

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.4

А.П. ЯНКОВСКИЙ, д-р физ.-мат. наук
ведущий научный сотрудник лаборатории физики быстропротекающих процессов
E-mail: yankovsky_ap@rambler.ru

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск,
Российская Федерация

Поступила в редакцию 11.04.2023.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОУПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГИБКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ АРМИРОВАННЫХ ОБОЛОЧЕК

Разработана математическая модель термоупруговязкопластического изгибного динамического деформирования тонких круговых цилиндрических оболочек со сложными структурами армирования. Слабое сопротивление поперечному сдвигу и волновые процессы в таких композитных конструкциях моделируются в рамках неклассической теории изгиба Амбарцумяна. Учет геометрической нелинейности задачи производится в приближении Кармана. Материалы композиции являются изотропными; их пластическое деформирование описывается соотношениями теории течения с функцией нагружения, которая зависит от температуры и скорости деформирования. Учтена связанность тепловой и механической составляющих рассматриваемой задачи. По толщине конструкций температура аппроксимирована полиномом 7-го порядка. Сформулированная нелинейная двумерная начально-краевая задача численно проинтегрирована с использованием явной схемы шагов по времени. Исследовано упруговязкопластическое и упругопластическое динамическое поведение стеклопластиковых и металлокомпозитных длинных цилиндрических оболочек, которые ортогонально армированы в окружном и продольном направлениях. Конструкции нагружаются изнутри давлением, которое аналогично давлению в воздушной взрывной волне. Показано, что гибкие стеклопластиковые оболочки при осесимметричном деформировании могут в отдельных точках испытывать дополнительный нагрев на 11...13 °С. Аналогичные же по геометрии и структуре армирования металлокомпозитные конструкции — на 40...60 °С. Термоупругопластические расчеты приводят к завышению максимальных значений температуры в стеклопластиковых оболочках на 1,0...1,5 °С по сравнению с термоупруговязкопластическими расчетами, а для металлокомпозитных конструкций, наоборот, к занижению этих величин на 20 °С. Продемонстрировано, что расчеты стеклопластиковых оболочек можно проводить без учета теплового отклика в них, а динамику металлокомпозитных оболочек целесообразно рассчитывать, учитывая температурный отклик. Динамическое поведение как металлокомпозитных, так и стеклопластиковых конструкций необходимо рассчитывать с учетом чувствительности пластических свойств их компонентов композиции к скорости деформирования.

Ключевые слова: гибкие цилиндрические оболочки, сложное армирование, динамическое нагружение, связанная термоупруговязкопластичность, теория изгиба Амбарцумяна, явная численная схема

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2023-3-64-25-36>

Введение. Оболочки и панели из композитных материалов (КМ), используемые в современной инженерии, могут подвергаться высокоинтенсивному силовому и тепловому нагружению [1–10],

при котором материалы компонентов композиции деформируются пластически [1, 4, 5, 7–9, 11–13]. Следовательно, актуальной является проблема математического моделирования динамического термоупругопластического деформирования тонкостенных КМ-конструкций, которая на сегодняшний день находится в стадии становления [1, 4, 5, 7–9, 14–17].

Физико-механические характеристики материалов существенно зависят не только от температуры [11, 12, 18, 19], но и от скорости деформирования [18, 19] (особенно пластические свойства при динамическом нагружении). В связи с этим в [17] была разработана модель неизотермического упруговязкопластического деформирования волокнистой среды и были проведены расчеты неупругой динамики гибких пластин из таких материалов, нагруженных воздушной взрывной волной, при учете температурного отклика в них. Однако термоупруговязкопластическое динамическое поведение гибких цилиндрических КМ-оболочек до настоящего времени не моделировалось.

Для расчета волновых процессов в динамически деформируемых КМ-пластинах и оболочках и для учета их ослабленного сопротивления поперечному сдвигу традиционно применяют неклассические теории Рейсснера [1, 7, 20, 21], Амбарцумяна [8, 9, 17, 22] или Редди [2, 6], реже используют более точные теории [1, 3, 23]. Нелинейные динамические задачи для тонкостенных элементов конструкций при этом интегрируют по явным [1, 8, 9, 17] или неявным [5, 24] численным схемам.

В связи со всем вышеизложенным данная работа посвящена моделированию динамического термоупруговязкопластического деформирования гибких армированных цилиндрических оболочек. Плохое сопротивление таких КМ-конструкций поперечному сдвигу учитывается в рамках теории изгиба Амбарцумяна [9, 22], а численное интегрирование связанной термомеханической задачи выполняется на базе явной схемы шагов по времени.

Постановка задачи. Рассмотрим замкнутую круговую цилиндрическую оболочку радиуса R , длиной D и толщиной $2h \ll \min(D, R)$ (рисунок 1), с которой свяжем цилиндрическую систему координат x_i , причем x_1 — осевая ($0 \leq x_1 \leq D$), x_2 — окружная (угловая) ($0 \leq x_2 < 2\pi$) и x_3 — радиальная ($R - h \leq x_3 \leq R + h$) координаты. Конструкция усилена N семействами волокон с плотностями армирования ω_k ($1 \leq k \leq N$). Структура армирования, которая может быть и пространственной, однородна в направлении x_3 . С каждым k -м семейством волокон свяжем локальную систему координат $x_i^{(k)}$, как изображено на рисунке 2. Направление армирования при этом задается двумя углами сферической системы координат θ_k и φ_k , а направляющие косинусы $l_{ij}^{(k)}$ осей $x_i^{(k)}$ относительно глобальных осей x_j ($i, j = \overline{1,3}, 1 \leq k \leq N$) определяются по формулам [17]:

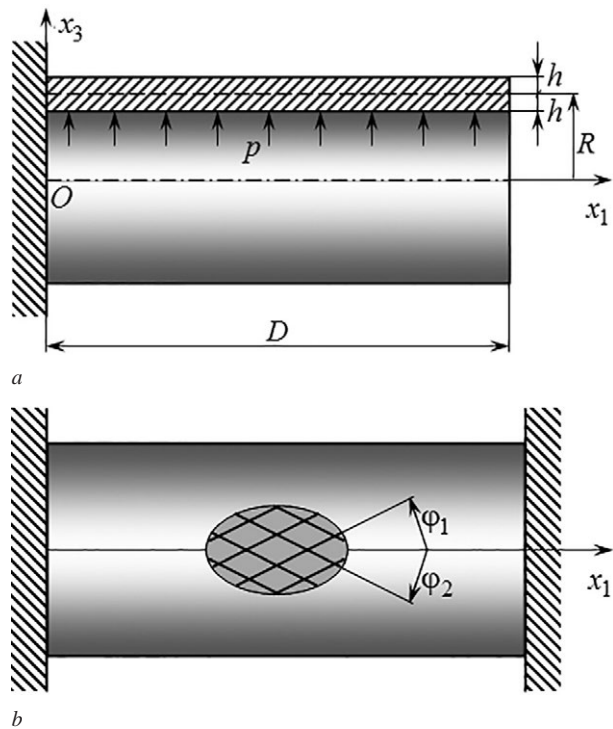


Рисунок 1 — Цилиндрические КМ-оболочки:
 а — с жестким закреплением левой кромки; б — с жестким закреплением обеих кромок
Figure 1 — Cylindrical shells of composite materials:
 a — with rigid fixation of the left edge; b — with rigid fixation of both edges

$$\begin{aligned}
 l_{11}^{(k)} &= \sin \theta_k \cos \varphi_k; & l_{12}^{(k)} &= \sin \theta_k \sin \varphi_k; & l_{13}^{(k)} &= \cos \theta_k; \\
 l_{21}^{(k)} &= -\sin \varphi_k; & l_{22}^{(k)} &= \cos \varphi_k; & l_{23}^{(k)} &= 0; \\
 l_{31}^{(k)} &= -\cos \theta_k \cos \varphi_k; & l_{32}^{(k)} &= -\cos \theta_k \sin \varphi_k; \\
 l_{33}^{(k)} &= \sin \theta_k, & 1 \leq k &\leq N.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Внешние касательные силы на лицевых поверхностях оболочки отсутствуют. Предполагается, что при пространственном армировании выполняются предъявляемые к структуре требования, изложенные в замечании в [17]. При традиционном

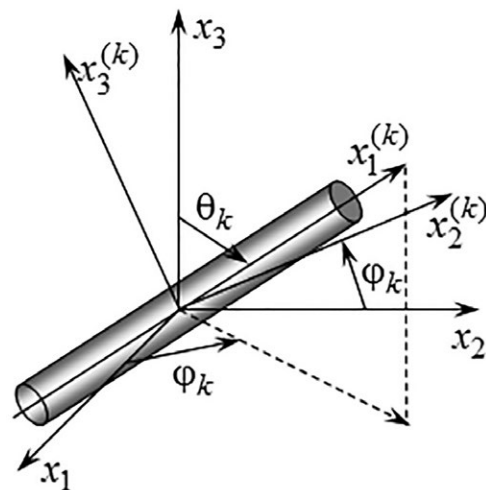


Рисунок 2 — Локальная система координат, связанная с волокном k -го семейства
Figure 2 — Local coordinate system associated with the fiber of the k -th family

