

УДК 534.131:534-8

Д.А. СТЕПАНЕНКО, д-р техн. наук, доц.
 профессор кафедры «Конструирование и производство приборов»¹
 E-mail: stepd@tut.by

К.А. БУНЧУК
 инженер 2-й категории²
 E-mail: ksbunchuk@gmail.com

¹Белорусский национальный технический университет, г. Минск, Республика Беларусь²РИУП «Научно-технологический парк БНТУ «Политехник», г. Минск, Республика Беларусь

Поступила в редакцию 09.07.2021.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛНОВОДОВ

В статье описана методика моделирования усилителей ультразвуковых колебаний, выполненных в виде неоднородных кольцевых волноводов, основанная на применении метода гармонического баланса. Изгибные колебания волновода описаны с помощью неоднородных интегро-дифференциальных уравнений, эквивалентных уравнениям Эйлера–Бернулли, что упрощает расчет амплитудно-частотных характеристик колебаний, в частности, исключает необходимость работы с сингулярными матрицами. С помощью метода гармонического баланса уравнения колебаний сводятся к переопределенной неоднородной линейной системе алгебраических уравнений, решение которой в смысле наименьших квадратов определяется с помощью псевдообратной матрицы. На основе анализа численного примера показана возможность существования знакопеременных и знакопостоянных собственных форм колебаний волновода и установлено, что для реализации усилительной функции необходимо использовать волновод на знакопостоянной собственной форме. Знакопостоянные собственные формы представляет собой комбинацию изгибной деформации и деформации растяжения средней линии волновода и выявляются благодаря учету растяжимости средней линии в уравнениях колебаний. Достоверность полученных результатов подтверждена путем их сравнения с результатами моделирования с помощью метода конечных элементов.

Ключевые слова: ультразвук, волновод, концентратор, функционально-градиентный материал, изгибные колебания, метод гармонического баланса, метод конечных элементов

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2021-3-56-90-96>

Введение. В ультразвуковых колебательных системах (УЗКС), применяемых в технике и медицине, для передачи колебаний от источника к нагрузке и их усиления по амплитуде традиционно используются стержневые волноводы, которые при наличии усилительных свойств называют концентраторами. Из уровня техники также известны примеры применения в УЗКС кольцевых волноводных элементов, которые могут выполнять несколько функций:

- увеличение излучающей поверхности [1];
- обеспечение всестороннего воздействия колебаний на обрабатываемую среду [1, 2];
- изменение направления передачи колебаний [3–5];
- суммирование и разветвление акустических мощностей [3];
- усиление колебаний по амплитуде [5–9].

Наибольший интерес представляет усилительная функция кольцевых волноводов, кото-

рая может быть реализована несколькими способами [7–9]:

- за счет окружного изменения геометрических параметров поперечного сечения волновода, в частности, его осевого момента инерции I ;
- за счет окружного изменения упругих свойств материала волновода, в частности, его модуля продольной упругости E .

По сравнению со стержневыми концентраторами, кольцевые волноводы-концентраторы являются более компактными, что позволяет создавать на их основе малогабаритные УЗКС.

С технической точки зрения второй вариант реализации усилительной функции может быть осуществлен путем использования неоднородных кольцевых волноводов, изготовленных из функционально-градиентного материала (ФГМ) либо путем сварного соединения, например, методом диффузионной сварки, двух кольцевых сегментов из мате-

риалов с существенно различающимися упругими свойствами. В случае использования диффузионной сварки между материалами соединяемых сегментов формируется переходный слой с непрерывным изменением (градиентом) состава и физико-механических свойств и по этой причине можно считать данный вариант изготовления волновода частным случаем изготовления волновода из ФГМ.

Для однородных равнотолщинных кольцевых упругих элементов существуют хорошо развитые аналитические и численные методы расчета собственных частот и форм их колебаний [10, 11]. Менее развитой является теория расчета и проектирования неравнотолщинных и неоднородных кольцевых упругих элементов [12, 13]. Математическое моделирование неоднородных кольцевых волноводов может производиться методом передаточных матриц [14], однако при расчете собственных форм колебаний с помощью данного метода возникает необходимость работы с плохо обусловленными матрицами. Альтернативным способом моделирования, который рассматривается в данной статье, является использование метода гармонического баланса, который ранее применялся для решения задач расчета и проектирования стержневых концентраторов [15, 16]. Целью исследования является разработка и апробация методики расчета эксплуатационных характеристик (собственных частот колебаний и коэффициента усиления колебаний по амплитуде) неоднородных кольцевых волноводов, основанной на применении метода гармонического баланса.

Описание методики моделирования. Схема конструкции волновода, являющегося объектом исследования, представлена на рисунке 1.

