УДК 51-72, 519.635.6

С.В. КАШТАНОВА, канд. физ.-мат. наук
научный сотрудник[1]
E-mail: kastasya@yandex.ru

А.В. РЖОНСНИЦКИЙ
старший преподаватель кафедры математики[2]
E-mail: rzhonsnitskiy@yandex.ru

[1]Институт проблем машиноведения РАН, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация
[2]Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет), г. Санкт-Петербург, Российская Федерация

Поступила в редакцию 31.08.2022.

О ЕСТЕСТВЕННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ В ЗАДАЧЕ О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИНЫ С ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ВСТАВКОЙ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

В данной работе изучается вопрос об определении и влиянии естественных граничных условий в задаче о потере устойчивости тонкой пластины с эллиптической вставкой при растяжении. Сперва доказана естественность граничных условий типа «свободный край» для пластины с вырезом. Затем рассматривается пластина с жестко закрепленной вставкой и выведены естественные граничные условия. Проверены предельные случаи для абсолютно мягкой вставки и для абсолютно жесткой. Показано, что первый случай приводит к задаче с вырезом и соответствующими естественными граничными условиями, а второй — к отсутствию естественных условий, т. к. получается задача с защемленным краем. Авторы делают вывод, что использование дополнительных ограничений приведет к построению базиса, позволяющего ускорить сходимость последовательных приближений к ответу. Вариационные методы широко применяются во всех областях механики, в том числе и в области машино-, авиа-, ракетостроения. Точное решение задач теории упругости и строительной механики удается построить далеко не всегда, поэтому на практике придается большое значение различным приближенным методам, среди которых особое место занимают вариационные, основанные на непосредственной минимизации соответствующей энергии тела и позволяющие строить приближенные аналитические решения в форме функционального ряда. Целью вариационных методов является построение частичной суммы этого ряда, которая при достаточном количестве членов будет максимально точно приближена к решению. Однако на вопрос сходимости влияют многие факторы, и один из них — естественные граничные условия, которые и выводятся в данной работе для задачи о потере устойчивости пластины с эллиптической вставкой при растяжении.

Ключевые слова: *вариационные методы, естественные граничные условия, потеря устойчивости при растяжении*

DOI: https://doi.org/10.46864/1995-0470-2023-1-62-18-22

Введение. В данной работе изучается вопрос об определении и влиянии естественных граничных условий в задаче о потере устойчивости тонкой пластины с эллиптической вставкой. Для начала рассмотрим предельный случай этой задачи — случай с абсолютно мягкой вставкой, т. е. ее отсутствием, а это и есть задача о потере устойчивости пластины с эллиптическим вырезом.

Постановка задачи для пластины с эллиптическим вырезом. Основное уравнение устойчивости [1, 2] запишем в операторной форме:

$$\begin{gathered} Aw = \lambda Bw; \\ Aw = D \cdot \Delta\Delta w; \\ Bw = -ph\left[\sigma_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tau^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sigma_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right], \end{gathered} \tag{1}$$

где D — изгибная жесткость пластины; w — прогиб, заданный на пластине Ω; p — прикладываемая нагрузка; h — толщина пластины, напряжения с верхним индексом «0» означают напряжения при единичной нагрузке, т. е. $\sigma^0 = \sigma/p$.

Форме потери устойчивости соответствует собственный вектор w, а критической нагрузке p^* — собственное число λ, по которому она определяется так:

$$p^* = KE\left(\frac{h}{R}\right)^2; \quad K = \frac{\min \Lambda}{12\left(1-\nu^2\right)}, \tag{2}$$

где E — модуль Юнга пластины; ν — коэффициент Пуассона; R — характерный линейный размер отверстия.

Граничные условия для свободного края выреза Г можно записать в декартовых координатах в операторно-матричном виде:

$$\begin{gathered} L_1 w = 0; \quad L_2 w = 0; \\ L_1 w = D \times \\ \times\left[(1-\nu)(\cos\alpha, \sin\alpha)\mathrm{H}(w(x,y))\begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{pmatrix} + \nu\Delta w\right]; \\ L_2 w = -D \times \\ \times\left[(1-\nu)\frac{\partial}{\partial \overline{s}}\left((-\sin\alpha, \cos\alpha)\mathrm{H}(w(x,y))\begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{pmatrix}\right) + \frac{\partial \Delta w}{\partial \overline{n}}\right], \end{gathered} \tag{3}$$

