численной постановках. Моделируется положение ролика в середине балки, так как в этом случае на наибольшем расстоянии от концов одного пролета проводника создаются самые благоприятные условия для возникновения максимального изгибающего момента, а, следовательно, и максимальных нормальных напряжений.

При выполнении модельного анализа рассматривались три типа контактного взаимодействия:

- линейный контакт, при котором невозможно скольжение и отрыв между поверхностями контактирующих тел (тип Bonded);
- нелинейный контакт, когда имеет место скольжение в области контакта, при этом коэффициент трения равен нулю, а нормальное давление принимает нулевое значение в случае отрыва (тип Frictionless);
- контакт с трением, когда в области контакта тел возникают касательные напряжения, при достижении которыми предельного значения имеет место скольжение тел относительно друг друга (тип Frictional).

Аналитическое решение контактной задачи.

Аналитическое решение, используемое для верификации алгоритма компьютерного конечно-элементного решения, строилось на основе классического решения Герца. Механико-математическая постановка задачи [11, 12]: рассматривается контактное взаимодействие упругого

тора и упругопластической полуплоскости под действием нормальной нагрузки, приложенной к поверхности тора. При этом принимаются следующие допущения:

1. Материал контактирующих тел предполагается однородным изотропным, подчиняющимся закону линейно-упругого деформирования.

2. Кривизна поверхностей тел в зоне контакта влияет незначительно на напряженно-деформированное состояние тел.

3. Граничные поверхности тел в области контакта заменяются эллиптическими параболоидами.

4. Точка контакта — не особая, область контакта односвязная и ее граница представляет собой эллипс.

Используем аналитическое решение сформулированной задачи, предложенное в [12, 13]. Геометрические параметры A и B области контакта вычисляются по формулам:

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_{11}} \pm \frac{1}{R_{12}} \right); \quad B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_{21}} \pm \frac{1}{R_{22}} \right).$$

Если контртело — полуплоскость, то $R_{12} = R_{22} = \infty$.

Приведенный диаметр и приведенный радиус области контакта:

$$D_{\text{пр}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{B}}; \quad R_{\text{пр}} = \frac{D_{\text{пр}}}{2}.$$

Сближение тел в области контакта определяется следующим образом:

$$d = \left(\frac{3P}{4E_{12}R_{\text{пр}}^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{2}{3}},$$

где P — нагрузка, приложенная к ролику, а E_{12} вычисляется по формуле:

$$\frac{1}{E_{12}} = \frac{1-\nu_1}{E_1} + \frac{1-\nu_2}{E_2}.$$

Малая и большая полуоси эллипса рассчитываются, соответственно, как:

$$a = \sqrt{R_{11}d}; \quad b = \sqrt{R_{21}d}.$$

Площадь пятна контакта вычисляется как площадь эллипса:

$$S = \pi ab.$$

Максимальное контактное давление в зоне упругого контакта рассчитывается по формуле:

$$P_{\text{max}} = \frac{3P}{2S}.$$

Результаты выполнения компьютерного моделирования. Далее на рисунках 4–7 приведены некоторые результаты численных экспериментов — картины распределения давления в области контакта. В случае полного контакта тел зоны концентрации напряжений расположены по краям по-

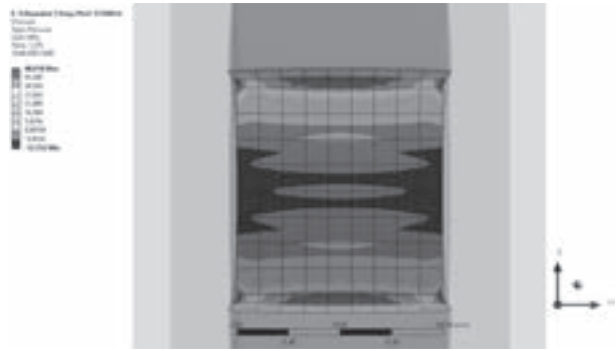


Рисунок 4 — Контактное давление для типа Bonded
Figure 4 — Contact pressure for Bonded type