Волновод состоит из двух последовательно соединенных сегментов 1 и 2, выполненных из материалов с различными значениями модуля упругости E и плотности ρ . Волновод представляет собой полное кольцо, которое своим входным сечением $\varphi = 0$ жестко соединяется со стержневым волноводом продольных колебаний 3, собственная частота продольных колебаний которого согласовывается с одной из собственных частот изгибных колебаний рассматриваемого кольцевого волновода. В силу геометрической симметрии модели и, учитывая, что в плоскости геометрической симметрии имеется только радиальная составляющая колебательного смещения с амплитудой

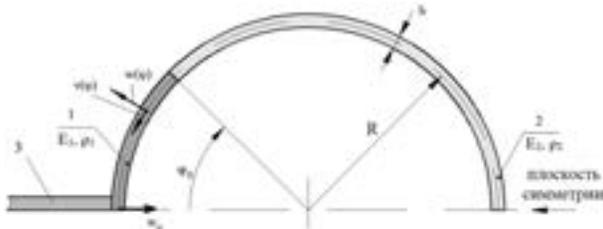


Рисунок 1 — Схема конструкции кольцевого волновода
Figure 1 — Design diagram of a ring waveguide

дой w_0 , совпадающей по величине и направлению с амплитудой продольных колебаний стержневого волновода, изгибные колебания волновода будут иметь симметричный характер, что позволяет при моделировании рассматривать вместо полного кольца его половину. В дальнейшем результаты расчетов приводятся для половины кольца в предположении, что они могут быть продолжены на вторую половину из соображений симметрии.

Для описания гармонических изгибных колебаний волновода в плоскости кривизны воспользуемся дифференциальными уравнениями типа Эйлера–Бернулли, учитывающими растяжение средней линии волновода и не учитывающими сдвиговых деформаций и инерции вращения поперечного сечения [17]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R^4} (Ew^{IV} + 2E'w''' + E''w'' + Ev''' + 2E'v'' + E''v') - \\ & - \frac{S}{IR^2} (Ev' - Ew) = \frac{\rho S \omega^2}{I} w; \\ & - \frac{1}{R^4} (Ew''' + E'w'' + Ev'' + E'v') - \\ & - \frac{S}{IR^2} (Ev'' + E'v' - Ew' - E'w) = \frac{\rho S \omega^2}{I} v, \end{aligned}$$

где R — радиус средней линии волновода, м; S — площадь поперечного сечения волновода, м²; I — осевой момент инерции поперечного сечения волновода, м⁴; $E(\varphi)$ — функция зависимости модуля упругости от угловой координаты φ , Па; $\rho(\varphi)$ — функция зависимости плотности от угловой координаты, кг/м³; $\omega = 2\pi f$ — циклическая частота колебаний, Гц; f — частота колебаний, Гц; $w(\varphi)$ — амплитуда радиальной составляющей колебательного смещения, м; $v(\varphi)$ — амплитуда тангенциальной составляющей колебательного смещения, м.

Штрихами обозначено дифференцирование по угловой координате φ .

Если ввести обозначение $u = w'$, то получим следующие интегро-дифференциальные уравнения колебаний:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R^4} (Eu''' + 2E'u'' + E''u' + Ev''' + 2E'v'' + E''v') + \\ & + \frac{S}{IR^2} \left(-Ev' + E \int_0^\varphi u d\varphi \right) - \frac{\rho S \omega^2}{I} \int_0^\varphi u d\varphi = \frac{\rho S \omega^2}{I} w_0 - \frac{ES}{IR^2} w_0; \\ & \frac{1}{R^4} (Eu'' + E'u' + Ev'' + E'v') + \\ & + \frac{S}{IR^2} \left(Ev'' + E'v' - Eu - E' \int_0^\varphi u d\varphi \right) + \frac{\rho S \omega^2}{I} v = \frac{SE'}{IR^2} w_0, \end{aligned}$$

где w_0 — амплитуда радиальной составляющей колебательного смещения во входном сечении волновода $\varphi = 0$, м.

Решения уравнений колебаний должны удовлетворять граничным условиям:

$$u(0) = 0; u''(0) = 0; u(\pi) = 0; \\ u''(\pi) = 0; v(0) = 0; v(\pi) = 0,$$

которые соответствуют симметричному характеру колебаний волновода.

При записанных граничных условиях поперечная сила во входном сечении волновода будет равна нулю, что объясняется его соединением с резонансным стержневым волноводом продольных колебаний, для которого в соединяемом с кольцевым волноводом выходном сечении амплитуда ξ продольных колебаний достигает максимума и, соответственно, для продольной силы

$$\text{выполняется условие } F = ES \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0.$$

Преимущество описания колебаний с помощью интегро-дифференциальных уравнений объясняется тем, что благодаря явному введению параметра w_0 в уравнения колебаний упрощается расчет амплитудно-частотных характеристик колебаний по сравнению с исходными дифференциальными уравнениями типа Эйлера–Бернулли, в частности, исчезает необходимость работы с сингулярными матрицами.