перекрестном армировании по эквидистантным поверхностям (см. рисунки 1 *b* и 2 при $\theta_k = \pi/2$) данные требования выполняются заведомо. Тогда перемещения точек гибкой цилиндрической оболочки U_i и деформации ее композиции ε_{ij} , согласно теории Амбарцумяна [9, 22], запишутся так:

$$\begin{aligned} U_1(t, \mathbf{r}) &= u_1(t, \mathbf{x}) - z\partial_1 w + f_1^0(z)\varepsilon_{13}^0(t, \mathbf{x}); \\ U_2(t, \mathbf{r}) &= (R+z)R^{-1}u_2(t, \mathbf{x}) + \partial_2 w + f_2^0(z)\varepsilon_{23}^0(t, \mathbf{x}); \\ U_3(t, \mathbf{r}) &= w(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad \mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3), \quad x_3 \equiv R+z; \\ \mathbf{x} \in \Omega, \quad |z| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad \Omega = \{\mathbf{x}: 0 \leq x_1 \leq D, 0 \leq x_2 < 2\pi\}; \\ \varepsilon_{11}(t, \mathbf{r}) &= \partial_1 u_1 - z\partial_1^2 w + f_1^0(z)\partial_1 \varepsilon_{13}^0 + (\partial_1 w)^2 / 2; \\ \varepsilon_{22}(t, \mathbf{r}) &= (R+z)^{-1} \times \\ &\times \left[(R+z)R^{-1}\partial_2 u_2 + \partial_2^2 w + w + f_2^0(z)\partial_2 \varepsilon_{23}^0 \right] + \\ &+ (R+z)^{-2} (\partial_2 w)^2 / 2; \\ 2\varepsilon_{12}(t, \mathbf{r}) &= (R+z)^{-1} \left[\partial_2 u_1 - z\partial_1 \partial_2 w + f_1^0(z)\partial_2 \varepsilon_{13}^0 \right] + \\ &+ (R+z)R^{-1}\partial_1 u_2 + \partial_1 \partial_2 w + f_2^0(z)\partial_1 \varepsilon_{23}^0 + \\ &+ (R+z)^{-1} \partial_1 w \partial_2 w, \quad \varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) = h^{-2} (h^2 - z^2) \varepsilon_{i3}^0(t, \mathbf{x}), \quad i=1, 2, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} f_i^0(z) &\equiv 2h^{-2} \left[h^2 \Phi_i^{(0)}(z) - \Phi_i^{(2)}(z) \right], \quad i=1, 2; \\ \Phi_l^{(i)}(z) &\equiv h^{-l} (1+l)^{-1} z^{l+1}; \\ \Phi_2^{(l)}(z) &\equiv h^{-l} (R+z) \Psi_l(z); \\ \Psi_l(z) &\equiv \sum_{m=0}^{l-1} \frac{(-1)^m R^m z^{l-m}}{l-m} - R^l \ln(R+z), \quad l=0, 2; \end{aligned} \quad (4)$$

u_1 и u_2 — осевое и окружное перемещения точек срединной поверхности ($z=0$); w — прогиб; ε_{i3}^0 — деформации поперечного сдвига в точках поверхности $z=0$; z — введенная для удобства новая координата в поперечном направлении; t_0 — начальный момент времени t ; Ω — область, занимаемая срединной поверхностью; ∂_i — оператор частного дифференцирования по переменной x_i . В выражениях (2), (3) неизвестны двумерные функции $w, u_i, \varepsilon_{i3}^0$ ($i=1, 2$). Согласно результатам работы [9], в соотношениях (2)–(4) и далее в настоящем исследовании в отличие от [8] учитывается изменение метрики по толщине КМ-оболочки.

В данной работе моделируется динамическое термомеханическое поведение цилиндрической оболочки как гибкой тонкостенной системы, поэтому с точностью, приемлемой для инженерных приложений, напряжение $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$ по координате z можно представить формулой [21]:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) &= \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} z + \\ &+ \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |z| \leq h, \quad t \geq t_0, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}, \pm h)$ — нормальные напряжения на внутренней (–) и внешней (+) лицевых поверхностях, которые известны из силовых граничных условий.

Двумерные уравнения динамического равновесия гибкой цилиндрической КМ-оболочки при учете соотношений (2), (4) и (5) имеют вид [9]:

$$\begin{aligned} 2hr\ddot{w} &= \partial_1 \left(M_{13}^{(0)} + M_{11}^{(0)} \partial_1 w + \bar{M}_{12}^{(0)} \partial_2 w \right) + \\ &+ \partial_2 \left(\bar{M}_{23}^{(0)} + \bar{M}_{21}^{(0)} \partial_1 w + \bar{M}_{22}^{(0)} \partial_2 w \right) - \bar{M}_{22}^{(0)} + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}; \\ \rho \ddot{u}_1^{(l)} &= \partial_1 \left(M_{11}^{(l)} - M_{13}^{(l)} \partial_1 w \right) + \partial_2 \left(\bar{M}_{12}^{(l)} - \bar{M}_{23}^{(l)} \partial_1 w \right) - \\ &- lM_{13}^{(l-1)} + lM_{33}^{(l-1)} \partial_1 w - h^l \left[\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)} \right] \partial_1 w; \\ \rho \ddot{u}_2^{(l)} &= \partial_1 \left(M_{21}^{(l)} - \bar{M}_{13}^{(l)} \partial_2 w \right) + \partial_2 \left(\bar{M}_{22}^{(l)} - \bar{M}_{23}^{(l)} \partial_2 w \right) - \\ &- lM_{23}^{(l-1)} + l\bar{M}_{33}^{(l-1)} \partial_2 w - \\ &- h^l \left[(R+h)^{-1} \sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l (R-h)^{-1} \sigma_{33}^{(-)} \right] \partial_2 w + \bar{M}_{23}^{(l)}, \\ l &= 0, 1, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 \omega_0 + \sum_{k=1}^N \rho_k \omega_k; \quad \omega_0 = 1 - \sum_{k=1}^N \omega_k; \\ u_m^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h U_m(t, \mathbf{r}) z^l dz; \quad M_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) z^l dz; \\ \bar{M}_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h \frac{\sigma_{ij}(t, \mathbf{r})}{R+z} z^l dz; \quad \bar{\bar{M}}_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \frac{\sigma_{ij}(t, \mathbf{r})}{(R+z)^2} z^l dz; \\ lM_{33}^{(l-1)}(t, \mathbf{x}) &= l \int_{-h}^h \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) z^{l-1} dz = \\ &= \frac{h^l}{2} \left[(\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)}) (1 - (-1)^l) + \frac{l}{l+1} (\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}) (1 + (-1)^l) \right]; \\ l\bar{M}_{33}^{(l-1)}(t, \mathbf{x}) &= l \int_{-h}^h \frac{\sigma_{33}(t, \mathbf{r})}{R+z} z^{l-1} dz = \\ &= \frac{l}{2h} (\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)}) (\Psi_l(h) - \Psi_l(-h)) + \frac{l}{2} (\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}) \times \\ &\times (\Psi_{l-1}(h) - \Psi_{l-1}(-h)), \quad i, j = \bar{1}, \bar{3}, \quad l = 0, 1, \quad m = 1, 2; \end{aligned} \quad (7)$$

ρ_0, ρ_k — объемная плотность материала связующего и арматуры k -го семейства; σ_{ij} — усредненные напряжения в композиции; $M_{ij}^{(l)}, \bar{M}_{ij}^{(l)}$ и $\bar{\bar{M}}_{ij}^{(l)}$ — внутренние силовые факторы; точка над символом — производная по t . Внешними объемными силами в (6) пренебрегли. Незвестные функции u_i, ε_{i3}^0 в соотношениях (2), (3) однозначно выражаются через прогиб w и новые кинематические переменные $u_i^{(l)}, i=1, 2$ и $l=0, 1$ (см. (7)) при помощи матричного равенства (35) в [9].

Как отмечалось во введении, для численного решения рассматриваемой нелинейной задачи предполагается использовать явную пошаговую схему, когда неизвестные функции определяются в дискретные моменты времени $t = t_n$ ($n = 0, 1, 2$). Согласно результатам работ [9, 17], считаем, что в моменты времени t_{n-1}, t_n уже получены или заданы значения следующих функций:

$$\begin{aligned} w^m(\mathbf{x}) &\equiv w(t_m, \mathbf{x}); \quad u_l^{(p)}(\mathbf{x}) \equiv u_l^{(p)}(t_m, \mathbf{x}); \\ \sigma_{ij}^m(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}^m(t_m, \mathbf{r}); \quad \sigma_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}); \\ \Theta(\mathbf{r}) &\equiv \Theta(t_m, \mathbf{r}); \quad \dot{\Theta}(\mathbf{r}) \equiv \dot{\Theta}(t_{n-1}, \mathbf{r}); \\ \sigma_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}); \quad \varepsilon_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) \equiv \varepsilon_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}); \quad (8) \\ \chi_k(\mathbf{r}) &\equiv \chi_k(t_m, \mathbf{r}); \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) \equiv \dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(t_{n-1}, \mathbf{r}); \\ \ddot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \ddot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad l=1,2, \quad p=0,1, \quad i,j=\overline{1,3}, \\ m &= n-1, n, \quad 0 \leq k \leq N, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |z| \leq h, \end{aligned}$$

причем выполняются структурные равенства (см. (3) и (7))

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) &= \sum_{k=0}^N \omega_k \sigma_{ij}^{(k)}(t, \mathbf{r}); \\ \varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) &= \sum_{k=0}^N \omega_k \varepsilon_{ij}^{(k)}(t, \mathbf{r}), \quad i, j = \overline{1,3}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\sigma_{ij}^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}$ — напряжения и деформации в k -м материале композиции ($k=0$ — связующее, $k \geq 1$ — волокна k -го семейства); χ_k — параметр Одвишта в том же компоненте; Θ — температура композиции цилиндрической оболочки.

