

УДК 624.014

Д.Е. ТУЛИН

аспирант

E-mail: graftulin@gmail.com

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация

Поступила в редакцию 05.04.2023.

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МАТЕРИАЛА В ОБЛАСТИ ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ, РАСПОЛОЖЕННОЙ В ЗОНЕ КОНСТРУКТИВНОГО КОНЦЕНТРАТОРА

Проведено исследование влияния концентратора напряжений, обусловленного конструктивными особенностями сварного узла металлоконструкции краноманипуляторных установок, на напряженно-деформированное состояние материала в зоне предразрушения. В рамках исследования применен физический критерий, использующий базовые механические свойства материала. Рассматривается трещина нормального отрыва в условиях одноосного нагружения. Проведен МКЭ-анализ моделей таврового и нахлесточного сварных соединений как создающих наибольшую концентрацию напряжений в металлоконструкциях краноманипуляторных установок. Выполнен сравнительный анализ результатов расчета моделей с трещиной в области концентратора и моделей с трещиной в гладкой пластине. Показано влияние концентратора и ряда его параметров на жесткость напряженного состояния в области вершины трещины. Предложена общая усредненная оценка влияния концентратора на напряженно-деформированное состояние материала в зоне предразрушения. Даны рекомендации по учету наличия концентратора в аналитическом расчете.

Ключевые слова: сварное соединение, трещина, концентратор напряжений, дефект сварки, хрупкое разрушение, жесткость напряженного состояния, метод конечных элементов, критерий прочности

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2023-3-64-37-42>

Введение. Проблема прочности и надежности сварных металлоконструкций приобретает все большую актуальность с развитием подъемно-транспортного машиностроения. Создаются и осваиваются в производстве новые виды грузоподъемной техники. Примером могут послужить краноманипуляторные установки (КМУ), получившие широкое распространение на территории региона ЕврАзЭС. В России уже функционирует значительное количество предприятий, осуществляющих проектирование, изготовление по полному циклу, а также монтаж КМУ на шасси грузовых автомобилей. КМУ широко применяются во многих отраслях, в первую очередь лесо-, лозозаготовки, перегрузочные и транспортировочные работы, строительство. Для краноманипуляторных установок характерна весьма интенсивная эксплуатация на протяжении всего срока службы машины. Работа КМУ связана с большим количеством циклов нагружения, а также частыми перегрузками, ударами, рывками. Таким образом, металлоконструкции КМУ и рама грузового автомобиля весьма сильно подвержены развитию усталостных повреждений. Поэтому довольно остро стоит вопрос о трещиностойкости металлоконструкции КМУ.

Для защиты металлоконструкций КМУ от усталостных повреждений необходимо усовершенствование методики проектирования. Такая методика должна включать приемы, позволяющие прогнозировать ее поведение с учетом дефектов (трещин). Подобный анализ проводится в терминах механики разрушения. В настоящий момент представлен ряд критериев нелинейной механики разрушения, описывающих поведение материала с трещиной (СТОД, J-интеграл) [1–9]. Указанные критерии трудно применимы в инженерной практике и требуют специальных испытаний. В рамках данного исследования рассматривается физический критерий, использующий базовые механические свойства материала. Критерий основан на подходе Нейбера–Новожилова [10], согласно которому в области вершины трещины выделяется некоторая область, называемая зоной предразрушения. Хрупкое разрушение произойдет, если материал в зоне предразрушения достигнет определенного критического состояния.

Настоящая работа является развитием разрабатываемой инженерной методики прогнозирования хрупкого разрушения в детали с трещиной [11–14]. Рассматривается влияние концентратора

напряжений, обусловленного конструктивными особенностями сварного узла металлоконструкции КМУ, на напряженно-деформированное состояние (НДС) материала в зоне предразрушения. В качестве типичного дефекта сварки или усталостного повреждения в моделях принята полуэллиптическая трещина.