Для отыскания решения уравнений колебаний воспользуемся методом гармонического баланса, для чего представим входящие в уравнения функции угловой координаты в виде многочленов Фурье [15, 16]:

$$u(\varphi) = \sum_{i=1}^N a_i^{(u)} \sin(i\varphi); \quad v(\varphi) = \sum_{i=1}^N a_i^{(v)} \sin(i\varphi); \\ E(\varphi) = \sum_{i=0}^{2N} a_i^{(E)} \cos(i\varphi); \quad \rho(\varphi) = \sum_{i=0}^{2N} a_i^{(\rho)} \cos(i\varphi).$$

Функции $u(\varphi)$ и $v(\varphi)$, представленные в таком виде, автоматически удовлетворяют записанным выше граничным условиям.

Векторы амплитуд гармоник $\mathbf{a}^{(u)}$ и $\mathbf{a}^{(v)}$ являются неизвестными и подлежат определению с помощью метода гармонического баланса, а векторы $\mathbf{a}^{(E)}$ и $\mathbf{a}^{(\rho)}$ рассчитываются по известным формулам для коэффициентов ряда Фурье, исходя из заданных законов изменения модуля упругости и плотности по длине окружности волновода.

Для представления функций $u(\varphi)$ и $v(\varphi)$ используется N гармоник, а для представления функций $E(\varphi)$ и $\rho(\varphi)$ — $2N$ гармоник, что упрощает расчет коэффициентов Фурье для произведений вида Eu'' с помощью дискретной свертки. Как известно из теоремы Бореля о свертке для преобразования Фурье, произведению двух функций соответствует свертка их спектральных плотностей. В случае рядов Фурье комплексные коэффициенты Фурье произведения двух функций будут определяться путем дискретной свертки комплексных коэффициентов Фурье этих функций [18]:

$$y_1(\varphi)y_2(\varphi) = \sum_{k=-N}^N (\mathbf{c}^{(1)} * \mathbf{c}^{(2)})_k \exp(jk\varphi),$$

где j — мнимая единица; $\mathbf{c}^{(1)}$ и $\mathbf{c}^{(2)}$ — векторы коэффициентов Фурье функций $y_1(\varphi)$ и $y_2(\varphi)$, а дискретная свертка определяется выражением

$$(\mathbf{c}^{(1)} * \mathbf{c}^{(2)})_k = \sum_{i=-N}^N c_{k-i}^{(1)} c_i^{(2)}.$$

Вычисляя с помощью дискретной свертки амплитуды гармоник произведений, входящих в уравнения колебаний, и приравнявая между собой амплитуды гармоник одинакового порядка, стоящих в правой и левой частях уравнений, получим неоднородную систему линейных алгебраических уравнений относительно векторов $\mathbf{a}^{(u)}$ и $\mathbf{a}^{(v)}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{a}^{(u)} + \mathbf{B}\mathbf{a}^{(v)} = \mathbf{b}^{(1)}; \\ \mathbf{C}\mathbf{a}^{(u)} + \mathbf{D}\mathbf{a}^{(v)} = \mathbf{b}^{(2)}, \quad (1)$$

где \mathbf{A} и \mathbf{B} — матрицы коэффициентов размером $(N+1) \times N$; $\mathbf{a}^{(u)}$ и $\mathbf{a}^{(v)}$ — векторы амплитуд гармоник размером $N \times 1$; $\mathbf{b}^{(1)}$ — вектор неоднородных членов размером $(N+1) \times 1$; \mathbf{C} и \mathbf{D} — матрицы коэффициентов размером $N \times N$; $\mathbf{b}^{(2)}$ — вектор неоднородных членов размером $N \times 1$.

Элементы матриц \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} и \mathbf{D} определяются выражениями:

$$A_{ij} = \frac{1}{R^4} (A_{ij}^{(1)} + 2A_{ij}^{(2)} + A_{ij}^{(3)}) + \\ + \frac{S}{IR^2} A_{ij}^{(4)} - \frac{S\omega^2}{I} A_{ij}^{(5)}, \quad i=0...N, j=1...N; \\ B_{ij} = \frac{1}{R^4} (B_{ij}^{(1)} + 2B_{ij}^{(2)} + B_{ij}^{(3)}) - \frac{S}{IR^2} B_{ij}^{(4)}, \quad i=0...N, j=1...N; \\ C_{ij} = \frac{1}{R^4} (C_{ij}^{(1)} + C_{ij}^{(2)}) - \frac{S}{IR^2} (C_{ij}^{(3)} + C_{ij}^{(4)}), \quad i=1...N, j=1...N; \\ D_{ij} = \left(\frac{1}{R^4} + \frac{S}{IR^2} \right) (D_{ij}^{(1)} + D_{ij}^{(2)}) + \frac{S\omega^2}{I} D_{ij}^{(3)}, \quad i=1...N, j=1...N,$$