В текущий дискретный момент времени t_n скорости осредненных деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ и напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$ связаны между собой и температурой Θ следующим матричным равенством [17]:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{p}, \quad n=0,1,2,\dots, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= (\dot{\sigma}_1 \dot{\sigma}_2 \dot{\sigma}_3 \dot{\sigma}_4 \dot{\sigma}_5 \dot{\sigma}_6)^T \equiv (\dot{\sigma}_{11} \dot{\sigma}_{22} \dot{\sigma}_{33} \dot{\sigma}_{23} \dot{\sigma}_{31} \dot{\sigma}_{12})^T; \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= (\dot{\varepsilon}_1 \dot{\varepsilon}_2 \dot{\varepsilon}_3 \dot{\varepsilon}_4 \dot{\varepsilon}_5 \dot{\varepsilon}_6)^T \equiv (\dot{\varepsilon}_{11} \dot{\varepsilon}_{22} \dot{\varepsilon}_{33} 2\dot{\varepsilon}_{23} 2\dot{\varepsilon}_{31} 2\dot{\varepsilon}_{12})^T; \\ \mathbf{B} &= \left(\omega_0 \mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{B}_k \mathbf{E}_k \right) \mathbf{H}^{-1}; \quad \mathbf{p} = \mathbf{f} - \mathbf{B} \mathbf{g}; \\ \mathbf{f} &\equiv \omega_0 \mathbf{p}_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k \left(\mathbf{p}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{r}_k \right); \\ \mathbf{H} &\equiv \omega_0 \mathbf{I} + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{E}_k; \quad \mathbf{g} \equiv \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{r}_k; \quad \mathbf{r}_k \equiv \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{c}_k; \\ \mathbf{E}_k &\equiv \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{C}_k, \quad \mathbf{B}_k \equiv \mathbf{Z}_k + \frac{2}{\Delta} \mathbf{Y}_k; \\ \mathbf{p}_k &\equiv -\frac{2}{\Delta} \mathbf{Y}_k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k + \frac{2}{\Delta} \left(\Theta - \dot{\Theta} \right) \boldsymbol{\beta}_k; \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k \equiv \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k + \frac{\Delta}{2} \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k; \\ \dot{\Theta} &\equiv \dot{\Theta} + \frac{\Delta}{2} \ddot{\Theta}; \quad \mathbf{Z}_k = \bar{\mathbf{Z}}_k - G_k \bar{\mathbf{Z}}_k; \quad \mathbf{Y}_k = \tau_H^n \bar{\mathbf{Z}}_k; \end{aligned} \quad (11)$$

\mathbf{I} — единичная 6×6 матрица; $\mathbf{B}, \mathbf{B}_k, \mathbf{E}_k, \mathbf{C}_k, \mathbf{Z}_k, \mathbf{Z}_{-k}, \mathbf{Z}_{=k}, \mathbf{Y}_k$ — 6×6 матрицы; $\mathbf{D}_{-k}, \mathbf{H}^{-1}$ — матрицы, обратные 6×6 -матрицам \mathbf{D}_k, \mathbf{H} ; $\mathbf{p}, \mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{r}_k, \mathbf{c}_k, \mathbf{p}_k, \boldsymbol{\beta}_k$ — шестикомпонентные вектор-столбцы; ε_k — шестикомпонентный вектор-столбец деформаций $\varepsilon_{ij}^{(k)}$, аналогичный по структуре вектору $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ (см. (11)); Δ — шаг по времени t . Ненулевые элементы матриц $\mathbf{C}_k = (c_{ij}^{(k)})$, $\mathbf{D}_k = (d_{ij}^{(k)})$, $\bar{\mathbf{Z}}_k = (z_{ij}^{(k)})$, $\bar{\mathbf{Z}}_k = (\bar{z}_{ij}^{(k)})$, а также вектор-столбцов $\mathbf{c}_k = (c_i^{(k)})$ и $\boldsymbol{\beta}_k = (\beta_i^{(k)})$ определяются так:

$$\begin{aligned} c_{1j}^{(k)} &= d_{1j}^{(k)} = q_{1j}^{(k)}; \quad c_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(0)}; \\ d_{ij}^{(k)} &= \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(k)}; \quad \zeta_1^{(k)} = 0; \quad \zeta_i^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} (p_l^{(0)} - p_l^{(k)}), \quad (13) \\ i &= \overline{2,6}, \quad j = \overline{1,6}, \quad 1 \leq k \leq N; \\ g_{11}^{(k)} &= q_{11}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad g_{12}^{(k)} = q_{12}^{(k)} = l_{12}^{(k)} l_{12}^{(k)}, \quad \dots, \\ g_{16}^{(k)} &= 2q_{16}^{(k)} = 2l_{12}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad \dots, \quad 2g_{61}^{(k)} = q_{61}^{(k)} = 2l_{21}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad \dots, \quad (14) \\ g_{66}^{(k)} &= q_{66}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{22}^{(k)} + l_{12}^{(k)} l_{21}^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq N; \\ \bar{z}_{ij}^{(k)} &= 2\delta_{ij} G_k + \lambda_k; \quad \bar{z}_{ll}^{(k)} = G_k; \quad \beta_i^{(k)} = \frac{K_\Theta^{(k)}}{3K_k} \sum_{m=1}^3 \sigma_{mm}^{(k)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ 3K_k \alpha_k + \frac{S_i^{(k)}}{G_k} \left[G_\Theta^{(k)} - \tau_s^{(k)} \left(\tau_s^{(k)} G_\Theta^{(k)} - \tau_\Theta^{(k)} G_k \right) A_k \right]; \\ \beta_l^{(k)} &= \frac{S_l^{(k)}}{G_k} \left[G_\Theta^{(k)} - \tau_s^{(k)} \left(\tau_s^{(k)} G_\Theta^{(k)} - \tau_\Theta^{(k)} G_k \right) A_k \right]. \\ (i, j &= \overline{1,3}, \quad l = \overline{4,6}); \quad \bar{z}_{ij}^{(k)} = A_k s_i^{(k)} s_j^{(k)} \quad (i, j = \overline{1,6}); \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{\gamma_k G_k}{(G_k + \bar{G}_k) \tau_s^{(k)2}}; \quad K_\Theta^{(k)} = \frac{dK_k}{d\Theta}; \quad G_\Theta^{(k)} = \frac{dG_k}{d\Theta}; \\ \tau_\Theta^{(k)} &= \frac{\partial \tau_s^{(k)}}{\partial \Theta}; \quad \tau_H^{(k)} = \frac{\partial \tau_s^{(k)}}{\partial H_k}; \quad \bar{G}_k = \frac{\partial \tau_s^{(k)}}{\partial \chi_k}; \end{aligned}$$

$$\lambda_k = \frac{v_k E_k}{(1 + v_k)(1 - 2v_k)};$$

$$2G_k = \frac{E_k}{1 + v_k}; \quad 3K_k = \frac{E_k}{1 - 2v_k};$$

$$\gamma_k = \begin{cases} 0 & \text{при } T_k < \tau_s^{(k)} \text{ или } T_k = \tau_s^{(k)}, \quad W_k \leq 0, \\ 1 & \text{при } T_k = \tau_s^{(k)}, \quad W_k > 0; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} W_k &= G_k \mathbf{s}_k^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k + \tau_s^{(k)} G_k^{-1} \left(\tau_s^{(k)} G_\Theta^{(k)} - \tau_\Theta^{(k)} G_k \right) \dot{\Theta} - \\ &- 2\tau_s^{(k)} \tau_H^{(k)} H_k^{-1} \boldsymbol{\xi}_k^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k; \quad T_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 s_i^{(k)2} + \sum_{i=4}^6 s_i^{(k)2}; \end{aligned}$$

$$H_k^2 = 2 \sum_{i=1}^3 \xi_i^{(k)2} + 4 \sum_{i=4}^6 \xi_i^{(k)2}; \quad \chi_k = \int_{t_0}^{t_n} \sqrt{2 \dot{p}_{ij}^{(k)} \dot{p}_{ij}^{(k)}} dt;$$

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_k &= \left(s_1^{(k)} \ s_2^{(k)} \ s_3^{(k)} \ s_4^{(k)} \ s_5^{(k)} \ s_6^{(k)} \right)^T \equiv \\ &\equiv \left(s_{11}^{(k)} \ s_{22}^{(k)} \ s_{33}^{(k)} \ s_{23}^{(k)} \ s_{31}^{(k)} \ s_{12}^{(k)} \right)^T; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_k &= \left(\xi_1^{(k)} \ \xi_2^{(k)} \ \xi_3^{(k)} \ \xi_4^{(k)} \ \xi_5^{(k)} \ \xi_6^{(k)} \right)^T \equiv \\ &\equiv \left(\xi_{11}^{(k)} \ \xi_{22}^{(k)} \ \xi_{33}^{(k)} \ \xi_{23}^{(k)} \ \xi_{31}^{(k)} \ \xi_{12}^{(k)} \right)^T; \end{aligned}$$

$$\xi_{ij}^{(k)} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)} + \dot{p}_{ij}^{(k)}; \quad s_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)} - \frac{\delta_{ij}}{3} \sum_{m=1}^3 \sigma_{mm}^{(k)};$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^{(k)} = e_{ij}^{(k)} - \frac{\delta_{ij}}{3} \sum_{m=1}^3 \varepsilon_{mm}^{(k)} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad 0 \leq k \leq N,$$

где $e_{ij}^{(k)}, p_{ij}^{(k)}$ — упругие и пластические составляющие полной деформации $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ k -го компонента композиции; $E_k = E_k(\Theta), v_k = v_k(\Theta)$ — модуль упругости и коэффициент Пуассона того же материала; $\alpha_k = \alpha_k(\Theta)$ — коэффициент температурного

расширения; $\tau_s^{(k)} = \tau_s^{(k)}(\chi_k, H_k, \Theta)$ — предел текучести при чистом сдвиге, который зависит от параметра упрочнения χ_k , значения интенсивности скорости деформаций H_k и температуры Θ в данный момент времени t_n ; $b_{ij}^{(k)}, p_i^{(k)}$ ($0 \leq k \leq N$) — элементы матриц \mathbf{B}_k и вектор-столбцов \mathbf{p}_k , определенных равенствами (12); γ_k — параметр переключения: при $\gamma_k = 0$ реализуются условия термоупругого деформирования, нейтрального нагружения или разгрузки, а при $\gamma_k = 1$ — активного нагружения при пластическом деформировании k -го компонента композиции; δ_{ij} — символ Кронекера; индекс «Т» — операция транспонирования. В соотношениях (15) по повторяющимся индексам k, l суммирование нет и опущен верхний индекс n , который означает текущий момент времени $t = t_n$. Вектор-столбцы $\dot{\mathbf{e}}, \dot{\mathbf{e}}_k$ (см. (10)–(12)) связаны матричными равенствами [17]:

$$\dot{\mathbf{e}}_0 = \mathbf{H}^{-1} \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{g}; \quad \dot{\mathbf{e}}_k = \mathbf{E}_k \dot{\mathbf{e}}_0 + \mathbf{r}_k, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (16)$$

где вектор-столбцы \mathbf{g}, \mathbf{r}_k и матрицы \mathbf{H}, \mathbf{E}_k определены в (12). Для компонентов композиции выполняются определяющие уравнения, записанные также в матричном виде [17]:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k = \mathbf{B}_k \dot{\mathbf{e}}_k + \mathbf{p}_k, \quad 0 \leq k \leq N, \quad (17)$$

где $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k$ — шестикомпонентный вектор-столбец с элементами $\dot{\sigma}_{ij}^{(k)}$, аналогичный по структуре вектору $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ в (11); вектор \mathbf{p}_k и матрица \mathbf{B}_k определены в (12).