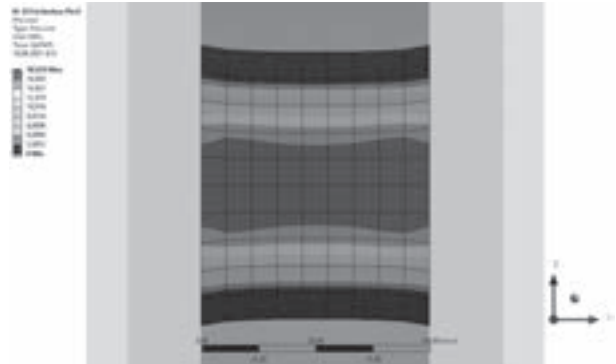


Рисунок 5 — Контактное давление для типа Frictionless
Figure 5 — Contact pressure for Frictionless type

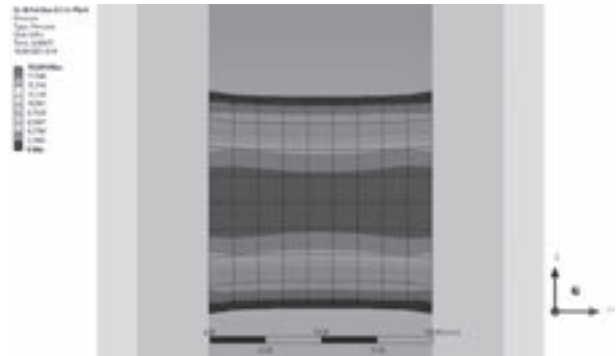


Рисунок 6 — Контактное давление для типа Friction 0,1
Figure 6 — Contact pressure for Friction 0,1 type

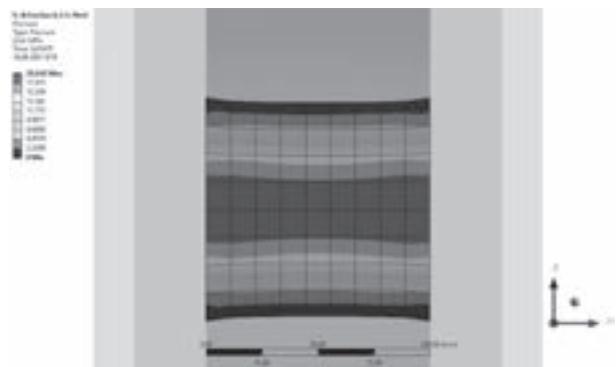


Рисунок 7 — Контактное давление для типа Friction 0,3
Figure 7 — Contact pressure for Friction 0,3 type

верхности контакта. В случае неполного контакта максимальное контактное давление наблюдается в центре области контакта и возрастает с увеличением коэффициента трения между взаимодей-

ствующими телами, что соответствует реальному контактному взаимодействию.

Исходя из серии выполненных численных экспериментов, можно сделать вывод о существенном влиянии трения на проявление пластических деформаций в области контакта и на величину собственно пластических деформаций. Так, из графиков на рисунке 8 видно, что чем больше коэффициент трения, тем меньшая внешняя нагрузка, при которой проявляются пластические деформации в области контакта. Это происходит за счет касательных напряжений, возникающих в зоне контакта. Также стоит отметить, что пластические деформации возникают при нагрузке равной примерно 120 кН для всех типов контакта.

На графиках, изображенных на рисунках 9 и 10, приведены результаты сравнительного анализа определения площади пятна контакта и максимального контактного давления, вычисленных на основании использования аналитического решения и по результатам компьютерного моделирования.

Как видно из приведенных графиков, расхождения в результатах расчета площади пятна контакта и максимального контактного давления не превышают 10 %.

Выводы. 1. В статье построена модельная компьютерная задача, соответствующая инженерной задаче контактного взаимодействия направляющих роликов с проводником при движении подъемного шахтного грузового сосуда. На базе компьютерной модели выполнена серия численных экспериментов при различных условиях контактного взаимодействия роликов и проводников.