где $A_{ij}^{(1)}$, $A_{ij}^{(2)}$, $A_{ij}^{(3)}$, $A_{ij}^{(4)}$, $A_{ij}^{(5)}$ — коэффициенты, характеризующие вклад j -й гармоники функции $u(\varphi)$ в амплитуду i -й гармоники произведений Eu'' , $E'u''$, $E''u'$, $E \int_0^\varphi u d\varphi$, $\rho \int_0^\varphi u d\varphi$, входящих в уравнения колебаний; $B_{ij}^{(1)}$, $B_{ij}^{(2)}$, $B_{ij}^{(3)}$, $B_{ij}^{(4)}$ — коэффициенты, характеризующие вклад j -й гармоники функции $v(\varphi)$ в амплитуду i -й гармоники произведений Ev'' , $E'v''$, $E''v'$, Ev' ; $C_{ij}^{(1)}$, $C_{ij}^{(2)}$, $C_{ij}^{(3)}$, $C_{ij}^{(4)}$ — коэффициенты, характеризующие вклад j -й гармоники функции $u(\varphi)$ в амплитуду i -й гармоники произведений Eu'' , $E'u'$, Eu , $E' \int_0^\varphi u d\varphi$; $D_{ij}^{(1)}$, $D_{ij}^{(2)}$, $D_{ij}^{(3)}$ — коэффициенты, характеризующие вклад j -й гармоники функции $v(\varphi)$ в амплитуду i -й гармоники произведений Ev'' , $E'v'$, ρv .

Элементы векторов неоднородных членов имеют вид:

$$b_i^{(1)} = \frac{S\omega^2 w_0}{I} a_i^{(\rho)} - \frac{S w_0}{IR^2} a_i^{(E)}, \quad i=0...N; \\ b_i^{(2)} = -\frac{S w_0}{IR^2} i a_i^{(E)}, \quad i=1...N.$$

Из второго уравнения системы (1) вытекает линейная зависимость между векторами $\mathbf{a}^{(u)}$ и $\mathbf{a}^{(v)}$:

$$\mathbf{a}^{(v)} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}^{(2)} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{a}^{(u)},$$

подставляя которую в первое уравнение системы, получим уравнение относительно вектора $\mathbf{a}^{(u)}$:

$$\mathbf{M}^{(u)}\mathbf{a}^{(u)} = \mathbf{b}^{(u)}, \quad (2)$$

где матрица коэффициентов и вектор неоднородных членов определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(u)} &= \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}; \\ \mathbf{b}^{(u)} &= \mathbf{b}^{(1)} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}^{(2)}. \end{aligned}$$

Система (2) является переопределенной, так как число уравнений $N + 1$ больше числа неизвестных N . Такая система всегда имеет решение в смысле наименьших квадратов

$$\mathbf{a}^{(u)} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{M}^{(u)}\mathbf{x} - \mathbf{b}^{(u)}\|,$$

которое не всегда является единственным.

Для обеспечения единственности решения необходимо потребовать, чтобы евклидова норма решения $\|\mathbf{a}^{(u)}\|$ принимала наименьшее значение. Решение, удовлетворяющее этому требованию, рассчитывается с помощью псевдообратной матрицы Мура–Пенроуза, являющейся обобщением понятия обратной матрицы на случай прямоугольных матриц [19]:

$$\mathbf{a}^{(u)} = \mathbf{M}^{(u)\dagger}\mathbf{b}^{(u)},$$

где $\mathbf{M}^{(u)\dagger} = (\mathbf{M}^{(u)T}\mathbf{M}^{(u)})^{-1}\mathbf{M}^{(u)T}$ — псевдообратная матрица.

При заданных геометрических параметрах и свойствах материала задача определения собственных частот $f_{\text{рез}}$ симметричных изгибных колебаний волновода сводится к определению частот f , для которых модуль $|w(\pi)|$ амплитуды радиальной составляющей колебательного смещения в выходном сечении волновода $\varphi = \pi$ принимает максимальное значение:

$$f_{\text{рез}} = \arg \max_f \left| w_0 + 2 \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor} \frac{a_{2k-1}^{(u)}(f)}{2k-1} \right|, \quad (3)$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ — целая часть.

Данная методика определения собственных частот требует дополнительного математического обоснования полноты решения, однако сравнение значений собственных частот, рассчитанных на основе условия (3), с их значениями, определенными с помощью метода конечных элементов (МКЭ), показывает, что при рассмотрении симметричных собственных форм оба метода дают одинаковый набор собственных частот.

Результаты моделирования и их обсуждение.

В качестве численного примера рассмотрим задачу определения собственных частот изгибных колебаний волновода со следующими параметра-

ми: модуль упругости материала входного сегмента $E_1 = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па (сталь); модуль упругости материала выходного сегмента $E_2 = 1,3 \cdot 10^{11}$ Па (бронза); плотность материала входного сегмента $\rho_1 = 7800$ кг/м³; плотность материала выходного сегмента $\rho_2 = 8300$ кг/м³; половина центрального угла входного сегмента $\varphi_0 = 96^\circ$; половина угловой ширины переходного слоя между входным и выходным сегментами $d = \pi/32$ рад = $5,625^\circ$; радиус средней линии $R = 29$ мм; толщина в радиальном направлении $b = 2$ мм. Выбор угла $\varphi_0 = 96^\circ$ объясняется тем, что по данным предшествующих расчетов [20] при фиксированных значениях остальных параметров волновода данное значение угла обеспечивает максимальную величину коэффициента усиления колебаний по амплитуде. Число гармоник было принято равным $N = 30$, что позволило достаточно точно описывать быстрые изменения свойств материала и их производных в переходном слое. В результате расчета с помощью программы MathCad была получена кривая зависимости амплитуды $w(\pi)$ радиальной составляющей колебательного смещения в выходном сечении волновода от частоты f , представленная на рисунке 2.