где (cosα, sinα) — единичная внешняя нормаль $\overline{n}$ к Ω; (–sinα, cosα) — касательная $\overline{s}$ к границе выреза (при обходе по направлению касательной область остается по левую руку); $\mathrm{H}(w(x, y))$ — матрица Гессе:

$$\mathrm{H}(w(x,y)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Метод решения. Наиболее распространенным методом решения поставленной задачи о поиске собственных чисел λ и собственных векторов w уравнения (1) является вариационный [1–6]. Исходя из энергетического принципа, следует искать такие λ, при которых существует функция w, являющаяся точкой минимума квадратичного функционала энергии:

$$Q(w, w) = U(w, w) - \lambda W(w, w) \to \min, \tag{4}$$

где $U(w, v)$ и $W(w, v)$ — симметричные билинейные формы, определяющие потенциальную энергию и работу:

$$U(w,v) = \frac{D}{2}\iint_{\Omega} \Delta w \Delta v - (1-v)\left[\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{pmatrix}\right] dxdy;$$

$$W(w,v) = \frac{h}{2}\iint_{\Omega}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y}\end{pmatrix}\boldsymbol{\sigma}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix} dxdy,$$

где **σ** — тензор напряжений.

Важно отметить, что функционал (4) определен на более широком классе функций, необязательно удовлетворяющим граничным условиям (3). Однако ниже будет показано, что если $w_{\min}$ доставляет минимум функционалу (4), то автоматически удовлетворяются условия (3), и именно поэтому эти условия называются естественными.

Естественные граничные условия. Обзор литературы. Авторы настоящей работы заинтересовались вопросом, следует ли учитывать естественные условия для свободного края и как это отражается на сходимости последовательных приближений к ответу задачи, потому что этот вопрос крайне мало освещается в работах на соответствующие темы. В работе Пелле [2] рассматривается задача о потере устойчивости пластины с круговым отверстием при растяжении и учитывают граничные условия для свободного края, накладываются дополнительные ограничения на коэффициенты, однако это никак не комментируется. В 1989 году А.О. Бочкарев и Ю.М. Даль [3] при решении аналогичной задачи с криволинейным вырезом не дают никакой информации о граничных условиях для прогиба, и, скорее всего, уже их не учитывают. В более поздних работах А.О. Бочкарев с соавторами [5, 6] пишет о том, что условия свободных кромок отверстия являются естественными для функционала энергии, ссылаясь на [7]. Однако в [7] лишь сказано: «Заметим, не вдаваясь в подробности, что на свободной части контура получаются два естественных условия», а большее внимание в книге уделяется жестко закрепленному или свободно опертому контуру.

В работе [8] численно изучаются несколько примеров решений методом Ритца для рядов, удовлетворяющих только геометрическим граничным условиям, и для рядов, удовлетворяющих как естественным, так и геометрическим граничным условиям. В заключении утверждается, что метод Ритца обеспечивает сходимость к решению для прогибов при выполнении только геометрических граничных условий. Однако сходимость происходит значительно быстрее, когда учитываются также естественные граничные условия. Кроме того, если все граничные условия выполнены, то моменты, сдвиги, краевые усилия, как правило, также быстро сходятся, в то время как эти величины могут сходиться или не сходиться к правильному результату, если естественные граничные условия не учитываются.

Доказательство естественности граничных условий. Можно показать, что

$$2U(w,v) = (Aw,v) + \int_{\Gamma} L_1 w \cdot \frac{\partial v}{\partial \overline{n}}\, d\Gamma + \int_{\Gamma} L_2 w \cdot v d\Gamma. \quad (5)$$

В данной работе доказательство формулы (5) не приводится, так как это стандартные рассуждения, использующие формулу Грина для оператора Лапласа, формулу Остроградского–Гаусса, и также полезно заметить, что:

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x}\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Далее для вывода формулы (6) используются уравнения равновесия и рассуждения, аналогичные теореме Бетти о взаимности работ:

$$2W(w,v) = (Bw,v) + h\int_{\Gamma}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \begin{pmatrix} \cos\left(\widehat{\overline{n},x}\right) \\ \cos\left(\widehat{\overline{n},y}\right) \end{pmatrix} v d\Gamma. \quad (6)$$

Последнее слагаемое в формуле (6) в случае пластины с отверстием уходит в силу граничных условий на свободном крае для напряжений [9]:

$$2W(w, v) = (Bw, v). \quad (7)$$

Предположим, что нам удалось найти $w_{\min}$, тогда построим вспомогательную функцию

$$Q(w_{\min} + t\,\delta w, w_{\min} + t\delta w)$$

от переменной t, которая по предположению имеет минимум при $t = 0$, а значит ее производная в точке t равна нулю:

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{Q\left(w_{\min} + t\,\delta w, w_{\min} + t\delta w\right) - Q\left(w_{\min}, w_{\min}\right)}{t} =$$
$$= \lim_{t \to 0}\left[2Q\left(w_{\min}, \delta w\right) + tQ(\delta w, \delta w)\right] = 2Q\left(w_{\min}, \delta w\right). \quad (8)$$

Следовательно, согласно (4), (5) и (7) получаем:

$$\left(Aw_{\min}, \delta w\right) + \int_{\Gamma} L_1 w_{\min} \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial \overline{n}} d\Gamma +$$
$$+ \int_{\Gamma} L_2 w_{\min} \cdot \delta w d\Gamma - \lambda\left(Bw_{\min}, \delta w\right) = 0$$

или

$$\left(Aw_{\min} - \lambda Bw_{\min}, \delta w\right) + \int_{\Gamma} L_1 w_{\min} \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial \overline{n}} d\Gamma +$$
$$+ \int_{\Gamma} L_2 w_{\min} \cdot \delta w d\Gamma = 0.$$

В силу произвольности δw получаем, что

$$Aw_{\min} - \lambda Bw_{\min} = 0,\ L_1 w_{\min} = 0,\ L_2 w_{\min} = 0,$$

т. е. $w_{\min}$ — это решение задачи (1) с граничными условиями (3), а автоматическое выполнение граничных условий и есть по определению естественность граничных условий. Механический смысл условий (3), который не столь очевиден, — равенство нулю некоторых моментов. Эти условия были выведены Кирхгоффом именно из энергетических соображений [1].

Постановка задачи для пластины с эллиптической вставкой. Теперь рассмотрим постановку задачи о потере устойчивости растягиваемой бесконечной тонкой пластины с впаянной (защемленной по краю) эллиптической вставкой той же толщины. В задаче со вставкой нужно учитывать, что операторы A и B для пластины и для вставки отличаются напряжениями и изгибной жесткостью. Тогда основная система уравнений устойчивости будет выглядеть следующим образом (верхний индекс «pl» (plate) — пластина; «in» (inclusion) — включение):

$$\begin{cases} A^{\text{pl}} w^{\text{pl}} = \lambda B^{\text{pl}} w^{\text{pl}}; \\ A^{\text{in}} w^{\text{in}} = \lambda B^{\text{in}} w^{\text{in}}, \end{cases} \quad (9)$$

со следующими граничными условиями ($\overline{n}$ — внешняя нормаль к границе вставки):

$$\left(w^{\text{pl}} - w^{\text{in}}\right)\Big|_{\Gamma} = 0;\quad \frac{\partial}{\partial \overline{n}}\left(w^{\text{pl}} - w^{\text{in}}\right)\Big|_{\Gamma} = 0. \quad (10)$$

В такой постановке задача математической физики не равносильна вариационной постановке задачи, так как не хватает некоторых граничных условий. Выведем остальные не столь очевидные граничные условия и покажем, что они являются естественными.

По аналогии с предыдущим параграфом, для поиска решения, т. е. нахождения пары функций w_{in} и w_{pl}, удовлетворяющих системе уравнений (9) и граничным условиям (10), применяется энергетический метод:

$$Q\left(w^{\text{in}}, w^{\text{pl}}; w^{\text{in}}, w^{\text{pl}}\right) = U^{\text{in}}\left(w^{\text{in}}, w^{\text{in}}\right) + U^{\text{pl}}\left(w^{\text{pl}}, w^{\text{pl}}\right) -$$
$$- \lambda\left[W^{\text{in}}\left(w^{\text{in}}, w^{\text{in}}\right) + W^{\text{pl}}\left(w^{\text{pl}}, w^{\text{pl}}\right)\right] \to \min.$$

Вывод естественных условий для пластины с эллиптической вставкой. Рассуждая аналогичным образом, как и в случае выреза, формула (8) будет выглядеть следующим образом:

$$2Q(w^{\text{in}}, w^{\text{pl}}; \delta w^{\text{in}}, \delta w^{\text{pl}}) = 0.$$