Вектор-столбец $\dot{\mathbf{e}}_k$ в (15) нужно заменить его конечно-разностным аналогом, полученным по формуле трапезий [17]:

$$\dot{\mathbf{e}}_k^n = \frac{2}{\Delta} \left(\dot{\mathbf{e}}_k^n - \frac{n-1/2}{\Delta} \dot{\mathbf{e}}_k^n \right), \quad 0 \leq k \leq N, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где последнее слагаемое уже определено в (12).

Не выписанные в (14) элементы 6×6 матриц $\mathbf{G}_k = (g_{ij}^{(k)})$, $\mathbf{Q}_k = (q_{ij}^{(k)})$ вычисляются так же, как и в [9, 17], и определяют преобразования векторов $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k, \dot{\mathbf{e}}_k$ (см. (17)) при переходе от глобальной системы координат x_j к локальной системе $x_i^{(k)}$ (см. рисунок 2), причем направляющие косинусы $l_{ij}^{(k)}$ между этими осями заданы равенствами (1).

На основании условий соответствия (11) из третьего равенства системы (10), которое предполагается линеаризованным с использованием метода переменных параметров упругости [9, 17], можно выразить скорость линейной поперечной деформации КМ-оболочки:

$$\dot{\mathbf{e}}_{33}^n \equiv \dot{\mathbf{e}}_3^n = \frac{1}{n} \left(\dot{\boldsymbol{\sigma}}_3^n - \sum_{i=1}^6 (1 - \delta_{3i}) b_{3i}^n \dot{\mathbf{e}}_i^n - p_3^n \right), \quad (18)$$

где b_{3i}, p_3 ($i = \overline{1,6}$) — элементы матрицы \mathbf{B} и вектор-столбца \mathbf{p} в (10); скорость напряжения $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_3$ определяется за счет дифференцирования по t аппроксимации (5); скорости же деформаций $\dot{\mathbf{e}}_i$ в правой части вычисляются путем дифференцирования по времени кинематических соотношений (3), т. е. выражаются через двумерные функции $w, \dot{w}, \dot{u}_i, \dot{\mathbf{e}}_3^0$

($i = 1, 2$). Если скорости деформаций композиции $\dot{\mathbf{e}}_i$ ($i = \overline{1,6}$) известны, т. е. известен вектор-столбец $\dot{\mathbf{e}}$ (см. (11)), то скорости деформаций компонентов композиции последовательно вычисляются по формулам (16).

Как и в [17], температуру КМ-конструкции Θ в поперечном направлении аппроксимируем полиномом порядка L :

$$\Theta(t, \mathbf{r}) - \Theta^0 = \sum_{i=0}^L \Theta_i(t, \mathbf{x}) z^i, \quad (19)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad |z| \leq h, \quad t \geq t_0,$$

где Θ_i ($0 \leq i \leq L$) — подлежащие определению двумерные функции; $\Theta^0 = \text{const}$ — температура естественного состояния КМ-оболочки.

Анализ экспериментальных данных [12, 18, 19] показывает, что удельную теплоемкость k -го компонента композиции c_k допустимо аппроксимировать квадратичной зависимостью от температуры:

$$c_k(\Theta - \Theta^0) = c_0^{(k)} + c_1^{(k)}(\Theta - \Theta^0) + c_2^{(k)}(\Theta - \Theta^0)^2, \quad 0 \leq k \leq N, \quad (20)$$

где $c_l^{(k)}$ ($l = \overline{0,2}$) — известные константы материала.

Для получения приведенных уравнений теплопроводности КМ-оболочки, как и в [17], используем метод Галеркина, выбирая в качестве весовых функций однородные полиномы z^m . В результате по аналогии с работой [17] с учетом равенств (19) и (20) получим систему двумерных уравнений:

$$\rho \dot{U}^{(m)} = -\partial_1 Q_1^{(m)} - \partial_2 \bar{Q}_2^{(m)} - \bar{Q}_3^{(m)} - \bar{Q}_3^{(m)} + W^{(m)}, \quad (21)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0, \quad 0 \leq m \leq L - 2;$$

$$-\sum_{l=0}^L (-1)^l h^{l-1} (l \lambda_{33}^{(-)} + h \alpha^{(-)}) \Theta_l(t, \mathbf{x}) = \alpha^{(-)} (\Theta_\infty^{(-)} - \Theta^0) + q_\infty^{(-)}(t, \mathbf{x}); \quad (22)$$

$$\sum_{l=0}^L h^{l-1} (l \lambda_{33}^{(+)} + h \alpha^{(+)}) \Theta_l(t, \mathbf{x}) = \alpha^{(+)} (\Theta_\infty^{(+)} - \Theta^0) - q_\infty^{(+)}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0;$$

$$C_0 \sum_{i=0}^L H(i+m) \Theta_i + \frac{C_1}{2} \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L H(i+j+m) \Theta_i \Theta_j + \frac{C_2}{3} \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L \sum_{l=0}^L H(i+j+l+m) \Theta_i \Theta_j \Theta_l = U^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad (23)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0, \quad 0 \leq m \leq L - 2,$$

где

$$U^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U(t, \mathbf{r}) z^m dz;$$

$$Q_i^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h q_i(t, \mathbf{r}) z^m dz \quad (i = \overline{1,3});$$

$$\bar{Q}_3^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \frac{\partial q_3(t, \mathbf{r})}{\partial z} z^m dz = h^m \left[q_3^{(+)} - (-1)^m q_3^{(-)} \right] - m Q_3^{(m-1)}(t, \mathbf{x});$$

$$\bar{Q}_j^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \frac{q_j(t, \mathbf{r})}{R+z} z^m dz \quad (j = 2, 3); \quad (24)$$

$$W^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} z^m dz;$$

$$C_l(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^N c_l^{(k)} \rho_k \omega_k(\mathbf{x}) \quad (l = 0, 1, 2);$$

$$H(s) \equiv \frac{h^{s+1}}{s+1} [1 - (-1)^{s+1}];$$

$$\lambda_{33}^{(\pm)} \equiv \lambda_{33}|_{\Theta = \Theta(t, \mathbf{x}, \pm h)}; \quad q_3^{(\pm)} \equiv q_3(t, \mathbf{x}, \pm h) = q_{\infty}^{(\pm)};$$

U — удельная внутренняя энергия композиции; q_i — компоненты осредненного вектора теплового потока, связанные с градиентом температуры Θ законом Фурье для КМ (см. (3.1)–(3.3) в [17]); $q_{\infty}^{(\pm)}$ — заданные значения тепловых потоков через внешнюю (+) и внутреннюю (–) лицевые поверхности конструкции; $\Theta_{\infty}^{(\pm)}$ — температура окружающей среды со стороны тех же поверхностей; $\alpha^{(\pm)}$ — коэффициент теплоотдачи на тех же лицевых поверхностях; λ_{33} — коэффициент теплопроводности композиции в поперечном направлении, который определяется по формулам (3.2) и (3.3) в [17].

Равенства (21) при учете (24) — это двумерные уравнения нестационарной теплопроводности в цилиндрической системе координат. Равенства (22) — это тепловые граничные условия общего вида на лицевых поверхностях конструкции, преобразованные с учетом разложения температуры (19). Соотношения (23) связывают двумерные функции $U^{(m)}$ (см. (24)) с коэффициентами аппроксимации (19) при учете представления (20).

Для завершения формулировки связанной неизоэнтальной задачи упруговязкопластического деформирования армированных оболочек к соотношениям (3), (6), (10) нужно добавить силовые и/или кинематические граничные условия (см. (26)–(29) в [9]), а также начальные условия для функций $w, u_i^{(l)}, i = 1, 2, l = 0, 1$ (см. (30) и (31) в [9]). Для однозначного же вычисления функций Θ_l ($0 \leq l \leq L$) в разложении (19) необходимо использовать теплофизические начальные и граничные условия, также получающиеся при помощи метода Галеркина (см. (4.20)–(4.22) в [17]).