Согласно уравнению (3) экстремумы графика соответствуют собственным частотам изгибных колебаний волновода. Каждый экстремум соответствует собственной форме колебаний определенного порядка n , характеризующейся наличием $2n$ узловых точек амплитуды. Вертикальными линиями отмечены значения собственных частот, определенные с помощью МКЭ с применением программы Comsol Multiphysics. Относительная погрешность определения собственных частот составила от 0,6 до 4,6 %. Коэффициент усиления колебаний по амплитуде на большинстве собственных частот, за исключением частоты 24,1 кГц, принимает близкие к единице значения. Анализ собственных форм колебаний показыва-

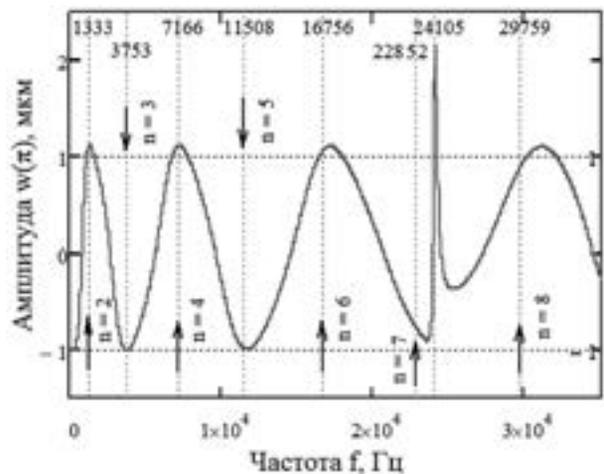
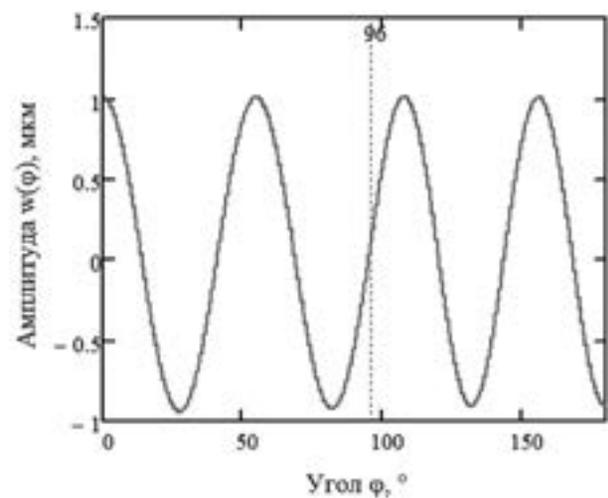


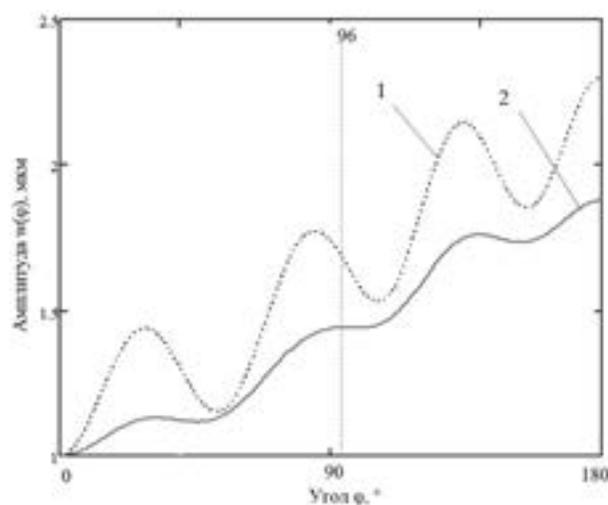
Рисунок 2 — Расчетная зависимость амплитуды $w(\pi)$ от частоты f