Постановка задачи. В настоящей работе использована методика прогнозирования хрупкого разрушения, согласно которой, хрупкое разрушение происходит при достижении материалом в зоне предразрушения в области вершины трещины критического состояния. Для этого должны быть выполнены следующие условия [15]:

$$\sigma_{ir} \geq \sigma_{yT}; \quad \sigma_{1r} \geq S_c, \quad (1)$$

где σ_{1r} , σ_{ir} — усредненные по зоне предразрушения первое главное напряжение и интенсивность напряжений при упругопластическом деформировании соответственно; σ_{yT} — предел текучести при температуре нагружения; S_c — напряжение отрыва данного материала.

В рамках исследования рассматривается трещина нормального отрыва в условиях одноосного нагружения, т. к. нагружение трещины по первой моде является наиболее опасным с точки зрения хрупкого разрушения. Оценку напряженно-деформированного состояния материала в зоне предразрушения перед вершиной трещины целесообразно проводить с помощью безразмерных параметров [11]:

$$s_r = \frac{\sigma_{1r}}{\sigma_{yT}}; \quad k = \frac{K_1}{\sigma_{yT} \sqrt{\pi r_0}}; \quad \eta = \frac{\sigma_{1r}}{\sigma_{ir}}, \quad (2)$$

где K_1 — коэффициент интенсивности напряжений (КИН); r_0 — характерный размер зоны предразрушения для данного материала; η — коэффициент жесткости напряженного состояния.

График $s_r(k)$ представлен на рисунке 1. Он отчетливо разделяется на три участка, каждый из которых соответствует определенной стадии нагружения. Первая стадия при $k \leq k_1$ — зависимость $s_r(k)$ имеет линейный характер, пластическая зона мала, и размер ее не превышает r_0 . Вторая стадия при $k_1 < k \leq k_2$ сопровождается ростом жесткости напряженного состояния η и локальным развитием пластических деформаций, размер области которых превышает r_0 . Граница k_2 соответствует максимуму η . Третья стадия при $k > k_2$ характеризуется интенсивным развитием пластических деформаций и снижением η [11]. График $s_r(k)$ не зависит от предела текучести, а значит, и от температуры. В работе [13] показано, что $s_r(k)$ с достаточной точностью описывается функцией:

$$\begin{aligned} \text{при } 0 \leq k \leq k_1: \quad s_r &= 1,2k; \\ \text{при } k_1 < k \leq k_2: \quad s_r &= 1 + U \left(1 - \frac{w}{k^2} \right) + V \frac{G_p}{E} k^2, \end{aligned} \quad (3)$$

где G_p — модуль пластического упрочнения; E — модуль упругости; U, V, w — коэффициенты, за-