Метод решения. Как и в [9], заменим в левых частях уравнений (6) вторые производные по времени от неизвестных функций их конечными разностями на трехточечном шаблоне $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$, тогда, учитывая обозначения, аналогичные (8), получим:

$$\frac{2h\rho}{\Delta^2} \left(w - 2w + w \right) = \partial_1 \left(M_{13}^{(0)} + M_{11}^{(0)} \partial_1 w + \bar{M}_{12}^{(0)} \partial_2 w \right) +$$

$$+ \partial_2 \left(\bar{M}_{23}^{(0)} + \bar{M}_{21}^{(0)} \partial_1 w + \bar{M}_{22}^{(0)} \partial_2 w \right) - \bar{M}_{22}^{(0)} + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)};$$

$$\frac{\rho}{\Delta^2} \left(u_1^{(l)} - 2u_1^{(l)} + u_1^{(l)} \right) = \partial_1 \left(M_{11}^{(l)} - M_{13}^{(l)} \partial_1 w \right) +$$

$$+ \partial_2 \left(\bar{M}_{12}^{(l)} - \bar{M}_{23}^{(l)} \partial_1 w \right) - l M_{13}^{(l-1)} + \quad (25)$$

$$+ l M_{33}^{(l-1)} \partial_1 w - h^l \left[\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)} \right] \partial_1 w;$$

$$\frac{\rho}{\Delta^2} \left(u_2^{(l)} - 2u_2^{(l)} + u_2^{(l)} \right) = \partial_1 \left(M_{21}^{(l)} - \bar{M}_{13}^{(l)} \partial_2 w \right) +$$

$$+ \partial_2 \left(\bar{M}_{22}^{(l)} - \bar{M}_{23}^{(l)} \partial_2 w \right) - l M_{23}^{(l-1)} + l \bar{M}_{33}^{(l-1)} \partial_2 w - h^l \times$$

$$\times \left[(R+h)^{-1} \sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l (R-h)^{-1} \sigma_{33}^{(-)} \right] \partial_2 w + \bar{M}_{23}^{(l)},$$

$$l = 0, 1, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

В текущий момент времени t_n по формулам (7) при учете (9) и предположений (8) можно рассчитать все силовые факторы и внешние силы в правых частях равенств (25). Используя при этом необходимые граничные условия (см. (26) и (28) в [9]), из уравнений (25) по явной схеме вычисляем значения неизвестных функций $w, u_i^{(l)}$ ($l = 0, 1$) при $t = t_{n+1}$. Далее по формуле (35) из [9] можно определить и функции $\bar{u}_i, \bar{\varepsilon}_{i3}$ ($i = 1, 2$), которые совместно с w задают перемещения точек КМ-оболочки U_i и осредненные деформации композиции $\bar{\varepsilon}_{ij}$ (см. (2) и (3)).

Предполагаем, что кроме функций, указанных в (8), в моменты времени t_{n-1}, t_n уже известны или заданы значения и таких функций (см. (19), (22) и (24)) [17]:

$$\Theta_l^m(\mathbf{x}) \equiv \Theta_l(t_m, \mathbf{x}); \quad \dot{\Theta}_l^m(\mathbf{x}) \equiv \dot{\Theta}_l(t_{n-1}, \mathbf{x});$$

$$U^{(j)}(\mathbf{x}) \equiv U^{(j)}(t_n, \mathbf{x}); \quad q_i(\mathbf{r}) \equiv q_i(t_n, \mathbf{r});$$

$$q_{\infty}^{(\pm)}(\mathbf{x}) \equiv q_{\infty}^{(\pm)}(t_n, \mathbf{x}); \quad \Theta_{\infty}^{(\pm)}(\mathbf{x}) \equiv \Theta_{\infty}^{(\pm)}(t_n, \mathbf{x}), \quad (26)$$

$$i = \bar{1}, 3, \quad m = n-1, n, \quad 0 \leq j \leq L-2,$$

$$0 \leq l \leq L, \quad 0 \leq k \leq N, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |z| \leq h.$$

Численное интегрирование теплофизической части исследуемой задачи также будем осуществлять с применением пошаговой схемы, но на двухточечном шаблоне $\{t_n, t_{n+1}\}$. После замены в левых частях равенств (21) производных по t_n их конечно-разностными аналогами при учете обозначений, подобных (26), получим:

$$\frac{\rho}{\Delta} \left(U^{(m)} - U^{(m)} \right) = -\partial_1 \bar{Q}_1^{(m)} - \partial_2 \bar{Q}_2^{(m)} - \bar{Q}_3^{(m)} - \bar{Q}_3^{(m)} + W^{(m)},$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 \leq m \leq L-2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (27)$$

На основании предположений (26) и выражений (24) при $t = t_n$ можно вычислить правые части в (27). Используя при этом тепловые граничные условия, которые задаются на кромках конструкции (см. (4.20) в [17]), и начальные условия по температуре, можно определить из (27) двумерные функции $U^{(m)}$ при $t = t_{n+1}$. Затем из уравнений (22) и (23), в которых правые части в момент вре-

мени t_{n+1} уже известны, при учете (24) вычисляем коэффициенты $\Theta_l(\mathbf{x})$ ($0 \leq l \leq L$) в представлении температуры (19). Если материалы композиции термочувствительны, т. е. в равенстве (20) $c_1^{(k)} \neq 0$ и (или) $c_2^{(k)} \neq 0$ ($0 \leq k \leq N$), то система уравнений (22) и (23) является нелинейной. Для ее линеаризации целесообразно применить метод переменных теплофизических параметров, аналогичный методу переменных параметров нелинейной упругости. Далее предложенная численная схема (25), (27) при учете соотношений (3), (7), (18), (24) и структурных формул (10)–(13) реализуется так же, как описано в [9, 17], причем в [17] показано, что в разностных уравнениях (25) и (27) шаг по времени Δ следует задавать так, чтобы выполнялись необходимые условия устойчивости Куранта–Фридрихса–Леви [1].

Обсуждение результатов расчетов. Рассмотрим неизотермическое упруговязкопластическое динамическое деформирование цилиндрической оболочки длиной $D = 4$ м, радиусом $R = 1$ м и толщиной $2h = 3$ см ($2h/R \approx 1/33$), жестко закрепленной на обеих кромках, т. е. $w = 0$, $U_i = 0$ при $x_1 = 0$, D и $t \geq t_0$ (см. рисунок 1 б и равенства (2), (6), (7), (25)). До момента времени $t = t_0 = 0$ конструкция покоится ($w \equiv 0$, $\dot{w} \equiv 0$, $U_i \equiv 0$ и $\dot{U}_i \equiv 0$, $i = 1, 2$) в естественном состоянии при температуре $\Theta = \Theta^0 = 20$ °С ($\mathbf{x} \in \Omega$, $|z| \leq h$ и $t < t_0$). В начальный момент времени t_0 оболочка изнутри нагружается давлением $p(t)$, которое условно соответствует воздействию воздушной взрывной волны [24]:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(+)} &\equiv 0; \quad -\sigma_{33}^{(-)} \equiv \\ &\equiv p(t) = \begin{cases} p_{\max} t / t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp[-\beta(t - t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\beta = -\ln(0,01) / (t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}; \quad (29)$$

p_{\max} — наибольшее значение $p(t)$, которое достигается при $t = t_{\max}$; t_{\min} — время, при котором уже можно не учитывать $p(t)$ по сравнению с p_{\max} (так, выражение (29) соответствует равенству $p(t_{\min}) = 0,01p_{\max}$). Базируясь на экспериментальных данных [24], примем в расчетах $t_{\max} = 0,1$ мс и $t_{\min} = 2$ мс.

Предполагаем, что теплообмен с окружающей средой на лицевых поверхностях конструкции реализуется в условиях естественной конвекции, т. е. $q_{\infty}^{(\pm)} \equiv 0$ и $\alpha^{(\pm)} = 30$ Вт/(м²·К) [25]. При этом температура воздуха равна температуре естественного состояния, т. е. $\Theta_{\infty}^{(\pm)} = \Theta_0$ (см. (22)). На торцевых поверхностях оболочки поддерживается температура $\Theta = \Theta^0$.

Конструкция может быть изготовлена из магниевого сплава ВТ65 [18], усиленного стальной проволокой У8А [12] (металлокомпозиция), или из эпоксисвязующего [13], армированного сте-

клянными волокнами [12] (стеклопластик). Упругопластическое поведение материалов композиций при постоянстве скорости деформирования $\dot{\epsilon}$ и температуры Θ характеризуется билинейной диаграммой:

$$\sigma = \begin{cases} E_k \epsilon, & |\epsilon| \leq \epsilon_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)} / E_k, \\ \text{sign}(\epsilon) \sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)} (\epsilon - \text{sign}(\epsilon) \epsilon_s^{(k)}), & \\ |\epsilon| > \epsilon_s^{(k)}, & 0 \leq k \leq N, \end{cases}$$

где σ , ϵ — напряжение при растяжении-сжатии и соответствующая ему деформация; $E_k = E_k(\Theta)$, $E_s^{(k)} = E_s^{(k)}(\Theta, \dot{\epsilon})$ — модули Юнга и линейного упрочнения материала k -й фазы композиции; $\sigma_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)}(\Theta, \dot{\epsilon})$ — предел текучести того же компонента. Физико-механические характеристики материалов композиций приведены в таблице. В двух ее последних частях (при $\dot{\epsilon} = 0,417$ с⁻¹ и $\dot{\epsilon} = 104$ с⁻¹) указаны только те значения величин, которые отличаются от приведенных в первой части (при $\dot{\epsilon} = 5 \cdot 10^{-4}$ с⁻¹). Здесь, как и в [17], не учитывается зависимость упругих и теплофизических характеристик от скорости деформирования $\dot{\epsilon}$ [18, 19]. Зависимости физико-механических характеристик от Θ аппроксимированы линейно по величинам, указанным в таблице, а зависимости пластических свойств материалов от $\dot{\epsilon}$ аппроксимированы как в [17].

Конструкции усилены двумя семействами волокон ($N = 2$), которые уложены в осевом x_1 и окружном x_2 направлениях с плотностями армирования $\omega_1 = 0,1$ и $\omega_2 = 0,3$ соответственно. Углы армирования при этом имеют значения (см. (1), рисунки 1 б и 2): $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$, $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \pi/2$.