Figure 2 — Calculated dependence of the amplitude $w(\pi)$ on the frequency f

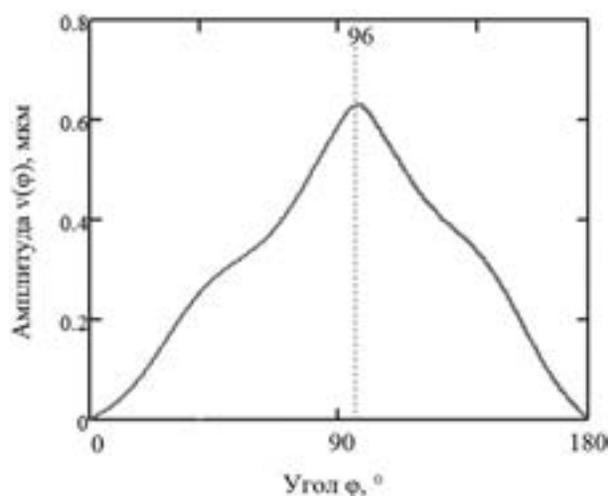
ет, что распределение амплитуды на собственных частотах, соответствующих близким к единице значениям коэффициента усиления, является ка-



a



b



c

Рисунок 3 — Расчетные распределения амплитуд:
 а — $w(\varphi)$ для частоты 23,6 кГц; б — $w(\varphi)$ для частоты 24,1 кГц;
 с — $v(\varphi)$ для частоты 24,1 кГц

Figure 3 — Calculated distributions of the amplitude:
 а — $w(\varphi)$ for the frequency of 23.6 kHz; б — for the frequency of 24.1 kHz; с — $v(\varphi)$ for the frequency 24.1 kHz

чественно схожим с распределением амплитуды для однородного кольца и характеризуется периодическим изменением знака амплитуды (рисунок 3 а).

Такие собственные формы могут быть описаны как знакопеременные и не представляют интереса с точки зрения усиления колебаний по амплитуде. Собственная форма, соответствующая частоте 24,1 кГц, дает коэффициент усиления $K = 2,16$ и представляет собой комбинацию изгибной деформации и деформации растяжения средней линии волновода или, другими словами, содержит коротко- и длинноволновую составляющие (см. рисунок 3 б, кривая 1). Такая собственная форма может быть охарактеризована как знакопостоянная, и для реализации усилительной функции волновода необходимо использовать его на данной собственной форме. Наличие знакопостоянных и знакопеременных собственных форм колебаний для неоднородных кольцевых волноводов было установлено ранее при их моделировании с помощью метода передаточных матриц [14, 20], однако подтверждение существования знакопостоянных собственных форм с помощью МКЭ в предшествующих исследованиях не проводилось.

Значение коэффициента усиления $K = 2,16$ для знакопостоянной собственной формы колебаний, определенное методом гармонического баланса, оказывается выше значения $K = 1,88$, определенного с помощью МКЭ. Кривая распределения амплитуды, полученная с помощью МКЭ для частоты 24,1 кГц (см. рисунок 3 б, кривая 2), качественно совпадает с кривой, полученной с помощью метода гармонического баланса, однако количественно отклоняется от нее до 27,8 %. Отмеченные количественные различия могут быть объяснены использованием упрощенных уравнений колебаний типа Эйлера–Бернулли: в дальнейших исследованиях планируется использование более точных уравнений типа Тимошенко, дополнительно учитывающих сдвиговые деформации и инерцию вращения поперечного сечения.

Что касается кривой распределения амплитуды $v(\varphi)$ тангенциальной составляющей колебательного смещения, то для частоты 24,1 кГц она, как и кривая $w(\varphi)$, содержит коротко- и длинноволновую составляющие (рисунок 3 с). Однако, в отличие от кривой $w(\varphi)$, кривая $v(\varphi)$ продолжается на вторую половину кольца антисимметричным (нечетным) образом и, соответственно, амплитуда тангенциальной составляющей меняет свой знак на второй половине кольца.

Выводы. 1. Разработана методика расчета эксплуатационных характеристик (собственных частот колебаний и коэффициента усиления колебаний по амплитуде) неоднородных кольцевых волноводов, основанная на применении метода гармонического баланса.

2. На основе анализа численного примера показана возможность существования двух типов собственных форм колебаний неоднородных кольцевых волноводов (знакопеременных и знакопостоянных форм) и установлено, что для реализации усилительной функции волновода необходимо обеспечить его колебания на знакопостоянной собственной форме.

3. Достоверность полученных результатов подтверждена путем их сравнения с результатами моделирования с помощью МКЭ.