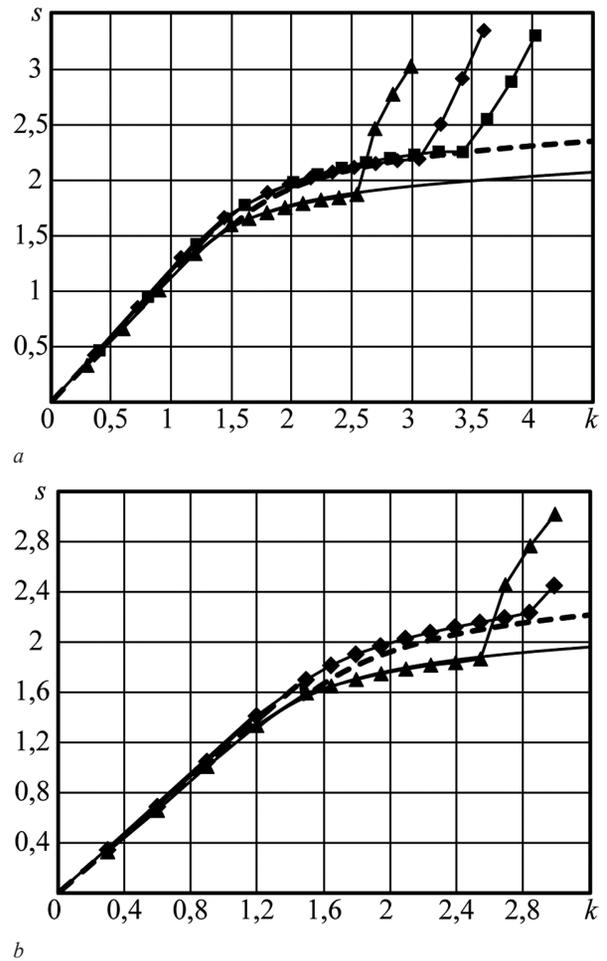


Рисунок 1 — Графики $s_r(k)$, полученные в рамках исследования: *a* — тавровое соединение; *b* — нахлесточное соединение; \blacktriangle — по данным МКЭ-анализа модели гладкой пластины; $\blacksquare, \blacklozenge$ — то же, модели с концентратором; сплошная линия — график, построенный по функции (3) для гладкой пластины; штриховая линия — график по (6)

Figure 1 — $s_r(k)$ graphs obtained as part of the study: *a* — T-joint; *b* — lap joint; \blacktriangle — according to the FEM analysis of the smooth plate model; $\blacksquare, \blacklozenge$ — the same, models with a concentrator; solid line — a graph constructed by function (3) for a smooth plate; dashed line — a graph by (6)

висающие от геометрии узла и размеров трещины. Величины коэффициентов устанавливаются по результатам МКЭ-анализа. С учетом (2) и (3) условие разрушения (1) примет вид:

$$\sigma_{ir} \geq \sigma_{yT}; \quad s_r(k) \sigma_{yT} \geq S_c. \quad (4)$$

С точки зрения хрупкого разрушения наиболее опасным является второй участок $k_1 < k \leq k_2$. Первое из условий (1) на данном участке выполнено, и если уровень напряжений достигнет S_c для данного материала, то произойдет хрупкое разрушение. При $k > k_2$ хрупкое разрушение не произойдет ввиду больших пластических деформаций. На НДС материала в зоне предразрушения и, соответственно, положение границ k_2, s_2 могут влиять различные факторы [16, 17]. Неблагоприятными следует считать факторы, смещающие границы k_2, s_2 вправо и вверх соответственно. Подобное смещение границ k_2, s_2 означает увеличение про-

должительности потенциально опасного участка $k_1 < k \leq k_2$, а также повышение вероятности достичь S_c до наступления стадии большей пластичности, где условия для хрупкого разрушения уже не выполняются.

Целью настоящей работы является оценка влияния концентратора напряжений, обусловленного конструктивными особенностями сварного узла, на напряженно-деформированное состояние материала в зоне предразрушения, а также влияние его на параметры s_2 и k_2 .

Основная часть. В рамках настоящего исследования рассматривались сварные соединения, применяемые в металлоконструкциях КМУ. Выделено два основных типа соединений, создающих наибольшую концентрацию напряжений: тавровое и нахлесточное. Оба типа соединений образуют концентратор типа уступ. В качестве образцов нахлесточного и таврового соединений использованы следующие узлы: втулка, сваренная в лист; лист с накладкой (рисунок 2). Для расчета в среде NX Nastran по алгоритму Nonlinear Static создано три группы МКЭ-моделей с полуэллиптическими трещинами нулевого раскрытия: гладкие пластины, нахлесточные и тавровые соединения. Модели с концентратором содержат трещину непосредственно в области концентратора. В моделях варьируются толщины t_2 присоединяемых компонентов, количество швов (в нахлесточных соединениях), а также размеры трещин: глубина b , полуширина a (см. рисунок 2). Плоскость трещины расположена перпендикулярно направлению нагружения. Величина нагрузки подбиралась так, чтобы на удалении от трещины получить $\sigma_{ном} \approx \sigma_y$. Свойства симметрии позволили рассматривать половину или четверть модели, с закреплением по соответствующим плоскостям симметрии. Нижние плоскости моделей также закреплены, что моделирует их связь с металлоконструкцией. В моделях использованы элементы типа Solid. В области 2 мм вокруг фронта трещины размер элементов составил 0,1 мм. С удалением от фронта трещины размер элементов увеличивается. В моделях применен билинейный материал со следующими механическими свойствами: коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$; предел текучести $\sigma_y = 300$ МПа; модуль пластического упрочнения $G_p = 1200$ МПа.