Расчеты проводились для осесимметричного случая деформирования КМ-конструкций (решение не зависит от x_2). По продольной координате x_1 вводилась равномерная сетка с шагом $\Delta x_1 = D/100 = 4$ см; для стеклопластиковой оболочки шаг по времени $\Delta = 1$ мкс, а для металлокомпозитной — 0,25 мкс. Необходимые условия устойчивости разработанного численного метода при такой дискретизации задачи выполняются с запасом (см. (6.3) в [17]). Для Mg-У8А-оболочки расчеты проводились при $0 \leq t \leq 100$ мс, а для стеклопластиковой — при $0 \leq t \leq 500$ мс.

С целью изучения сходимости аппроксимации температурного поля в виде (19) в работе [17] были исследованы зависимости наибольших значений $\Theta_{\max}(L) = \max_{t,r} \Theta(t,r;L)$ от порядка полинома L . При этом оказалось, что как для относительно толстых, так и относительно тонких КМ-пластин при переходе от $L = 6$ к $L = 7$ приращение величины Θ_{\max} с практической точки зрения является пренебрежимо малым [17]. В случаях же $L \geq 8$ система линеаризованных уравнений (22) и (23), которая полностью совпадает с соответствующими равенствами в [17] и из которой, учитывая (24), вычисляются коэффициенты полиномиального представления температуры (19),

Таблица — Физико-механические характеристики материалов композиций [12, 13, 18]
 Table — Physical and mechanical characteristics of materials of composites [12, 13, 18]

Характеристика материала	Эпоксисвязующее	Стекловолокна	Магнийевый сплав ВМ65 (Mg)	Проволока из стали У8А
$\dot{\varepsilon} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$				
ρ , кг/м ³	1210,0 (20) 1208,0 (40)	2520,0 (20) 2519,6 (80)	1800,0 (20) 1796,2 (100)	7800,0 (20) 7791,8 (100)
E , ГПа	2,8 (20) 2,3 (40)	86,8 (20) 86,3 (80)	43,0 (20) 38,5 (100)	210,0 (20) 195,0 (100)
ν	0,330 (20) 0,333 (40)	0,250 (20) 0,254 (80)	0,330 (20) 0,334 (100)	0,300 (20) 0,305 (100)
σ_s , МПа	20 (20) 18 (40)	4500 (20) 4400 (80)	267 (20) 219 (100)	3968 (20) 3971 (200)
E_s , ГПа	1,114 (20) 0,783 (40)	6,230 (20) 5,168 (80)	0,379 (20) 0,367 (100)	6,973 (20) 5,014 (200)
λ , Вт/(м·К)	0,243 (20) 0,240 (40)	0,89 (20) 0,86 (80)	117,23 (20) 121,42 (100)	42,7 (20) 41,7 (100)
$\alpha \cdot 10^6$, К ⁻¹	68,1 (20) 70,3 (40)	2,5 (20) 2,6 (80)	20,9 (20) 22,6 (100)	12,3 (20) 13,2 (100)
c , кДж/(кг·К)	1,54 (20) 1,60 (40)	0,800 (20) 0,839 (80)	1,032 (20) 1,054 (100)	0,485 (20) 0,488 (100)
$\dot{\varepsilon} = 0,417 \text{ с}^{-1}$				
σ_s , МПа	— —	— —	306 (20) 243 (100)	— —
E_s , ГПа	— —	— —	0,589 (20) 0,596 (100)	— —
$\dot{\varepsilon} = 104,0 \text{ с}^{-1}$				
σ_s , МПа	22,0 (20) 19,5 (40)	4600 (20) 4550 (80)	385 (20) 340 (100)	4100 (20) 4075 (200)
E_s , ГПа	1,238 (20) 0,853 (40)	6,314 (20) 5,458 (80)	1,010 (20) 0,625 (100)	7,035 (20) 6,158 (200)

Примечание: ν — коэффициент Пуассона; α — коэффициент линейного теплового расширения; λ — коэффициент теплопроводности; c — удельная теплоемкость; в скобках указана температура (Θ , °С), при которой определено значение данной характеристики.

вырождается в плохо обусловленную. Поэтому при $L \geq 8$ зависимости $\Theta_{\max}(L)$ получают расходящимися. Предварительно выполненные аналогичные расчеты показали, что данный результат остается справедливым и для цилиндрических КМ-оболочек (графики соответствующих зависимостей $\Theta_{\max}(L)$ здесь не представлены). Исходя из этого, в последующих расчетах в разложении (19) принимаем $L = 7$.

На рисунке 3 приведены зависимости от времени максимальных значений температуры $\Theta_m(t) = \max_{\mathbf{r}} \Theta(t, \mathbf{r})$ ($0 \leq x_1 \leq D$ и $|z| \leq h$) в исследуемых стеклопластиковой (см. рисунок 3 а) и металлокомпозитной (см. рисунок 3 б) оболочках. Сплошные кривые 1 и пунктирные кривые 2 получены по упруговязкопластической и упругопластической теории соответственно. Во втором случае расчеты проводились по данным первой части таблицы (при $\dot{\varepsilon} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ — квазистатическое деформирование). Кривые на рисунке 3 а определены при $p_{\max} = 13 \text{ МПа}$ (28), а на рисунке 3 б — при $p_{\max} = 60 \text{ МПа}$. При таких значениях амплитуды внешней нагрузки

наблюдается неупругое деформирование всех фаз композиций обеих КМ-оболочек. Поведение кривых на рисунке 3 показывает, что для цилиндрических оболочек зависимости $\Theta_m(t)$ являются более сложными, чем для КМ-пластин (см. рисунок 4 в [17]). Сравнение кривых на рисунке 3 а свидетельствует о том, что оболочка из стеклопластика на рассматриваемом интервале времени при динамическом нагружении нагревается не более чем на 11...13 °С. Согласно же поведению кривых на рисунке 3 б, Mg–У8А-оболочка в отдельных точках может нагреваться на 40...60 °С. На рисунке 3 а кривая 2 лежит выше кривой 1, т. е. для стеклопластиковой конструкции упруго-пластический расчет (кривая 2) завышает величину $\Theta_m(t)$ по сравнению с упруговязкопластическим случаем (кривая 1), хотя это завышение невелико — не более 1,0...1,5 °С. На рисунке 3 б, наоборот, кривая 1 лежит существенно выше кривой 2, т. е. в случае металлокомпозитной оболочки упруго-пластический расчет на 10...20 °С занижает величину $\Theta_m(t)$ по сравнению с упруговязкопластическим расчетом.

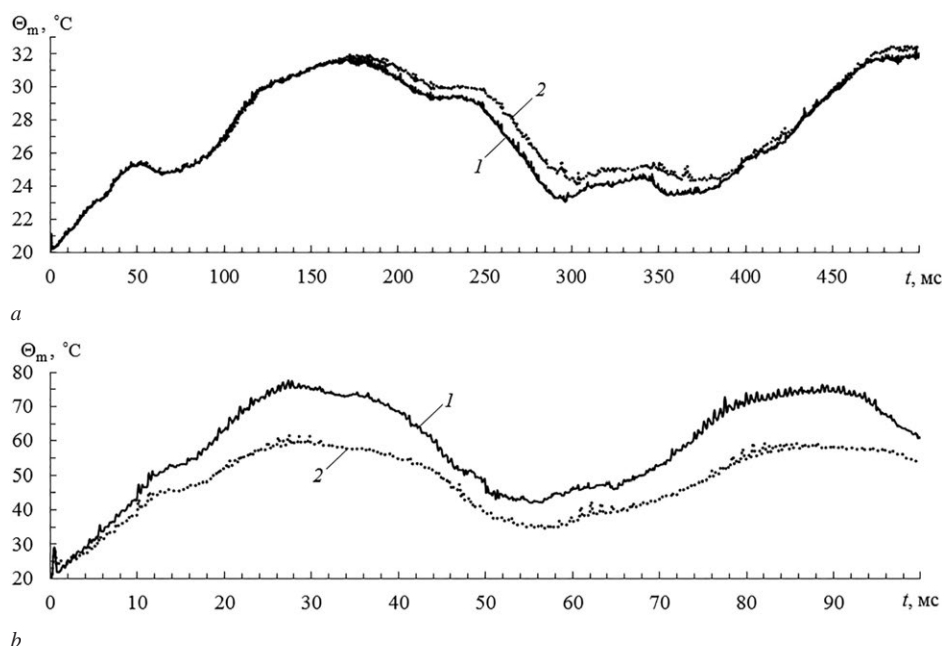


Рисунок 3 — Зависимости от времени максимальных значений температуры в стеклопластиковой (а) и металлокомпозитной (b) оболочках, полученные по разным теориям
 Figure 3 — Time dependences of maximum temperature values in fiberglass (a) and metal-composite (b) shells obtained by different theories

Несмотря на то, что кривые на рисунке 3 а различаются незначительно, деформированные состояния компонентов композиции стеклопластиковой оболочки, рассчитанные с учетом и без учета зависимости их пластических свойств от скорости деформирования, различаются существенно. В связи с этим на рисунке 4 изображены осцилляции максимальных значений интенсивности деформаций связующего $\varepsilon_*^{(0)}$ ($\varepsilon_m^{(0)}(t) = \max \varepsilon_*^{(0)}(t, \mathbf{r})$, $0 \leq x_1 \leq D$ и $|z| \leq h$) в стеклопластиковой конструкции (см. рисунок 4 а) и в металлокомпозитной оболочке (см. рисунки 4 b, c). Сплошные кривые 1 на рисунках 4 а, b получены по термоупруговязкопластической теории, а пунктирные кривые 2 — по термоупругопластической теории; кривые 1' соответствуют упруговязкопластическому расчету. Кривые 1 и 1' на рисунках 4 а, b визуально практически не различаются. Следовательно, упруговязкопластические расчеты как стеклопластиковых, так и металлокомпозитных оболочек можно проводить без учета теплового отклика в них, если отсутствуют источники тепла немеханического происхождения. Однако кривые 1 и 2 на рисунках 4 а, b различаются значительно. Так, максимум на кривой 2 на рисунке 4 а на 33,2 % больше аналогичной величины на кривой 1; максимум же на кривой 2 на рисунке 4 b на 24,1 % больше аналогичной величины на кривой 1. Таким образом, расчеты как стеклопластиковых, так и металлокомпозитных цилиндрических оболочек необходимо проводить с учетом чувствительности их пластических свойств к скорости деформирования.