2. Выполнено сравнение результатов численного конечно-элементного моделирования с результатами аналитического решения задачи о контакте тора и полуплоскости. Установлено, что расхождение между численным и аналитическим

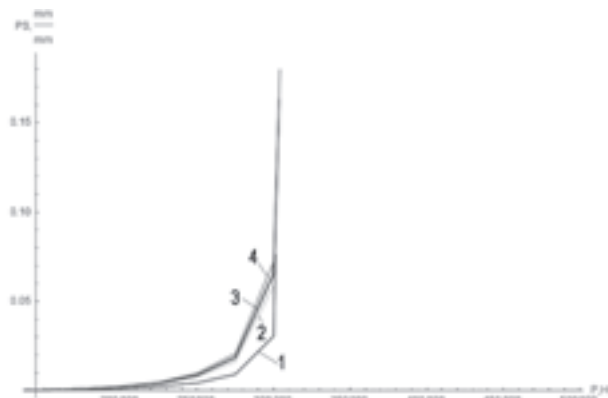


Рисунок 8 — Сравнение графиков пластических деформаций от нагрузки на ролик: 1 — контакт без трения; 2 — контакт с коэффициентом трения 0,1; 3 — коэффициент трения 0,2; 4 — коэффициент трения 0,3)
Figure 8 — Comparison of graphs of plastic deformations from the load on the roller: 1 — contact without friction; 2 — contact with a coefficient of friction of 0.1; 3 — coefficient of friction of 0.2; 4 — coefficient of friction of 0.3

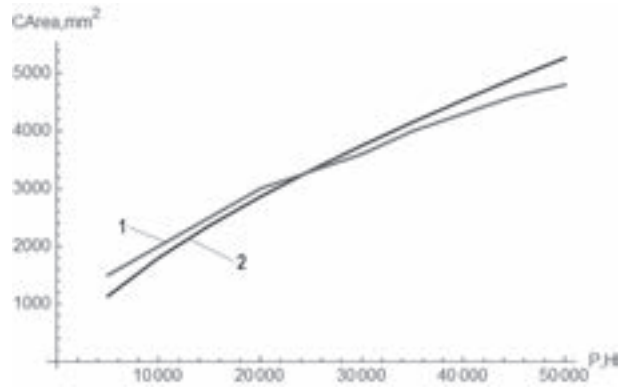


Рисунок 9 — Сравнение зависимостей площади пятна контакта от приложенной нагрузки полученных компьютерным моделированием (1) и аналитически (2)
Figure 9 — Comparison of the dependencies of the contact patch area on the applied load obtained by computer modeling (1) and analytically (2)

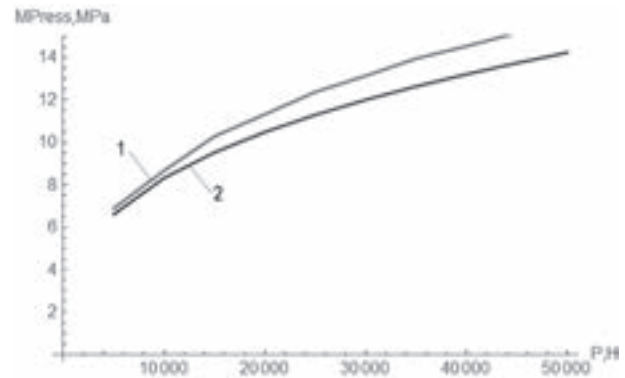


Рисунок 10 — Сравнение графиков зависимостей максимального контактного давления полученных компьютерным моделированием (1) и аналитически (2)
Figure 10 — Graphs comparison of the dependencies of the maximum contact pressure obtained by computer modeling (1) and analytically (2)

решением для упругого контакта не превышает 10 %. Такие расхождения в первую очередь обусловлены погрешностью конечно-элементных расчетов, а также тем, что в аналитическом решении имеется ограничение на деформацию тел вне зоны контакта, в то время как в численном решении деформации тел вне зоны контакта учитываются.

3. Определено влияние условий контакта на напряженно-деформированное состояние в зоне контакта прорезиненного стального ролика со стальным проводником, для ситуации действия на ролик постоянной нагрузки. Установлено, что при рассмотрении контактной задачи данного типа удобно использовать такие типы контактных условий, как “Frictional” и “Frictionless”. При этом условия “Frictionless” (контакт без трения) используются для сравнения результатов конечно-элементного моделирования с аналитическим решением, так как используемое в качестве верификационного аналитическое решение не учи-

тывает трение. Контактные условия “Frictional” (контакт с трением) позволяют получить наиболее приближенные к реальным значения критической нагрузки, величин пластических деформаций и контактного давления, а также пятна контакта.