По результатам МКЭ-анализа для каждой модели строился график $s_r(k)$. Далее отыскивались границы k_2 , s_2 . Полученные массивы данных для моделей с концентраторами сравнивались с величинами k_2 , s_2 из моделей с гладкими пластинами.

Анализ результатов исследования. Наличие концентратора напряжений повышает жесткость НДС материала в зоне предразрушения на 5–18 %. Наибольшее повышение η выявлено в модели нахлесточного соединения с двумя швами и $t_2 = 24$ мм, что может быть объяснено наибольшей стесненностью развития пластических

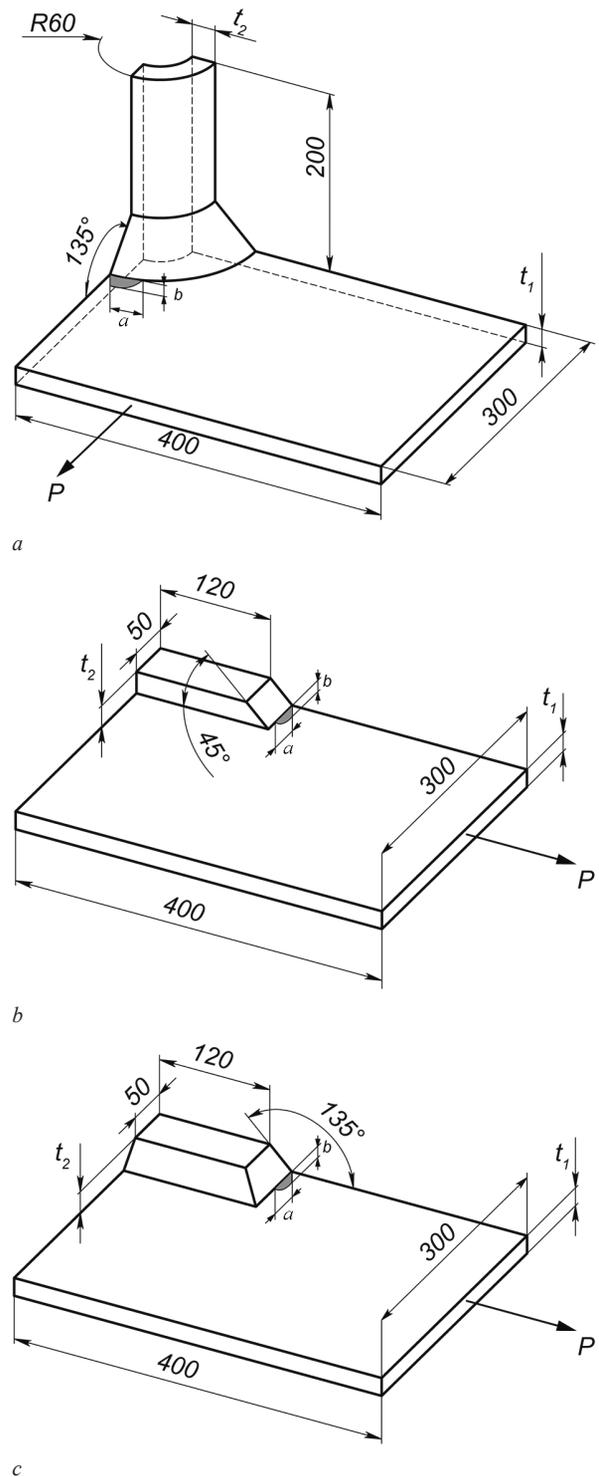


Рисунок 2 — Модели сварных узлов, использованных для МКЭ-анализа: а — тавровое соединение; б — нахлесточное соединение, поперечный шов; с — нахлесточное соединение, поперечный и продольный швы
Figure 2 — Models of welded joints used for FEM analysis: а — T-joint; б — lap joint, transverse seam; с — lap joint, transverse and longitudinal seams