Зависимость $\varepsilon_m^{(0)}(t)$, полученная для стеклопластиковой конструкции по упругопластической теории, визуально не отличается от кривой 2 на

рисунке 4 а, поэтому упругопластические расчеты стеклопластиковых цилиндрических оболочек, как и в упруговязкопластическом случае (см. кривые 1 и 1' на рисунке 4 а), можно проводить без учета возникающих температурных полей в них. Однако для металлокомпозитных конструкций этот вывод несправедлив. Так, на рисунке 4 с изображены зависимости $\varepsilon_m^{(0)}(t)$, рассчитанные для Mg-U8A-оболочки по упругопластической теории с учетом (кривая 1) и без учета (кривая 2) теплового отклика в ней. (Кривая 1 на рисунке 4 с полностью совпадает с кривой 2 на рисунке 4 b.) Как видно, кривые на рисунке 4 с существенно различны, причем максимум на кривой 2 на 34,5 % больше аналогичной величины на кривой 1. Следовательно, упругопластические расчеты металлокомпозитных конструкций нужно проводить с учетом температурных полей, возникающих в них.

Заключение. Анализ термоупруговязкопластического и термоупругопластического изгибного динамического осесимметричного деформирования цилиндрических волокнистых оболочек показал, что температурный отклик в них проявляется сложнее, чем в гибких КМ-пластинах [17]. При наибольших величинах интенсивностей деформаций материалов композиций порядка 5...7 % относительно тонкие длинные цилиндрические стеклопластиковые оболочки дополнительно нагреваются в отдельных точках на 11...13 °С, а аналогичные по геометрии и структуре армирования металлокомпозитные конструкции — на 40...60 °С. При этом термоупругопластический расчет стеклопластиковых оболочек приводит к завышению максимальных значений температуры не более чем на 1,0...1,5 °С по сравнению с термоупруговязкопла-

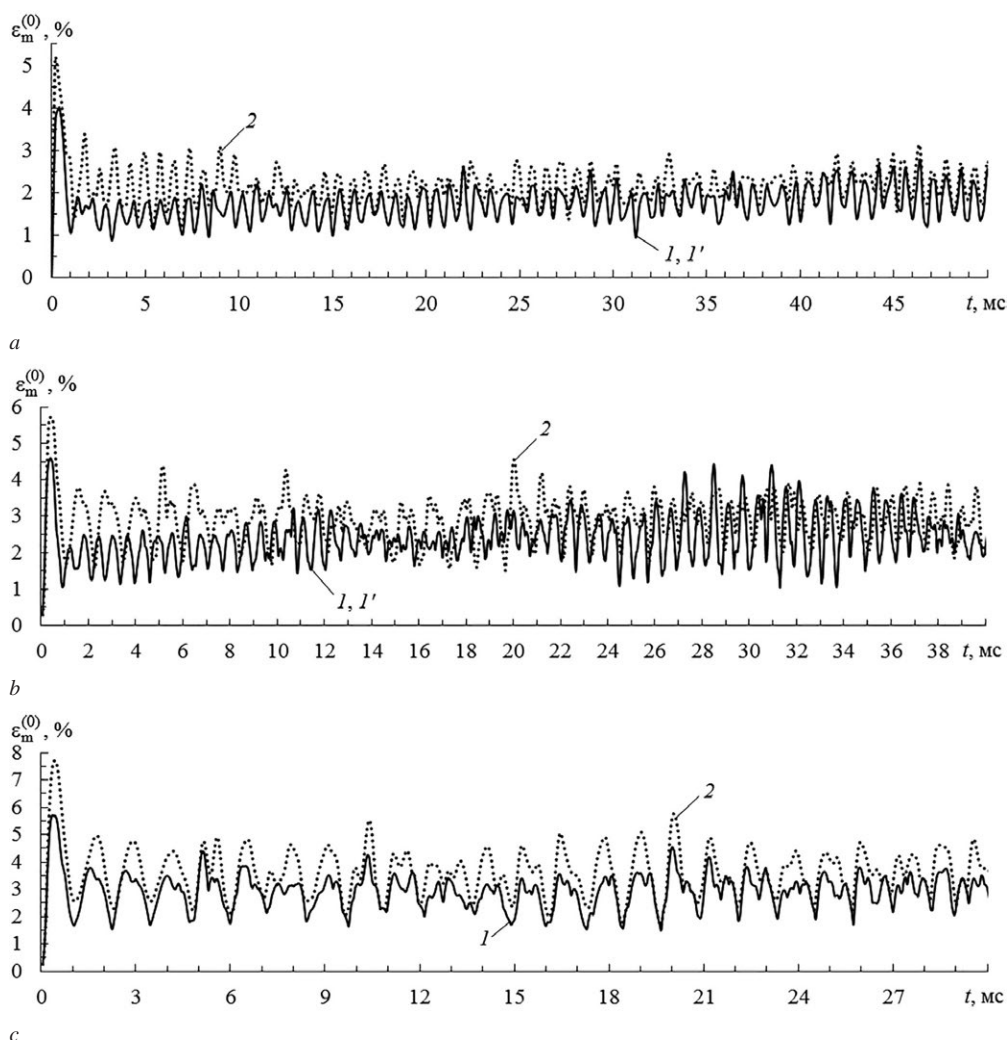


Рисунок 4 — Зависимости от времени наибольших значений интенсивности деформаций связующего в стеклопластиковой (a) и металлокомпозитной (b и c) оболочках, полученные по разным теориям
 Figure 4 — Time dependences of the largest values of binder strain intensity in fiberglass (a) and metal-composite (b and c) shells obtained by different theories

стическим случаем, а в металлокомпозитных конструкциях, наоборот, к занижению этих значений, причем на величину порядка 20 °С.

В силу малого нагрева стеклопластиковых оболочек их неупругую динамику можно вполне обоснованно рассчитывать без учета теплового отклика. Аналогично, и упруговязкопластические динамические расчеты металлокомпозитных (по крайней мере, из рассматриваемой Mg–У8А-композиции) оболочек можно проводить, не учитывая температурный отклик в них, если отсутствуют дополнительные источники тепла немеханической природы. Однако термоупругопластические и упругопластические расчеты металлокомпозитных конструкций могут приводить к существенно разным деформированным состояниям компонентов композиции (см. рисунок 4 c). Так как заранее невозможно предсказать, для каких именно металлокомпозитных оболочек неучет теплового отклика может привести к существенному искажению напряженно-деформированного состояния материалов композиции, металлокомпозитные оболочки,

по-видимому, целесообразно рассчитывать с учетом температурного отклика в них.

Как металлокомпозитные, так и стеклопластиковые цилиндрические оболочки необходимо рассчитывать с учетом зависимости пластических свойств их компонентов композиции от скорости деформирования, т. е. по упруговязкопластической теории.

Работа выполнена в рамках государственного задания (№ госрегистрации 121030900260-6).

Список литературы

1. Абросимов, Н.А. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций / Н.А. Абросимов, В.Г. Баженов. — Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. — 400 с.
2. Reddy, J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis / J.N. Reddy. — 2nd ed. — Boca Raton: CRC Press, 2004. — 831 p.
3. Пикуль, В.В. Механика оболочек / В.В. Пикуль. — Владивосток: Дальнаука, 2009. — 536 с.
4. Leu, S.-Y. Exact solutions for plastic responses of orthotropic strain-hardening rotating hollow cylinders / S.-Y. Leu, H.-C. Hsu // International Journal of Mechanical Sciences. — 2010. — Vol. 52, iss. 12. — Pp. 1579–1587. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmesci.2010.07.006>.