Список литературы

1. Ultrasonic wave generator: pat. US 4074152 / K. Asai, A. Takeuchi. — Publ. Date: 14.02.78.
2. Experimental investigation of peening cylindrical workpieces utilizing a transducer with ring sonotrode / F. Bai [et al.] // Applied Sciences. — 2021. — Vol. 11. — Article 94.
3. Ультразвуковая колебательная система с промежуточным резонатором: пат. RU 2106205 / В.Н. Аленичев, Л.О. Макаров, А.А. Рухман. — Оpubл. 10.03.98.
4. Cardoni, A. Enhancing oral implantology with power ultrasonics / A. Cardoni // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. — 2010. — Vol. 57, no. 9. — Pp. 1936–1942.
5. Sonotrode für ein Ultraschall-Bearbeitungsgerät: Europäische Patentanmeldung EP 0594541 A2 / M. Bory, H. Bauer. — Veröffentlichungstag der Anmeldung 27.04.94.
6. Machine component: pat. US 3015961 / R.N. Roney. — Publ. date: 09.01.62.
7. Луговой, И.В. Разработка кольцевых концентраторов с переменной жесткостью для ультразвукового прошивания отверстий в хрупких материалах: автореф. дис. ... канд. техн. наук / И.В. Луговой. — Минск, 2017. — 27 с.
8. Степаненко, Д.А. Расчет и проектирование ультразвуковых акустических систем для использования в медицине и технике: дис. ... д-ра техн. наук / Д.А. Степаненко. — Минск, 2020. — 323 с.
9. Усилитель упругих колебаний по амплитуде: пат. ЕА 035595 / Д.А. Степаненко, К.А. Бунчук, А.С. Емельянова, М.А. Плескач, Н.В. Солодка. — Оpubл. 14.07.20.
10. Lang, T.E. Vibration of thin circular rings. Part I. Solution for modal characteristics and forced excitation. Jet Propulsion Laboratory Technical Report No. 32-261 / T.E. Lang. — Pasadena, 1962. — 21 p.
11. Hirashima, K. Higher-order theories for free vibration analysis of circular rings / K. Hirashima, K. Hirano // Proceedings of Japan Society of Civil Engineers. — 1990. — No. 416/I-13. — Pp. 201–204.
12. Laura, P.A.A. Vibrations of rings of variable cross section / P.A.A. Laura // Applied Acoustics. — 1988. — Vol. 25. — Pp. 225–234.
13. Lee, J.K. In-plane free vibration of uniform circular arches made of axially functionally graded materials / J.K. Lee, B.K. Lee // International Journal of Structural Stability and Dynamics. — 2019. — Vol. 19, no. 8. — Article 1950084.
14. Исследование характеристик составных кольцевых концентраторов ультразвуковых колебаний с помощью метода передаточных матриц / Д.А. Степаненко [и др.] // Электронный журнал «Техническая акустика». — 2018. — 2. — 11 с.
15. Степаненко, Д.А. Расчет и проектирование стержневых ультразвуковых концентраторов с помощью метода гармонического баланса / Д.А. Степаненко, В.И. Жуков, А.С. Роговцова // Техническая акустика. — 2019. — 3. — 11 с.
16. Hull, A.J. A modal solution for finite length rods with non-uniform area / A.J. Hull // Applied Sciences. — 2018. — Vol. 8. — Article 94.
17. Yang, F. Free in-plane vibration of general curved beams using finite element method / F. Yang, R. Sedaghati, E. Esmailzadeh // Journal of Sound and Vibration. — 2008. — Vol. 318. — Pp. 850–867.
18. Li, L. Use of Fourier series in the analysis of discontinuous periodic structures / L. Li // Journal of the Optical Society of America. — 1996. — Vol. 13, no. 9. — Pp. 1870–1876.
19. Lancaster, P. The theory of matrices: with applications / P. Lancaster, M. Tismenetsky. — San Diego: Academic Press, 1985. — 570 p.
20. Оптимизация кольцевых концентраторов ультразвуковых колебаний / Д.А. Степаненко [и др.] // Приборостроение-2018: материалы 11-й междунар. науч.-техн. конф., Минск, 14–16 нояб. 2018 г. / редкол.: О.К. Гусев [и др.]. — Минск, 2018. — С. 328–329.

STEPANENKO Dmitry A., D. Sc. in Eng., Assoc. Prof.

Professor of the Department “Device Design and Manufacture”¹

E-mail: stepd@tut.by

BUNCHUK Ksenija A.

Second Category Engineer²

E-mail: ksbunchuk@gmail.com

¹Belarusian National Technical University, Minsk, Republic of Belarus

²State Unitary Innovative Enterprise “Science and Technology Park of BNTU “Polytechnic”, Minsk, Republic of Belarus

Received 09 July 2021.

MATHEMATICAL MODELLING OF VIBRATIONS OF NON-UNIFORM RING-SHAPED ULTRASONIC WAVEGUIDES

The article describes technique for modelling of ultrasonic vibrations amplifiers, which are implemented in the form of non-uniform ring-shaped waveguides, based on application of harmonic balance method. Bending vibrations of the waveguide are described by means of non-uniform integral and differential equations equivalent to Euler–Bernoulli equations in order to simplify calculation of amplitude-frequency characteristics of vibrations, particularly, to exclude the need of working with singular matrices. Using harmonic balance method, equations of vibrations are reduced to overdetermined non-uniform linear system of algebraic equations, which least-squares solution is determined by means of pseudo-inverse matrix.

On the basis of analysis of numerical example possibility of existence of variable-sign and constant-sign vibration modes of the waveguide is shown and it is determined that for realization of amplifying function it is necessary to use waveguide at constant-sign vibration mode. The constant-sign vibration modes are combinations of bending deformation and extensional deformation of central line of the waveguide and they are detected due to accounting extensibility of the central line in equations of vibrations. Validity of the obtained results is confirmed by comparing them to the results of modelling by means of finite element method.