деформаций. Оценен ряд факторов с точки зрения их влияния на НДС материала в зоне предразрушения: тип концентратора, размер трещины в области концентратора, толщина присоединяемого элемента. Увеличение η менее значительно зависит от типа концентратора и от размера трещины,

но более выражено зависит от толщины присоединяемого элемента. Отсюда следует, что рост η тем больше, чем меньше отношение b/t_2 .

На рисунке 1 представлены аналитические графики $s_r(k)$, а также графики, построенные по результатам МКЭ-анализа в рамках настоящего исследования, для таврового и нахлесточного соединений. Сравнение границ k_2 , s_2 из моделей гладких пластин и сварных соединений показало следующий результат. Рост величины параметра s_2 составил 13–20 %. Параметр k_2 обнаружил большую чувствительность к наличию концентратора, рост его величины составил 13–35 %. Вместе с тем, границы k_2 , s_2 , полученные из графиков моделей гладких пластин и сварных соединений, формируют общее облако, аппроксимируемое линейной зависимостью (рисунок 3), уравнение которой имеет вид:

$$s_2(k_2) = 0,196k_2 + 1,51. \quad (5)$$

На основании выявленных особенностей предлагается принять общую усредненную оценку влияния концентратора на НДС материала в зоне предразрушения. Рекомендуется учитывать наличие концентратора введением в функцию (3) соответствующих коэффициентов: $\gamma_k = 1,22$ и $\gamma_s = 1,17$. Таким образом, условие разрушения (1) примет вид:

$$\sigma_{ir} \geq \sigma_{yT}, \quad \gamma_s s_r(\gamma_k k) \sigma_{yT} \geq S_c. \quad (6)$$

Чтобы получить компактное решение для s_2 воспользуемся аналитической формой k_2 для гладких пластин с полуэллиптическими трещинами по [13]:

$$k_2 = 0,8 \sqrt{\frac{b}{r_0}}. \quad (7)$$

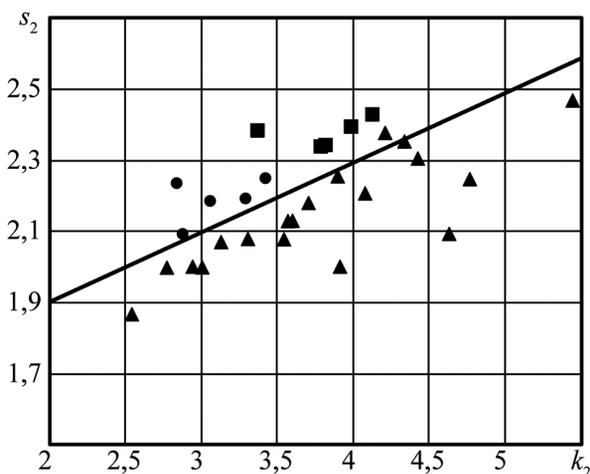


Рисунок 3 — Границы k_2 , s_2 графиков $s_r(k)$: \blacktriangle — гладкая пластина, различные размеры трещины; \bullet — модели с различными концентраторами, трещина $a = 7,5$ мм, $b = 5$ мм; \blacksquare — модели с различными концентраторами, трещина $a = 10$ мм, $b = 5$ мм; сплошная линия — линейная зависимость по (5)