4. В качестве первого приближения установлены значения критических нагрузок для разных типов контакта, при которых возможно появление пластических деформаций. Выявлена зависимость величины пластических деформаций от приложенной к ролику нагрузки для разных типов контакта. Сделан вывод о влиянии трения на величину пластических деформаций и на их возникновение.

В дальнейшем будут рассмотрены задачи упругопластического контакта для различных моделей пластичности, исследована контактная задача при воздействии динамических нагрузок, а также рассмотрены задачи для трех роликов.

Верификация конечно-элементных моделей будет выполнена с использованием данных, получаемых аппаратурой системы мониторинга плавности движения SLUCH, разработанной фирмой ООО «ПассатИнновации», и решения соответствующих дополнительных задач механики.

Список литературы

1. Kuznetsov, N.K. Reduction of Dynamic Loads in Mine Lifting Installations / N.K. Kuznetsov, S.V. Eliseev, A.Yu. Perelygina // Journal of Physics: Conference Series. — 2018. — Vol. 944. — Pp. 1–9.
2. Samusia, V.I. Computer modeling and investigation of dynamics of system “vessel–reinforcement” in shafts with broken geometry / V.I. Samusia, I.S. Iliina, S.S. Iliina // Bulletin of PNRPU. Geology. Oil & Gas Engineering & Mining. — 2016. — Vol. 15(20). — Pp. 277–285.
3. Wu, R. Computational Fluid Dynamics Modeling of Rope-Guided Conveyances in Two Typical Kinds of Shaft Layouts / R. Wu, Z. Zhu, G. Cao // PLoS ONE. — 2015. — Vol. 10(2). — Pp. 1–12.
4. Simulation of the lateral oscillation of rope-guided conveyance based on fluid-structure interaction / R. Wu [et al.] // Journal of Vibroengineering. — 2014. — Vol. 16, Iss. 3. — Pp. 1555–1563.
5. Pershin, V. Research in the Impact of Dynamic Loads for the Development of Pentice Designs when Sinking Skip Shafts / V. Pershin, A. Kopytov, A. Wetti // IVth International Innovative Mining Symposium, 2019. — Vol. 105. — Pp. 1–6.
6. Wolny, S. Analysis of loads and stresses in structural elements of hoisting installations in mines / S. Wolny, F. Matachowski // Engineering Transactions. — 2010. — Vol. 58(3–4). — Pp. 153–174.
7. Чигарев, А.В. Ansys для инженеров / А.В. Чигарев, А.С. Кравчук, А.Ф. Смалюк. — М.: Машиностроение, 2004. — 512 с.
8. Журавков, М.А. Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности: учеб. пособие / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов. — Минск: БГУ, 2011. — 543 с.
9. Журавков, М.А. Определение силового взаимодействия скипа с направляющими по данным профилировки проводников / М.А. Журавков, С.С. Хвесеня, М.А. Николайчик // Актуальные вопросы машиноведения: сб. науч. тр. / Объедин. ин-т машиностроения НАН Беларуси; редкол.: С.Н. Поддубко [и др.]. — 2020. — Вып. 9. — С. 203–207.
10. Nikolaitchik, M.A. Determination of the skip force effect on guides in mine shaft / M.A. Nikolaitchik // E3S Web of Conferences. — 2020. — Vol. 201.
11. Ландау, Л.Д. Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц. — М.: Наука, 1987. — 246 с.
12. Попов, В.Л. Механика контактного взаимодействия / В.Л. Попов. — М.: Физматлит, 2013. — 352 с.
13. Дрозд, М.С. Инженерные расчеты упругопластической контактной деформации / М.С. Дрозд, М.М. Матлин, Ю.И. Сидякин. — М.: Машиностроение, 1986. — 224 с.

ZHURAVKOV Michael A., D. Sc. in Phys. and Math., Prof.

Head of Theoretical and Applied Mechanics Department¹

E-mail: Zhuravkov@bsu.by

NIKOLAITCHIK Mikhail A., M. Sc. in Phys. and Math.