Согласно формулам (4)–(6), получаем:

$$\left(A^{\text{in}} w^{\text{in}}_{\min}, \delta w^{\text{in}}\right) + \int_{\Gamma} L_1^{\text{in}} w^{\text{in}}_{\min} \cdot \frac{\partial \delta w^{\text{in}}}{\partial \overline{n}^{\text{in}}} d\Gamma +$$
$$+ \int_{\Gamma} L_2^{\text{in}} w^{\text{in}}_{\min} \cdot \delta w^{\text{in}} d\Gamma - \lambda\left(B^{\text{in}} w^{\text{in}}_{\min}, \delta w^{\text{in}}\right) -$$
$$- \lambda h\int_{\Gamma}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial w^{\text{in}}}{\partial x} & \dfrac{\partial w^{\text{in}}}{\partial y} \end{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{in}}(\overline{\boldsymbol{n}}^{\mathbf{in}}) \delta w^{\text{in}} d\Gamma + \left(A^{\text{pl}} w^{\text{pl}}_{\min}, \delta w^{\text{pl}}\right) +$$
$$+ \int_{\Gamma} L_1^{\text{pl}} w^{\text{pl}}_{\min} \cdot \frac{\partial \delta w^{\text{pl}}}{\partial \overline{n}^{\text{pl}}} d\Gamma + \int_{\Gamma} L_2^{\text{pl}} w^{\text{pl}}_{\min} \delta w^{\text{pl}} d\Gamma - \lambda\left(B^{\text{pl}} w^{\text{pl}}_{\min}, \delta w^{\text{pl}}\right) -$$
$$- \lambda h\int_{\Gamma}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial w^{\text{pl}}}{\partial x} & \dfrac{\partial w^{\text{pl}}}{\partial y} \end{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{pl}}(\overline{\boldsymbol{n}}^{\mathbf{pl}}) \delta w^{\text{pl}} d\Gamma = 0, \quad (11)$$

где $\overline{\boldsymbol{n}}^{\mathbf{in}}$ — внешняя нормаль к вставке; $\overline{\boldsymbol{n}}^{\mathbf{pl}}$ — внешняя нормаль к пластине, т. е. $\overline{n} = \overline{\boldsymbol{n}}^{\mathbf{in}} = -\overline{\boldsymbol{n}}^{\mathbf{pl}}$. Аналогично формуле (6), интегралы, содержащие напряжения, ввиду граничных условий для напряжений [10], взаимно уничтожаются. Для произвольных приращений δw^{in}, δw^{pl} граничные условия (10) примут вид:

$$\left(\delta w^{\mathrm{in}} - \delta w^{\mathrm{pl}}\right)\Big|_{\Gamma} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \overline{n}}\left(\delta w^{\mathrm{in}} - \delta w^{\mathrm{pl}}\right)\Big|_{\Gamma} = 0. \quad (12)$$

Ввиду произвольности приращений, используя (12) в (11), получаем:

$$A^{\mathrm{in}} w_{\min}^{\mathrm{in}} = \lambda B^{\mathrm{in}} w_{\min}^{\mathrm{in}}; \quad A^{\mathrm{pl}} w_{\min}^{\mathrm{pl}} = \lambda B^{\mathrm{pl}} w_{\min}^{\mathrm{pl}},$$

а на границе Г:

$$L_1^{\mathrm{in}} w_{\min}^{\mathrm{in}} - L_1^{\mathrm{pl}} w_{\min}^{\mathrm{pl}} = 0; \; L_2^{\mathrm{in}} w_{\min}^{\mathrm{in}} + L_2^{\mathrm{pl}} w_{\min}^{\mathrm{pl}} = 0. \quad (13)$$

Два равенства (13) и есть естественные граничные условия для задачи со вставкой. Таким образом, для того чтобы постановка задачи математической физики была полной, к условиям (9) и (10) необходимо добавить условия (13).

Разберем два предельных случая: для абсолютно мягкой вставки и бесконечно жесткой. В случае абсолютно мягкой вставки (что означает ее отсутствие) изгибная жесткость D^{in} стремится к нулю, и, таким образом по определению из формулы (3) операторы L_1^{in} и L_2^{in} равны нулю, а значит в формуле (13) остаются только естественные граничные условия для задачи с вырезом, а именно условия для свободного края:

$$L_1^{\mathrm{pl}} w^{\mathrm{pl}} = 0; \; L_2^{\mathrm{pl}} w^{\mathrm{pl}} = 0.$$