Figure 3 — Boundaries k_2 , s_2 of $s_r(k)$ graphs: \blacktriangle — smooth plate, various crack sizes; \bullet — models with different concentrators, crack $a = 7.5$ mm, $b = 5$ mm; \blacksquare — models with different concentrators, crack $a = 10$ mm, $b = 5$ mm; solid line — linear dependence (5)

Подставляя в выражение (5) формулу (7), а также коэффициенты γ_k , γ_s , получим решение для s_2 и условие разрушения (1) примет вид:

$$\sigma_{ir} \geq \sigma_{yT}, \quad \left(0,22 \sqrt{\frac{b}{r_0}} + 1,77\right) \sigma_{yT} \geq S_c.$$

Заключение. Проведено исследование влияния концентратора напряжений, обусловленного конструктивными особенностями сварного узла металлоконструкции КМУ, на напряженно-деформированное состояние материала в зоне предразрушения. Рассмотрены сварные соединения с концентратором типа уступ, характерным для сварных соединений в металлоконструкциях КМУ. В качестве типичного дефекта сварки или усталостного повреждения в моделях принята полуэллиптическая трещина. Рассмотрено нагружение трещины по первой моде как наиболее опасное с точки зрения хрупкого разрушения. Выполнен сравнительный анализ результатов расчета моделей с трещиной в области концентратора и моделей с трещиной в гладкой пластине. Показано, что для полуэллиптических трещин нормального отрыва в конструктивных концентраторах типа уступ увеличение η в большей степени зависит от толщины присоединяемого элемента и составляет 5–18 %. Таким образом, при оценке трещиностойкости сварного узла следует обращать внимание на глубину дефекта и толщину присоединяемого элемента. Для указанных условий рекомендовано компактное решение s_2 при определении условия разрушения (4).

Список литературы

1. Крыжевич, Г.Б. Интегральные критерии разрушения в численных расчетах низкотемпературной прочности конструкций морской техники / Г.Б. Крыжевич // Тр. Крыловского гос. научн. центра. — 2018. — № 1(383). — С. 29–42.
2. Матвиенко, Ю.Г. Модели и критерии механики разрушения / Ю.Г. Матвиенко. — М.: Физматлит, 2006. — 328 с.
3. Zhu, X.K. Review of fracture toughness (G, K, J, CTOD, CTOA) testing and standardization / X.K. Zhu, J.A. Joyce // Engineering Fracture Mechanics. — 2012. — Vol. 85. — Pp. 1–46. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engframech.2012.02.001>.
4. Tanabe, Y. Fracture toughness for brittle fracture of elastic and plastic materials / Y. Tanabe // Materials Transactions. — 2013. — Vol. 54, iss. 3. — Pp. 314–318. — DOI: <https://doi.org/10.2320/matertrans.M2012348>.
5. Корнев, В.М. Обобщенный достаточный критерий прочности. Описание зоны предразрушения / В.М. Корнев // Прикладная механика и техническая физика. — 2002. — Т. 43, № 5. — С. 153–161.
6. Seweryn, A. Brittle fracture criterion for structures with sharp notches / A. Seweryn // Engineering Fracture Mechanics. — 1994. — Vol. 47, iss. 5. — Pp. 673–681. — DOI: [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(94\)90158-9](https://doi.org/10.1016/0013-7944(94)90158-9).
7. Palombo, M. An evaluation of size effect in CTOD-SENB fracture toughness tests / M. Palombo, S. Sandon, M. De Marco // Procedia Engineering. — 2015. — Vol. 109. — Pp. 55–64. — DOI: <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.06.207>.
8. Bažant, Z.P. Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: survey of progress / Z.P. Bažant, M. Jirásek // Journal of Engineering Mechanics. — 2002. — Vol. 128, iss. 11. — Pp. 1119–1149. — DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2002\)128:11\(1119\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119)).