Head of the Applied Mechanics Scientific Research Laboratory¹

E-mail: nikolaitchik.m@gmail.com

MAEVSKI Pavel S.

Student of Theoretical and Applied Mechanics Department¹

¹Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

Received 10 June 2021.

CONTACT PROBLEM OF INTERACTION OF A GUIDE ROLLER WITH A MINE CONDUCTOR

The article considers the force interaction contact problem of a guide roller with a mine conductor during the movement of a mine lifting conveyance on the example of a model problem of the contact interaction of a torus with a beam. The model problem analytical solution is considered, a finite element model of the system under study is developed. Contacting bodies materials elastoplastic behavior was taken into account when solving the problem. The various contact types between guiding roller and the conductors were considered. The values of critical loads leading to plastic deformations occurrence in a conductor with various types of contacts are determined and their relationship with the friction coefficient value is

established. Comparative analysis of the obtained analytical and numerical results demonstrates a high degree of correlation.

Keywords: guide roller, mine conductor, contact interaction, finite element analysis, friction contact, elastoplastic material

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2021-3-56-83-89>

References

1. Kuznetsov N.K., Eliseev S.V., Perelygina A.Yu. Reduction of dynamic loads in mine lifting installations. *Journal of physics: Conference series*, 2018, vol. 944, pp. 1–9.
2. Samusia V.I., Iliina I.S., Iliina S.S. Computer modeling and investigation of dynamics of system “vessel–reinforcement” in shafts with broken geometry. *Bulletin of PNRPU. Geology. Oil & Gas Engineering & Mining*, 2016, vol. 15(20), pp. 277–285.
3. Wu R., Zhu Z., Cao G. Computational fluid dynamics modeling of rope-guided conveyances in two typical kinds of shaft layouts. *PLoS ONE*, 2015, vol. 10(2), pp. 1–12.
4. Wu R., Zhu Z., Chen G., Cao G., Li W. Simulation of the lateral oscillation of rope-guided conveyance based on fluid-structure interaction. *Journal of vibroengineering*, 2014, vol. 16, iss. 3, pp. 1555–1563.
5. Pershin V., Kopytov A., Wetti A. Research in the impact of dynamic loads for the development of pentice designs when sinking skip shafts. *Proc. IVth International Innovative Mining Symposium*. Kemerovo, 2019, vol. 105, pp. 1–6.
6. Wolny S., Matachowski F. Analysis of loads and stresses in structural elements of hoisting installations in mines. *Engineering transactions*, 2010, vol. 58(3–4), pp. 153–174.
7. Chigarev A.V., Kravchuk A.S., Smaliuk A.F. *Ansys dlya inzhenerov* [Ansys for engineers]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 2004. 512 p. (in Russ.).
8. Zhuravkov M.A., Starovoitov E.I. *Mekhanika sploshnykh sred. Teoriya uprugosti i plastichnosti* [Continuum mechanics. Elasticity and plasticity theory]. Minsk, Belorusskiy gosudarstvennyy universitet Publ., 2011. 543 p. (in Russ.).
9. Zhuravkov M.A., Hvesenya S.S., Nikolaitchik M.A. Opredelenie silovogo vzaimodeystviya skipa s napravlyayushchimi po dannym profilirovki provodnikov [Determination of skip with guides force interaction according to the conductors profiling data]. *Aktualnye voprosy mashinovedeniya*, 2020, iss. 9, pp. 203–207 (in Russ.).
10. Nikolaitchik M.A. Determination of the skip force effect on guides in mine shaft. *E3S Web of Conferences*, 2020, vol. 201. DOI: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202020101017>.
11. Landau L.D., Livshits E.M. *Teoriya uprugosti* [Elasticity theory]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 246 p. (in Russ.).
12. Popov V.L. *Mekhanika kontaktного vzaimodeystviya* [Contact mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2013. 352 p. (in Russ.).
13. Drozd M.S., Matlin M.M., Sidyakin Yu.I. *Inzhenernye rachety uprugoplasticheskoy kontaktной deformatsii* [Engineering calculations of elastoplastic contact deformation]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1986. 224 p. (in Russ.).