Для случая абсолютно жесткой вставки D^{in} стремится к бесконечности, а прогиб w^{in} стремится к нулю. Таким образом, операторы $L_1^{\mathrm{in}} w^{\mathrm{in}}$ и $L_2^{\mathrm{in}} w^{\mathrm{in}}$ содержат неопределенности типа $\{\infty \cdot 0\}$. Для раскрытия неопределенности поделим равенства (13) на D^{in}:

$$\frac{L_1^{\mathrm{in}} w^{\mathrm{in}}}{D^{\mathrm{in}}} - \frac{L_1^{\mathrm{pl}} w^{\mathrm{pl}}}{D^{\mathrm{in}}} = 0; \quad \frac{L_2^{\mathrm{in}} w^{\mathrm{in}}}{D^{\mathrm{in}}} + \frac{L_2^{\mathrm{pl}} w^{\mathrm{pl}}}{D^{\mathrm{in}}} = 0.$$

В первых слагаемых D^{in} сокращается, и эти слагаемые будут малы в силу равенства нулю w^{in}, а вторые слагаемые малы, потому что числитель ограничен, а знаменатель стремится к бесконечности. Тогда получаем тождественное равенство $0 = 0$, означающее, что никаких ограничений (т. е. естественных условий) в этом случае нет. При этом условия (10) превращаются в условия:

$$w^{\mathrm{pl}}\Big|_{\Gamma} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \overline{n}} w^{\mathrm{pl}}\Big|_{\Gamma} = 0,$$

что соответствует условиям защемленного края, как механически и должно быть.

Выводы. 1. Доказана естественность граничных условий типа «свободный край» для бесконечной пластины с вырезом.

2. Выведены естественные условия на границе между пластиной и вставкой для задачи о потере устойчивости бесконечной пластины с эллиптическим включением при растяжении

$$L_1^{\mathrm{in}} w^{\mathrm{in}} - L_1^{\mathrm{pl}} w^{\mathrm{pl}} = 0; \quad L_2^{\mathrm{in}} w^{\mathrm{in}} + L_2^{\mathrm{pl}} w^{\mathrm{pl}} = 0.$$

3. Приведены проверки для предельных случаев — абсолютно мягкой и абсолютно жесткой вставок. В случае абсолютно мягкой вставки получено, что естественным условием является свободный край, в случае абсолютно жесткой — естественные граничные условия отсутствуют. Прогиб пластины равен нулю как будто край прибит (жесткое защемление).

4. Учет дополнительных условий (естественных граничных условий) позволяет при разложении решения в ряд построить такой базис, для которого ряд сходится быстрее.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-60008.

Список литературы

1. Тимошенко, С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. — М.: Наука, 1966. — 636 с.
2. Pellet, D.A. Buckling of a tensioned panel containing circular hole / D.A. Pellet, R.G. Costello, J.E. Brock // AIAA Journal. — 1968. — Vol. 6, no. 10. — Pp. 2012–2014. — DOI: https://doi.org/10.2514/3.4918.
3. Бочкарев, А.О. Локальная устойчивость упругих пластин с вырезами / А.О. Бочкарев, Ю.М. Даль // Докл. АН СССР. — 1989. — Т. 308, № 2. — С. 312–315.
4. Разрушение и устойчивость тонких тел с трещинами / А.Н. Гузь [и др.]. — Киев: Наук. думка, 1981. — 184 с.
5. Бочкарев, А.О. Локальная потеря устойчивости пластины с круговым наноотверстием при одноосном растяжении / А.О. Бочкарев, М.А. Греков // Докл. Акад. наук. — 2014. — Т. 457, № 3. — С. 282. — DOI: https://doi.org/10.7868/S0869565214210099.
6. Соловьев, А.С. Устойчивость кольцевой пластины при растяжении сосредоточенными силами / А.С. Соловьев, А.О. Бочкарев // Вестн. СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. — 2017. — Т. 4(62), № 1. — С. 136–145. — DOI: https://doi.org/10.21638/ 11701/spbu01.2017.116.
7. Михлин, С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. — М.: Наука, 1970. — 512 с.
8. Ashton, J.E. Anisotropic plate analysis-boundary conditions / J.E. Aston // Journal of Composite Materials. — 1970. — Vol. 4, iss. 2. — Pp. 162–171. — DOI: https://doi.org/10.1177/002199837000400201.
9. Мусхелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости: Основные уравнения: Плоская теория упругости / Н.И. Мусхелишвили. — М.: АН СССР, 1949.
10. Мальков, В.М. Деформация пластины с упругим эллиптическим включением / В.М. Мальков, Ю.В. Малькова // Вестн. СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. — 2015. — Т. 2(60), № 4. — С. 617–632.