9. Rabczuk, T. Computational methods for fracture in brittle and quasi-brittle solids: state-of-the-art review and future perspectives / T. Rabczuk // *Applied Mathematics*. — 2013. — Vol. 2013. — 38 p. — DOI: <https://doi.org/10.1155/2013/849231>.
10. Линьков, А.М. Потеря устойчивости, характерный линейный размер и критерий Новожилова–Нейбера в механике разрушения / А.М. Линьков // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. — 2010. — № 6. — С. 98–111.
11. Vasil'ev, I.A. Elastoplastic state of stress of a plate with a crack / I.A. Vasil'ev, S.A. Sokolov // *Russian Metallurgy (Metally)*. — 2020. — Iss. 10. — Pp. 1065–1069. — DOI: <https://doi.org/10.1134/S0036029520100316>.
12. Sokolov, S.A. Mathematical model for the elastoplastic state of stress of the material at the crack tip / S.A. Sokolov, I.A. Vasil'ev, A.A. Grachev // *Russian Metallurgy (Metally)*. — 2021. — Iss. 4. — Pp. 347–350. — DOI: <https://doi.org/10.1134/S0036029521040315>.
13. Sokolov, S.A. Modeling of elastoplastic stress states in crack tip regions / S.A. Sokolov, D.E. Tulin // *Physical Mesomechanics*. — 2021. — Vol. 24, iss. 3. — Pp. 237–242. — DOI: <https://doi.org/10.1134/S1029959921030024>.
14. Sokolov, S.A. Mathematical model of brittle fracture of a cracked part / S.A. Sokolov, D.E. Tulin // *Physical Mesomechanics*. — 2022. — Vol. 25, iss. 1. — Pp. 72–79. — DOI: <https://doi.org/10.1134/S1029959922010088>.
15. Копельман, Л.А. Основы теории прочности сварных конструкций / Л.А. Копельман. — 2-е изд. — СПб.: Лань, 2010. — 457 с.
16. Sokolov, S. Investigation of the size of the fracture process zone and the cleavage stress in cracked steel parts / S. Sokolov, D. Tulin, I. Vasiliev // *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. — 2023. — Vol. 46, iss. 3. — Pp. 1159–1169. — DOI: <https://doi.org/10.1111/ffe.13927>.
17. Sokolov, S. Effect of intrinsic residual stresses on the brittle fracture resistance of a welded joint / S. Sokolov, D. Tulin // *Russian Metallurgy (Metally)*. — 2023. — Iss. 4. — Pp. 51–57.

TULIN Daniil E.

Ph. D. Student

E-mail: graftulin@gmail.com

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, Russian Federation

Received 05 April 2023.

STUDY OF THE STRESS-STRAIN STATE OF THE MATERIAL AT THE CRACK TIP, LOCATED IN THE AREA OF THE STRUCTURAL CONCENTRATOR

The influence of the stress concentrator is studied due to the design features of the welded metal structure of a loader crane on the stress-strain state of the material in the fracture process zone. Within the framework of the research, a physical criterion using the basic mechanical properties of the material is applied. A normal tear-off crack is considered under uniaxial loading conditions. FEM analysis of T-joint and lap welded joint models, as creating the highest stress concentration in metal structures of loader cranes, is carried out. A comparative analysis of calculation results for models with a crack in the concentrator area and models with a crack in a smooth plate is performed. The influence of the concentrator and its several parameters on the stress stiffness at the crack tip is shown. A general averaged estimation of the concentrator influence on the material stress state in the fracture process zone is proposed. Recommendations on taking into account the presence of the concentrator in analytical calculations are given.