5. Kazanci, Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses / Z. Kazanci // International Journal of Non-Linear Mechanics. — 2011. — Vol. 46, iss. 5. — Pp. 807–817. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011>.
6. Андреев, А. Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа / А. Андреев. — Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing, 2013. — 93 с.
7. Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек / Ю.С. Соломонов [и др.]. — М.: Физматлит, 2014. — 408 с.
8. Янковский, А.П. Моделирование осесимметричного упругопластического деформирования цилиндрических волокнистых оболочек / А.П. Янковский // Механика машин, механизмов и материалов. — 2018. — № 2(43). — С. 68–76.
9. Янковский, А.П. Моделирование упругопластического поведения гибких цилиндрических оболочек с пространственными структурами армирования / А.П. Янковский // Конструкции из композиционных материалов. — 2019. — № 2. — С. 9–21.
10. Димитриенко, Ю.И. Механика композитных конструкций при высоких температурах / Ю.И. Димитриенко. — М.: Физматлит, 2019. — 448 с.
11. Composites: state of art / ed. by L.W. Weeton, E. Scala. — New York: AIME, 1974. — 365 p.
12. Композиционные материалы: справ. / под ред. Д.М. Карпиноса. — Киев: Наукова думка, 1985. — 592 с.
13. Справочник по композитным материалам: в 2 кн. / под ред. Дж. Любина; пер. с англ. А.Б. Геллера, М.М. Гельмонта; под ред. Б.Э. Геллера. — М.: Машиностроение, 1988. — Кн. 1. — 448 с.
14. Vena, P. Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites / P. Vena, D. Gastaldi, R. Contro // International Journal of Plasticity. — 2008. — Vol. 24, iss. 3. — Pp. 483–508. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2007.07.001>.
15. Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle / L. Brassart [et al.] // International Journal of Plasticity. — 2012. — Vol. 36. — Pp. 86–112. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.03.010>.
16. Ахундов, В.М. Инкрементальная каркасная теория сред волокнутого строения при больших упругих и пластических деформациях / В.М. Ахундов // Механика композитных материалов. — 2015. — Т. 51, № 3. — С. 539–558.
17. Янковский, А.П. Моделирование термоупруговязкопластического деформирования гибких армированных пластин / А.П. Янковский // Прикладная математика и механика. — 2022. — Т. 86, № 1. — С. 121–150.
18. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур / Н.И. Безухов [и др.]; под ред. И.И. Гольденבלата. — М.: Машиностроение, 1965. — 567 с.
19. Белл, Дж. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел: в 2 ч. / Дж. Белл. — М.: Наука, 1984. — Часть II. Конечные деформации. — 432 с.
20. Reissner, E. On transverse vibrations of thin shallow elastic shells / E. Reissner // Quarterly of Applied Mathematics. — 1955. — Vol. 13, no. 2. — Pp. 169–176. — DOI: <https://doi.org/10.1090/qam/69715>.
21. Богданович, А.Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек / А.Е. Богданович. — Рига: Зинатне, 1987. — 295 с.
22. Амбарцумян, С.А. Общая теория анизотропных оболочек / С.А. Амбарцумян. — М.: Наука, 1974. — 446 с.
23. Vasiliev, V.V. Advanced mechanics of composite materials and structural elements / V.V. Vasiliev, E. Morozov. — Amsterdam: Elsevier, 2013. — 412 p.
24. Houlston, R. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading / R. Houlston, C.G. DesRochers // Computers & Structures. — 1987. — Vol. 26, no. 1–2. — Pp. 1–15. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(87\)90232-X](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90232-X).
25. Теплотехника: учеб. для вузов / В.Н. Луканин [и др.]; под ред. В.Н. Луканина. — 4-е изд., испр. — М.: Высш. шк., 2003. — 671 с.

YANKOVSKII Andrei P., D. Sc. in Phys. and Math.

Leading Researcher of the Laboratory of Physics of High-Speed Processes

E-mail: yankovsky_ap@rambler.ru

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Novosibirsk, Russian Federation

Received 11 April 2023.

MODELING OF THERMOELASTIC-VISCOPLASTIC DYNAMIC DEFORMATION OF FLEXIBLE CYLINDRICAL REINFORCED SHELLS

A mathematical model of thermoelastic-viscoplastic flexural dynamic deformation of thin circular cylindrical shells with complex reinforcement structures is developed. Weak resistance to transverse shear and wave processes in such composite structures are modeled in the framework of Ambartsumyan's non-classical theory of bending. The geometric nonlinearity of the problem is taken into account in the Karman approximation. The composition materials are isotropic; their plastic deformation is described by the relations of the flow theory with a loading function that depends on temperature and strain rate. The connection between the thermal and mechanical components of the problem under consideration is taken into account. In the transverse direction of structures, the temperature is approximated by a 7th order polynomial. The formulated nonlinear two-dimensional initial-boundary value problem is numerically integrated using an explicit scheme of time steps. The elastic-viscoplastic and elastic-plastic dynamic behavior of fiberglass and metal-composite long cylindrical shells, which are orthogonally reinforced in the circumferential and longitudinal directions, is studied. Structures are loaded from the inside with pressure, which is similar to the pressure in an air blast wave. It is shown that flexible fiberglass shells during axisymmetric deformation can experience additional heating by 11...13 °C at certain points. Metal-composite structures similar in geometry and reinforcement structure — by 40...60 °C. Thermo-elastoplastic calculations lead to an overestimation of the maximum

temperature values in fiberglass shells by 1.0...1.5 °C compared to thermoelastic-viscoplastic calculations, and for metal-composite structures, on the contrary, to an underestimation of these values by 20 °C. It is shown that the calculations of fiberglass shells can be carried out without taking into account the thermal response in them, and it is advisable to calculate the dynamics of metal-composite shells, taking into account the temperature response in them. The dynamic behavior of both metal-composite and fiberglass structures must be calculated taking into account the sensitivity of the plastic properties of their composition components to the strain rate.

Keywords: flexible cylindrical shells, complex reinforcement, dynamic loading, coupled thermoelastic-viscoplasticity, Ambartsumyan's bending theory, explicit numerical scheme

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2023-3-64-25-36>

References

1. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. *Nelineynye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruksiy* [Nonlinear problems of dynamics composites designs]. Nizhny Novgorod, Nizhegorodskiy gosudarstvennyy universitet im. N.I. Lobachevskogo Publ., 2002. 400 p. (in Russ.).
2. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis*. Boca Raton, CRC Press, 2004. 831 p.
3. Pikul V.V. *Mekhanika obolochek* [Mechanics of shells]. Vladivostok, Dalnauka Publ., 2009. 536 p. (in Russ.).
4. Leu S.-Y., Hsu H.-C. Exact solutions for plastic responses of orthotropic strain-hardening rotating hollow cylinders. *International journal of mechanical sciences*, 2010, vol. 52, iss. 12, pp. 1579–1587. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2010.07.006>.
5. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses. *International journal of non-linear mechanics*, 2011, vol. 46, iss. 5, pp. 807–817. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011>.
6. Andreev A.N. *Uprugost i termouprugost sloistyykh kompozitnykh obolochek. Matematicheskaya model i nekotorye aspekty chislenogo analiza* [Elasticity and thermo-elasticity layered composite shells. Mathematical model and some aspects of the numerical analysis]. Saarbrücken, Palmarium Academic Publishing, 2013. 93 p. (in Russ.).
7. Solomonov Yu.S., Georgievskiy V.P., Nedbay A.Ya., Andryushin V.A. *Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek* [Applied problems of mechanics of composite cylindrical shells]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2014. 408 p. (in Russ.).
8. Yankovskii A.P. Modelirovanie osesimmetrichnogo uprugoplasticheskogo deformirovaniya tsilindricheskikh voloknistyykh obolochek [Modeling of axisymmetric elastoplastic deformation of cylindrical fibrous shells]. *Mechanics of machines, mechanisms and materials*, 2018, no. 2(43), pp. 68–76 (in Russ.).
9. Yankovskii A.P. Modelirovanie uprugoplasticheskogo povedeniya gibkikh tsilindricheskikh obolochek s prostranstvennyimi strukturami armirovaniya [Modeling of elastic-plastic behavior of flexible cylindrical shells with spatial reinforcement structures]. *Composite materials constructions*, 2019, no. 2, pp. 9–21 (in Russ.).
10. Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika kompozitnykh konstruksiy pri vysokikh temperaturakh* [Mechanics of composite structures at high temperatures]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2019. 448 p. (in Russ.).
11. *Composites: State of art*. New York, AIME, 1974. 365 p.
12. *Kompozitsionnye materialy* [Composite materials]. Kiev, Nauchnaya mysl Publ., 1985. 592 p. (in Russ.).
13. *Handbook of composites*. New York, Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1982. 786 p.
14. Vena P., Gastaldi D., Contro R. Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites. *International journal of plasticity*, 2008, vol. 24, iss. 3, pp. 483–508. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2007.07.001>.
15. Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L. Homogenization of elasto-(visco)-plastic composites based on an incremental variational principle. *International journal of plasticity*, 2012, vol. 36, pp. 86–112. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.03.010>.
16. Akhundov V.M. Inkrementalnaya karkasnaya teoriya sred voloknistogo stroeniya pri bolshikh uprugikh i plasticheskikh deformatsiyakh [Incremental carcass theory of fibrous media under large elastic and plastic deformations]. *Mekhanika kompozitnykh materialov*, 2015, vol. 51, no. 3, pp. 539–558 (in Russ.).
17. Yankovskii A.P. Modelirovanie termouprugoviyazkoplasticheskogo deformirovaniya gibkikh armirovannykh plastin [Modeling of thermo-elastic-visco-plastic deformation of flexible reinforced plates]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2022, vol. 86, no. 1, pp. 121–150 (in Russ.).
18. Bezukhov N.I., Bazhanov V.L., Goldenblat I.I., Nikolaenko N.A., Sinyukov A.M. *Raschety na prochnost, ustoychivost i kolebaniya v usloviyakh vysokikh temperatur* [Calculations on strength, stability and fluctuations in conditions of high temperatures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1965. 567 p. (in Russ.).
19. *Encyclopedia of physics. Vol. VIa/1. Mechanics of solids I*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1973.
20. Reissner E. On transverse vibrations of thin shallow elastic shells. *Quarterly of applied mathematics*, 1955, vol. 13, no. 2, pp. 169–176. DOI: <https://doi.org/10.1090/qam/69715>.
21. Bogdanovich A.E. *Nelineynye zadachi dinamiki tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek* [Nonlinear problems of the dynamics of cylindrical composite shells]. Riga, Zinatne Publ., 1987. 295 p. (in Russ.).
22. Ambartsumyan S.A. *Obshchaya teoriya anizotropnykh obolochek* [The general theory of anisotropic shells]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 446 p. (in Russ.).
23. Vasiliev V.V., Morozov E. *Advanced mechanics of composite materials and structural elements*. Amsterdam, Elsevier, 2013. 412 p.
24. Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading. *Computers & structures*, 1987, vol. 26, no. 1–2, pp. 1–15. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(87\)90232-X](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90232-X).
25. Lukanin V.N., Shatrov M.G., Kamfer G.M., Nechaev S.G., Ivanov I.E., Matyukhin L.M., Morozov K.A. *Teplotekhnika* [Heat engineering]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2003. 671 p. (in Russ.).