KASHTANOVA Stanislava V., Ph. D. in Phys. and Math.
Researcher[1]
E-mail: kastasya@yandex.ru

RZHONSNITSKIY Alexey V.
Senior Lecturer of the Department of Mathematics[2]
E-mail: rzhonsnitskiy@yandex.ru

[1]Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Saint-Petersburg, Russian Federation
[2]Saint-Petersburg State Institute of Technology, Saint-Petersburg, Russian Federation

Received 31 August 2022.

ON NATURAL BOUNDARY CONDITIONS IN THE STABILITY LOSS PROBLEM OF A PLATE WITH AN ELLIPTICAL INCLUSION UNDER TENSION

This paper studies the issue of determination and influence of natural boundary conditions in the problem of buckling of a thin plate with an elliptical inclusion under tension. First, the naturalness of the boundary conditions of the "free edge" type for a plate with a hole is proved. Then a plate with welded inclusion is considered and natural boundary conditions are derived. The limit cases are checked for an absolutely soft inclusion and for an absolutely rigid one. It is shown that the first case leads to a problem with a hole and the corresponding natural boundary conditions, and in the second case, to the absence of natural conditions, since a problem with a clamped edge occurs. The authors conclude that the use of additional restrictions will lead to the construction of a basis that will rapid up the convergence of the method. Variational methods are widely used in all fields of mechanics, including in the field of machine, aircraft, and rocket engineering. An exact solution to the problems of elasticity theory and structural mechanics is not always possible to construct, therefore, in practice, great importance is attached to various approximate methods. Among them a special place is occupied by variational methods based on the direct minimization of the corresponding energy of the body and making it possible to build approximate analytical solutions in the form of a functional series. The goal of variational methods is to construct a partial sum of this series, which, with a sufficient number of terms, will be maximum close to the solution. However, the issue of convergence is influenced by many factors, and one of them is the natural boundary conditions, which are derived in this paper for the problem of the stability loss of the plate with the elliptical inclusion under tension.

Keywords: *variational methods, natural boundary conditions, stability loss under tension*

DOI: https://doi.org/10.46864/1995-0470-2023-1-62-18-22

References

1. Timoshenko S.P., Voynovskiy-Kriger S. *Plastinki i obolochki* [Plates and shells]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 636 p. (in Russ.).
2. Pellet D.A., Costello R.G., Brock J.E. Buckling of a tensioned panel containing circular hole. *AIAA Journal*, 1968, vol. 6, no. 10, pp. 2012–2014. DOI: https://doi.org/10.2514/3.4918.
3. Bochkarev A.O., Dal Yu.M. Lokalnaya ustoychivost uprugikh plastin s vyrezami [Local stability of elastic plates with cuts]. *Doklady Akademii nauk SSSR*, 1989, vol. 308, no. 2, pp. 312–315 (in Russ.).
4. Guz A.N., Dyshel M.Sh., Kuliev G.G., Milovanova O.B. *Razrushenie i ustoychivost tonkikh tel s treshchinami* [Fracture and stability of thin bodies with cracks]. Kiev, Nauchnaya mysl Publ., 1981. 184 p. (in Russ.).
5. Bochkarev A.O., Grekov M.A. Lokalnaya poterya ustoychivosti plastiny s krugovym nanootverstiem pri odnoosnom rastyazhenii [Local instability of a plate with a circular nanohole under uniaxial tension]. *Doklady Akademii nauk*, 2014, vol. 457, no. 3, p. 282. DOI: https://doi.org/10.1134/S1028335814070106 (in Russ.).
6. Solovev A.S., Bochkarev A.O. Ustoychivost koltsevoy plastiny pri rastyazhenii sosredotochennymi silami [Buckling of an annular plate under tensile point loading]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2017, vol. 4(62), iss. 1, pp. 136–145. DOI: https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.116 (in Russ.).
7. Mikhlin S.G. *Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike* [Variational methods in mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1970. 512 p. (in Russ.).
8. Ashton J.E. Anisotropic plate analysis-boundary conditions. *Journal of composite materials*, 1970, vol. 4, iss. 2, pp. 162–171. DOI: https://doi.org/10.1177/002199837000400201.
9. Muskhelishvili N.I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti: Osnovnye uravneniya: Ploskaya teoriya uprugosti* [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity: Basic equations: Plane theory of elasticity]. Moscow, Akademiya nauk SSSR Publ., 1949 (in Russ.).
10. Malkov V.M., Malkova Yu.V. [Deformation of a plate with elliptic elastic inclusion]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2015, vol. 2(60), no. 4, pp. 617–632 (in Russ.).