Keywords: welded joint, crack, stress concentrator, welding defect, brittle fracture, stress stiffness, finite element method, strength criterion

DOI: <https://doi.org/10.46864/1995-0470-2023-3-64-37-42>

References

1. Kryzhevich G.B. Integralnye kriterii razrusheniya v chislennykh raschetakh nizkotemperaturnoy prochnosti konstruktsiy morskoy tekhniki [Integral failure criteria in numerical low-temperature strength calculations of marine facilities]. *Transactions of the Krylov State Research Centre*, 2018, no. 1(383), pp. 29–42 (in Russ.).
2. Matvienko Yu.G. *Modeli i kriterii mekhaniki razrusheniya* [Fracture mechanics models and criteria]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. 328 p. (in Russ.).
3. Zhu X.K., Joyce J.A. Review of fracture toughness (G, K, J, CTOD, CTOA) testing and standardization. *Engineering fracture mechanics*, 2012, vol. 85, pp. 1–46. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2012.02.001>.
4. Tanabe Y. Fracture toughness for brittle fracture of elastic and plastic materials. *Materials transactions*, 2013, vol. 54, iss. 3, pp. 314–318. DOI: <https://doi.org/10.2320/matertrans.M2012348>.
5. Kornev V.M. Obobshchenny dostatochnyy kriteriy prochnosti. Opisanie zony predrazrusheniya [Generalized sufficient strength criterion. Description of the fracture process zone]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 2002, vol. 43, no. 5, pp. 153–161 (in Russ.).
6. Seweryn A. Brittle fracture criterion for structures with sharp notches. *Engineering fracture mechanics*, 1994, vol. 47, iss. 5, pp. 673–681. DOI: [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(94\)90158-9](https://doi.org/10.1016/0013-7944(94)90158-9).
7. Palombo M., Sandon S., De Marco M. An evaluation of size effect in CTOD-SENB fracture toughness tests. *Procedia*

- engineering*, 2015, vol. 109, pp. 55–64. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.06.207>.
8. Bažant Z.P., Jirásek M. Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: survey of progress. *Journal of engineering mechanics*, 2002, vol. 128, iss. 11, pp. 1119–1149. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2002\)128:11\(1119\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119)).
 9. Rabczuk T. Computational methods for fracture in brittle and quasi-brittle solids: state-of-the-art review and future perspectives. *Applied mathematics*, 2013, vol. 2013. DOI: <https://doi.org/10.1155/2013/849231>.
 10. Linkov A.M. Poterya ustoychivosti, kharakternyy lineynyy razmer i kriteriy Novozhilova–Neybera v mekhanike razrusheniya [loss of stability, characteristic length, and Novozhilov-Neuber criterion in fracture mechanics]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 2010, no. 6, pp. 98–111 (in Russ.).
 11. Vasil'ev I.A., Sokolov S.A. Elastoplastic state of stress of a plate with a crack. *Russian metallurgy (Metally)*, 2020, iss. 10, pp. 1065–1069. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0036029520100316>.
 12. Sokolov S.A., Vasil'ev I.A., Grachev A.A. Mathematical model for the elastoplastic state of stress of the material at the crack tip. *Russian metallurgy (Metally)*, 2021, iss. 4, pp. 347–350. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0036029521040315>.
 13. Sokolov S.A., Tulin D.E. Modeling of elastoplastic stress states in crack tip regions. *Physical mesomechanics*, 2021, vol. 24, iss. 3, pp. 237–242. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1029959921030024>.
 14. Sokolov S.A., Tulin D.E. Mathematical model of brittle fracture of a cracked part. *Physical mesomechanics*, 2022, vol. 25, iss. 1, pp. 72–79. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1029959922010088>.
 15. Kopelman L.A. *Osnovy teorii prochnosti svarnykh konstruksiy* [Fundamentals of the theory of strength of welded structures]. Saint Petersburg, Lan Publ., 2010. 457 p. (in Russ.).
 16. Sokolov S., Tulin D., Vasiliev I. Investigation of the size of the fracture process zone and the cleavage stress in cracked steel parts. *Fatigue & fracture of engineering materials & structures*, 2023, vol. 46, iss. 3, pp. 1159–1169. DOI: <https://doi.org/10.1111/ffe.13927>.
 17. Sokolov S., Tulin D. Effect of intrinsic residual stresses on the brittle fracture resistance of a welded joint. *Russian metallurgy (Metally)*, 2023, iss. 4, pp. 51–57.