Keywords: ultrasound, waveguide, concentrator, functionally graded material, bending vibrations, harmonic balance method, finite element method

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2021-3-56-90-96>

References

- Asai K., Takeuchi A. *Ultrasonic wave generator*. Patent US, no. 4074152, 1978.
- Bai F., Wang L., Yang K., He Z., Qi G., Twiefel J. Experimental investigation of peening cylindrical workpieces utilizing a transducer with ring sonotrode. *Applied sciences*, 2021, vol. 11, iss. 1. DOI: <https://doi.org/10.3390/app11010094>.
- Alenichev V.N., Makarov L.O., Rukhman A.A. *Ultrazvukovaya kolebatelnaya sistema s promezhutochnym rezonatorom* [Ultrasonic oscillatory system with an intermediate resonator]. Patent RU, no. 2106205, 1998 (in Russ.).
- Cardoni A. Enhancing oral implantology with power ultrasonics. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics and frequency control*, 2010, vol. 57, no. 9, pp. 1936–1942.
- Bory M., Bauer H. *Sonotrode für ein Ultraschall-Bearbeitungsgerät*. Patent Application EP, no. 0594541 A2, 1994.
- Roney R.N. *Machine component*. Patent US, no. 3015961, 1962.
- Lugovoy I.V. *Razrabotka koltsevykh kontsentratorov s perezmennoy zhestkostyu dlya ultrazvukovogo proshivaniya otverstiy v khrupkikh materialakh*. Aftoref. diss. kand. tekhn. nauk [Development of ring concentrators with variable stiffness for ultrasonic stitching of holes in brittle materials. Extended Abstract of Ph. D. Thesis]. Minsk, 2017. 27 p. (in Russ.).
- Stepanenko D.A. *Raschet i proektirovanie ultrazvukovykh akusticheskikh sistem dlya ispolzovaniya v meditsine i tekhnike*. Diss. dokt. tekhn. nauk [Calculation and design of ultrasonic acoustic systems for use in medicine and engineering. D. Sc. Thesis]. Minsk, 2020. 323 p. (in Russ.).
- Stepanenko D.A., Kunchuk K.A., Emelyanova A.S., Pleskach M.A., Solodkaya N.V. *Usilitel uprugikh kolebaniy po amplitude* [Amplifier of elastic vibrations in amplitude]. Patent EA, no. 035595, 2020 (in Russ.).
- Lang T.E. *Vibration of thin circular rings. Part I. Solution for modal characteristics and forced excitation*. Jet propulsion laboratory technical report, no. 32-261, 1962. 21 p.
- Hirashima K., Hirano K. Higher-order theories for free vibration analysis of circular rings. *Proceedings of Japan Society of Civil Engineers*, 1990, no. 416/1-13, pp. 201–204.
- Laura P.A.A. Vibrations of rings of variable cross section. *Applied acoustics*, 1988, vol. 25, pp. 225–234.
- Lee J.K., Lee B.K. In-plane free vibration of uniform circular arches made of axially functionally graded materials. *International journal of structural stability and dynamics*, 2019, vol. 19, no. 8. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219455419500846>.
- Stepanenko D.A., Emelyanova A.S., Pleskach M.A., Solodkaya N.V. Issledovanie kharakteristik sostavnykh koltsevykh kontsentratorov ultrazvukovykh kolebaniy s pomoshchyu metoda peredatochnykh matrits [Investigation of characteristics of ultrasonic vibrations' compound annular amplifiers by means of transfer matrix method]. *Electronic journal "Technical acoustics"*, 2018, 2, 11 p. (in Russ.).
- Stepanenko D.A., Zhukov V.I., Rogovcova A.S. Raschet i proektirovanie sterzhnevyykh ultrazvukovykh kontsentratorov s pomoshchyu metoda garmonichskogo balansa [Design and modeling of bar ultrasonic horns by means of harmonic balance method]. *Electronic journal "Technical acoustics"*, 2019, 3, 11 p. (in Russ.).
- Hull A.J. A modal solution for finite length rods with non-uniform area. *Applied sciences*, 2018, vol. 8. DOI: <https://doi.org/10.3390/app8010094>.
- Yang F., Sedaghati R., Esmailzadeh E. Free in-plane vibration of general curved beams using finite element method. *Journal of sound and vibration*, 2008, vol. 318, pp. 850–867.
- Li L. Use of Fourier series in the analysis of discontinuous periodic structures. *Journal of the Optical Society of America*, 1996, vol. 13, no. 9, pp. 1870–1876.
- Lancaster P., Tismenetsky M. *The theory of matrices: with applications*. San Diego, Academic Press, 1985. 570 p.
- Stepanenko D.A., Emelyanova A.S., Pleskach M.A., Solodkaya N.V. Optimizatsiya koltsevykh kontsentratorov ultrazvukovykh kolebaniy [Optimization of ring concentrators of ultrasonic vibrations]. *Materialy 11-y mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii "Priborostroenie-2018"* [Proc. 11th International scientific and technical conference "Instrumentation Engineering-2018"]. Minsk, 2018, pp. 328–329 (in Russ.).